Análisis Matemático I
Clase 16: Cálculo de áreas. Área entre curvas. Método de sustitución.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2026

Comentario sobre la regla de la cadena y 'derivación implícita'

Hasta ahora, hemos considerado funciones que se escriben en la forma:

$$\mathbf{y{=}f(x)}$$

donde aparece de forma explícita **y** en términos de **x**. En ocasiones, se desea obtener la derivada $\mathbf{y}'$ cuando hay una relación implícita entre las variables **x** y **y**. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Si bien a veces es posible despejar **y** en términos de **x** y obtener $\mathbf{y}'$, puede que esto no sea posible o adecuado. En esos casos, se aplica el método de derivación implícita, que no es más que aplicar la regla de la cadena.

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x^2 + y^2 = 4. \tag{1}$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

- la derivada de x^2 es $2x$,
- teniendo en cuenta que y^2 es $[y(x)]^2$, se deriva aplicando la regla de la cadena y se obtiene $2.y(x)y'(x)$ o en forma resumida

$$2yy'.$$

Luego, al derivar ambos miembros de (1) da

$$2x + 2yy' = 0$$

y se despeja y':

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x^2 + y^2 = 4. \tag{1}$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

- la derivada de x^2 es $2x$,
- teniendo en cuenta que y^2 es $[y(x)]^2$, se deriva aplicando la regla de la cadena y se obtiene $2.y(x)y'(x)$ o en forma resumida

$$2yy'.$$

Luego, al derivar ambos miembros de (1) da

$$2x + 2yy' = 0$$

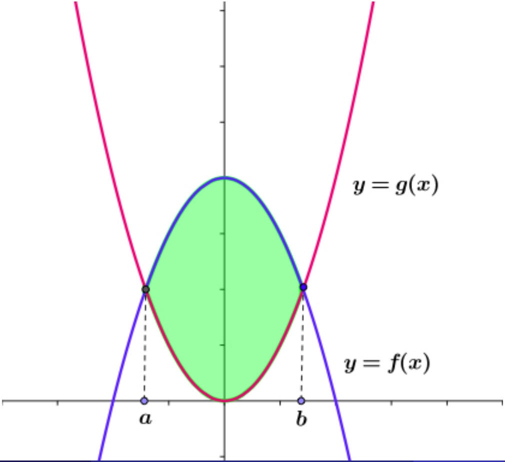
y se despeja y':

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Si bien en Análisis Matemático I no trabajaremos con el método de derivación implícita, ya que es una mera aplicación de la regla de la cadena, en otras asignaturas, como Geometría Analítica, lo usará.

Cálculo de áreas entre curvas

Problema: Considere dos funciones continuas f y g en $[a, b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$. Se desea determinar el área de la región comprendida entre los gráficos de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$:



Cálculo de áreas entre curvas

Para calcular el área buscada, vamos a aproximar la región de interés mediante rectángulos. Así, tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y elegimos puntos:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

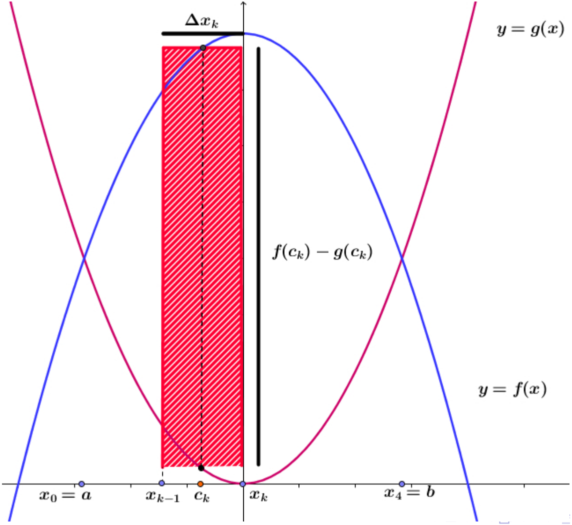
$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

para construir los rectángulos.

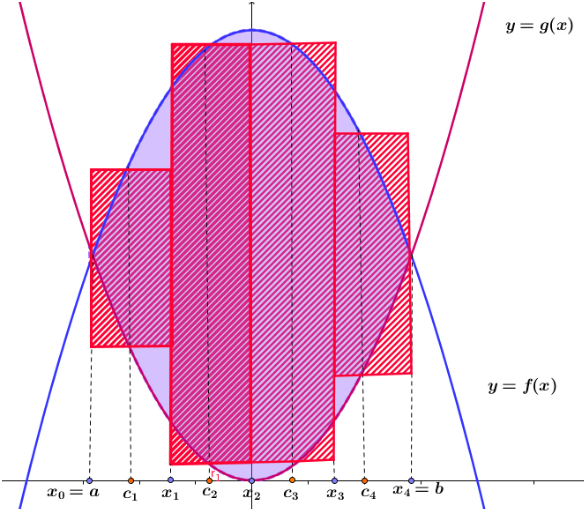
En el siguiente gráfico se puede ver la construcción de un rectángulo genérico de aproximación con su base y altura:



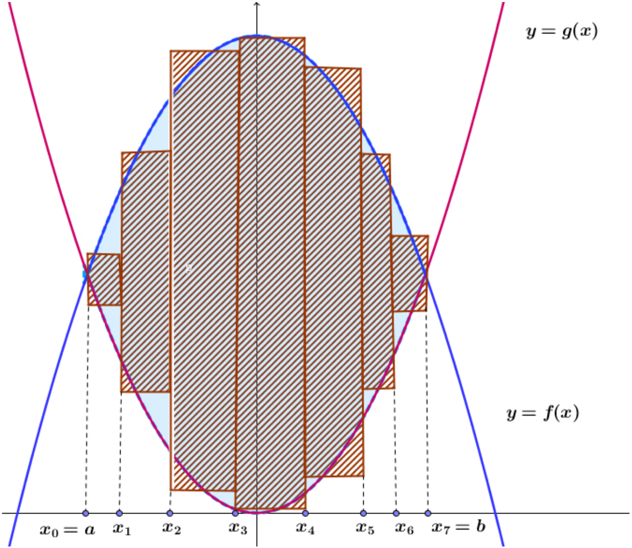
Observando la figura anterior obtenemos que el área ΔA_k del rectángulo genérico es:

$$\Delta A_k = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

A continuación se visualiza el procedimiento de aproximación con $n = 4$:



Aumentando la cantidad de rectángulos y haciendo que sus bases sean todas cada vez más finas se obtiene una mejor aproximación.



Luego, una aproximación del área de la región considerada viene dada por la suma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

Cuando $||P||$ tiende a cero, la suma anterior tiende a:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

ya que ambas funciones son continuas en $[a, b]$.

Así, tenemos la siguiente definición inspirada en el procedimiento anterior.

Definición

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ tales que:

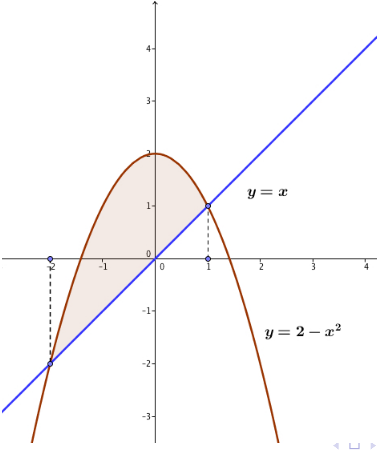
$$f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Entonces, el área de la región comprendida entre el gráfico de ambas funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Cálculo de áreas entre curvas

Ejemplo: calcule el área comprendida entre los gráficos de las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = 2 - x^2$.
Para calcular el área buscada, realizamos un gráfico de ambas funciones para determinar cuál de las dos es mayor a la otra.



En este caso:

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in [-2, 1].$$

Por ende, el área es:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{1} [2 - x^2 - x]dx = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo: determine el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^4 - 2x^2$.
Para calcular el área, no vamos a graficar. Primero determinamos los puntos de intersección de las curvas:

$$x^4 - 2x^2 = 2x^2$$

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

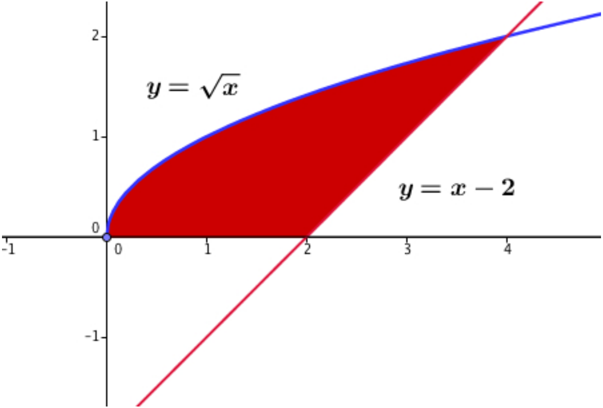
Así, las soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -2$. Quedan determinados dos intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$. Como no sabemos cuál de las funciones es mayor en dichos intervalos , para calcular el área comprendida entre los gráficos vamos a utilizar valor absoluto:

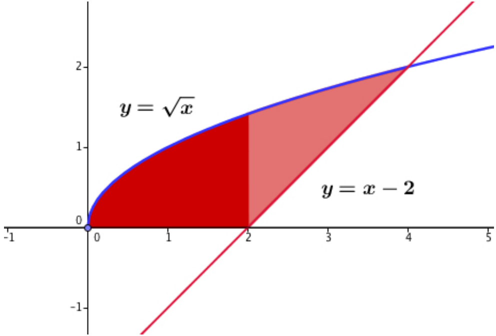
$$A = \left| \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx \right| + \left| \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx \right| = \frac{128}{15}$$

Ejemplo: Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.

Cálculo de áreas entre curvas

Ejemplo: Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.





Para resolver el ejemplo anterior,podemos plantear dos integrales:

$$A=\int_0^2 \sqrt{x}\,dx+\int_2^4 \left[\sqrt{x}-(x-2)\right]\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\Big|_2^4$$

$$=\frac{10}{3}.$$

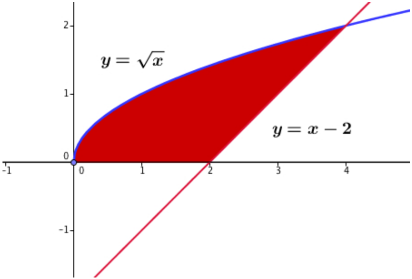
Cálculo de áreas entre curvas

En ejemplo anterior, calcular el área requirió escribir dos integrales. Sin embargo, la resolución puede simplificarse si se trabaja con funciones en términos de la variable y.

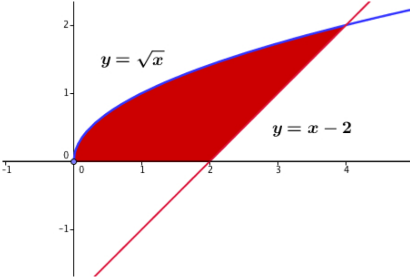
Cálculo de áreas para funciones de y

Si ahora las curvas se dan como funciones de y: $x = f(y)$, $x = g(y)$, $g(y) \leq f(y)$ en $[c, d]$, entonces el área de la región comprendida entre las curvas y las rectas $y = c$, $y = d$ es:

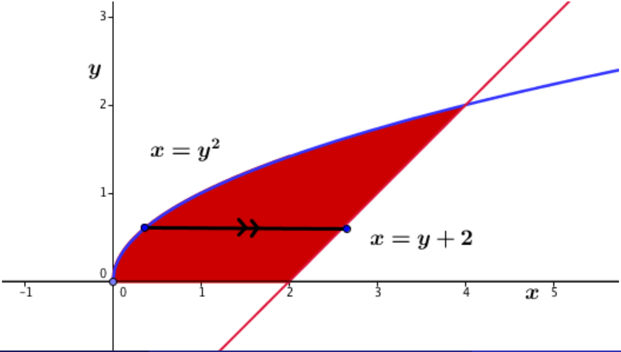
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$



En términos de y:



En términos de y:



Luego:

$$A = \int_0^2 \left(y + 2 - y^2\right)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Turno tarde, llegar hasta aquí.

Método de sustitución para calcular integrales

En esta parte de la clase, estudiaremos un primer método para calcular antiderivadas de funciones relacionado a la operación de composición. Otros métodos relacionados al cálculo de antiderivadas para productos y cocientes de funciones serán analizados en clases posteriores.

Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

cambiando variables, elegimos $u = g(x)$ y entonces $du = g'(x)dx$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int f(u)du$$

que es mucho más simple que la integral original. Este método se denomina método de sustitución:

Fórmula de sustitución

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$. Supongamos además que g' es continua en $[a, b]$. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$.

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$. Luego, elegimos $u = x^3 + x$ y entonces $du = (3x^2+1)dx$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Como nuestro integrando original depende de x, reemplazamos u por $x^3 + x$:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)dx = \frac{(x^3+x)^6}{6} + C.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es similar a una de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$.Elegimos

$$u = 2x^2 - 1$$

y entonces

$$du = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{4}du.$$

Sustituyendo:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = \frac{1}{4}\int udu = \frac{u^2}{8} + C = \frac{(2x^2-1)^2}{8} + C.$$

Ejemplos. Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\, dx.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\,dx.$$

Solución: en este caso tenemos como una posibilidad:

$$f(x) = x, \quad g(x) = sen(x).$$

Entonces elegimos $u = g(x) = sen(x)$ y entonces $du = cos(x)\,dx$.Luego,

$$\int sen(x).cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int sen(x).cos(x)\,dx.$$

Solución: en este caso tenemos como una posibilidad:

$$f(x) = x, \quad g(x) = sen(x).$$

Entonces elegimos $u = g(x) = sen(x)$ y entonces $du = cos(x)\,dx$.Luego,

$$\int sen(x).cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C.$$

También se puede: $f(x) = x, \quad g(x) = cos(x)$. Entonces $u = cos(x)$ y $du = -sen(x)\,dx$. Luego

$$\int sen(x).cos(x)\,dx = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{cos^2(x)}{2} + C.$$

¿Son resultados distintos?