

Análisis Matemático I

Clase 18: Aplicaciones de la integral al cálculo de longitudes. Funciones inversas. Funciones trascendentes.

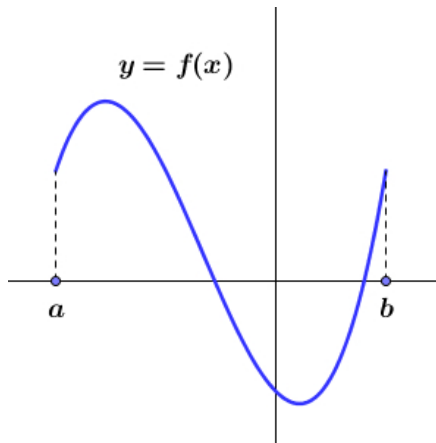
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2026

Longitud de una curva

Problema: determine la longitud de la curva dada por una función $y = f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$.



Longitud de curva

Sea $y = f(x)$ una función tal que f' es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Longitud de curva

Sea $y = f(x)$ una función tal que f' es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

La deducción de esta expresión se hará al final del cuatrimestre.

Ejemplo:

- Encuentre la longitud de

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 4].$$

Funciones inversas

Para poder definir la función inversa de f , necesitamos evitar que la función f asigne el mismo valor a dos elementos distintos del dominio. Así, introduciremos las funciones inyectivas:

Definición de función inyectiva

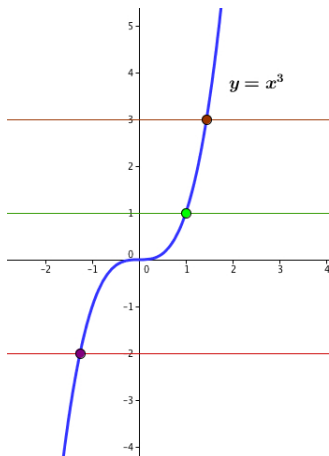
Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva en D si:

$$f(x) \neq f(y)$$

siempre que $x \in D$, $y \in D$, y además $x \neq y$.

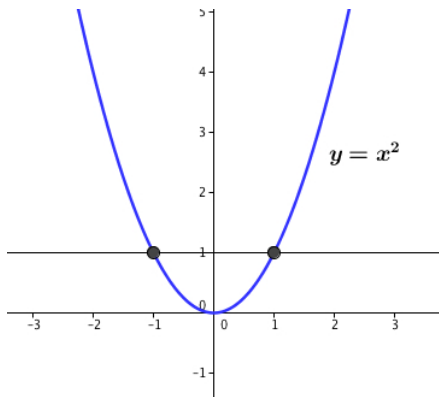
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

Observar la gráfica de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Es una función inyectiva.



Toda recta horizontal corta en a lo sumo un punto a la gráfica de una función inyectiva.

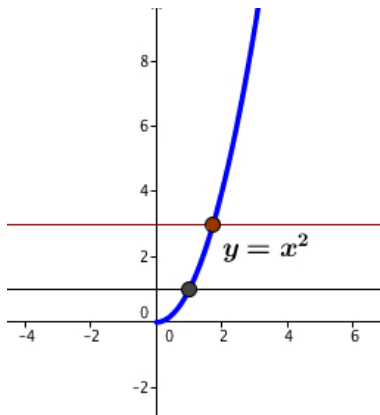
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas



Existe una recta horizontal que corta a la gráfica en dos puntos. Luego, $y = x^2$ (con dominio \mathbb{R}) no es inyectiva. Sin embargo, al modificar el dominio podemos construir una función inyectiva.

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

La función $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ es inyectiva:



Noción de función inversa

A continuación, introduciremos la noción de función inversa:

Definición de función inversa

Sea $f : D \rightarrow R$ una función inyectiva en D , donde R es la imagen o rango de f . La función inversa $f^{-1} : R \rightarrow D$ se define por:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

para todo $y \in R$.

Observar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \mathbf{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Ejemplo: determine la función inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, y de $y = x^2$, $x \geq 0$.

Ejemplo: determinaremos la función inversa de $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. A partir de la gráfica de f , sabemos que es inyectiva y que el rango de la función es $[0, \infty)$. La función inversa $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ y para calcular $f^{-1}(x)$ procedemos como sigue:

- primero despejamos x en la expresión de $f(x)$:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

- dado que generalmente expresamos a las funciones con variable independiente x , intercambiamos los símbolos de x e y en la ecuación anterior:

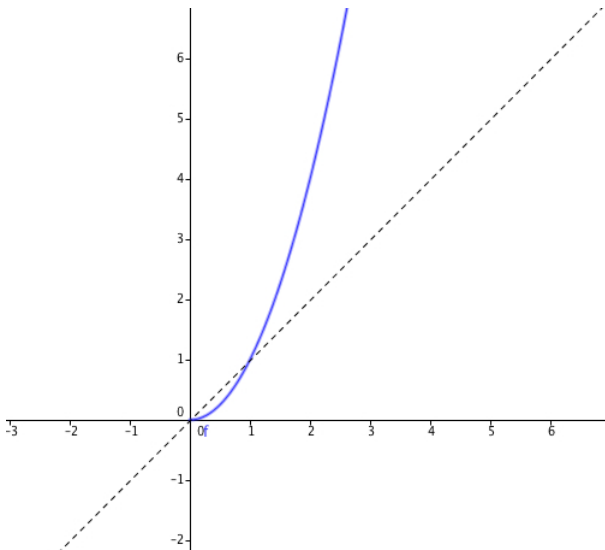
$$y = \sqrt{x}.$$

- Así:

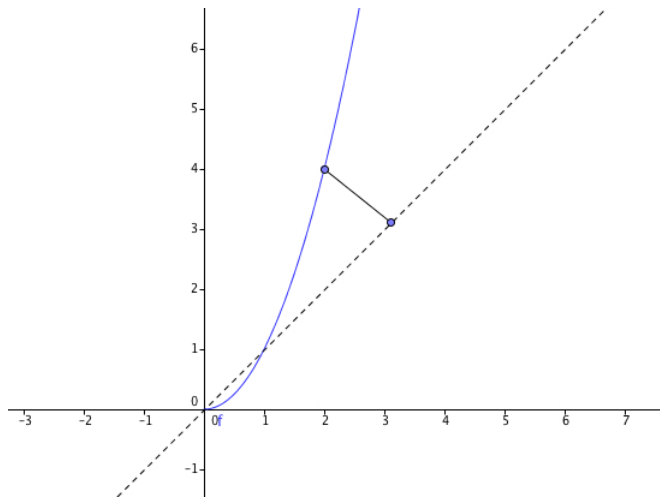
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Veremos gráficamente cómo determinar la función inversa y cómo se relacionan las gráficas de f y f^{-1} :

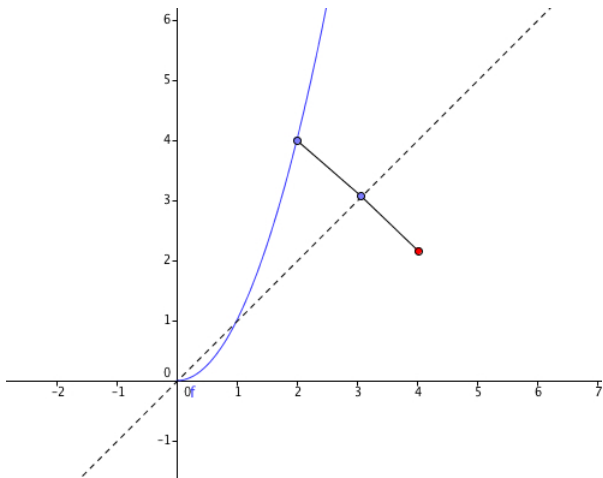
1-primero hacemos el gráfico de f y trazamos la recta $y = x$ con un trazo tenue:



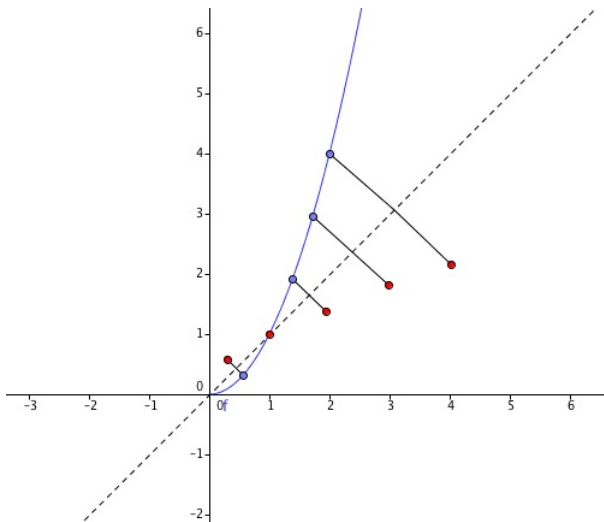
2-tomamos un punto de la gráfica de f y trazamos un segmento perpendicular a la recta $y = x$ que tenga como un extremo el punto elegido y el otro extremo en la recta $y = x$:



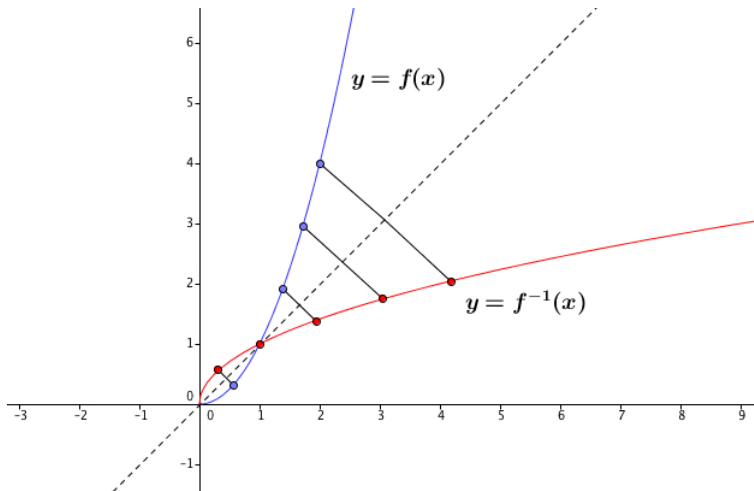
3-prolongamos el segmento del ítem anterior en dirección perpendicular a la recta $y = x$ hasta cubrir una longitud igual al segmento original:



4-realizamos el procedimiento anterior varias veces, resaltando (en este caso con rojo) los extremos de los segmentos construidos:



5-La gráfica de f^{-1} es la curva que conecta a todos los puntos construidos (puntos rojos).



Observar que la gráfica de la función inversa es simétrica con respecto a la recta $y = x$.

Derivación de funciones inversas

Recordar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si f y f^{-1} son derivables, entonces la regla de la cadena implica:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Luego si $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$ entonces:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Recordando que $x = f^{-1}(y)$ obtenemos la fórmula:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

Solución: observar primero que $f'(x) = 2x \neq 0$ para $x \in (0, \infty)$. Recordar que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Luego:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Observación: la función inversa y su derivada suelen denotarse usando a x como variable independiente. Así, la fórmula anterior para la derivada se puede escribir:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Utilizaremos la fórmula anterior para obtener la derivada de varias funciones inversas (funciones trigonométricas, exponenciales, hiperbólicas, etc.)

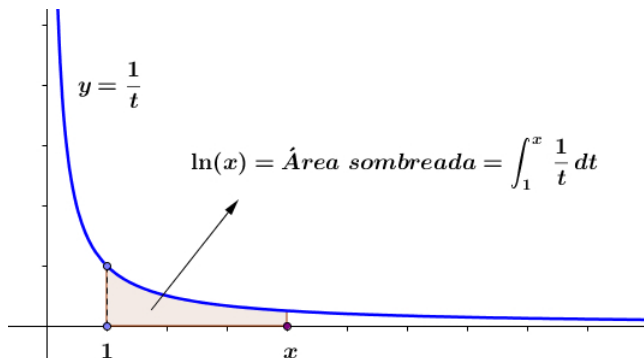
Estudio de funciones trascendentes

Definición del Logaritmo natural

Definimos la función logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para } x > 0.$$

Observar que para x mayor a 1 se tiene:



Además:

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0,$$

si $x \in (0, 1)$ entonces:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

y si $x > 1$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0.$$

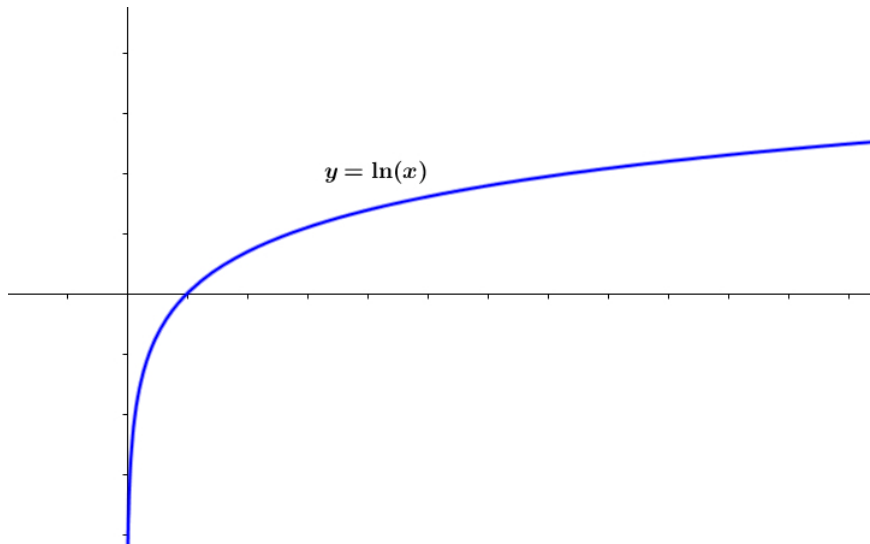
Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$$

por ende \ln es una función creciente pero es cóncava hacia abajo pues:

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Logaritmos



El logaritmo puede extenderse a valores de x negativos poniendo valores absolutos:

$$\ln(|x|) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\ln'(|x|) = \frac{1}{x}, \text{ para cada } x \neq 0.$$

Así:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C.$$

Definición: el número e se define como:

$$\ln(e) = 1.$$

Ejemplos: calcule $\int \tan(x) dx$, $\int \sec(x) dx$, $\int \cotan(x) dx$, $\int \operatorname{cosec}(x) dx$.

Vamos a calcular:

$$\int \tan(x) dx.$$

Primero escribimos:

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} dx$$

y hacemos la sustitución:

$$u = \cos(x), \quad du = -\text{sen}(x) dx.$$

Reemplazando:

$$\int \tan(x) dx = - \int \frac{1}{u} du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

Función exponencial

Definimos la función exponencial, \exp , como la inversa de la función logaritmo. Es decir, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ dada por:

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observar: $\exp(x) := e^x$,

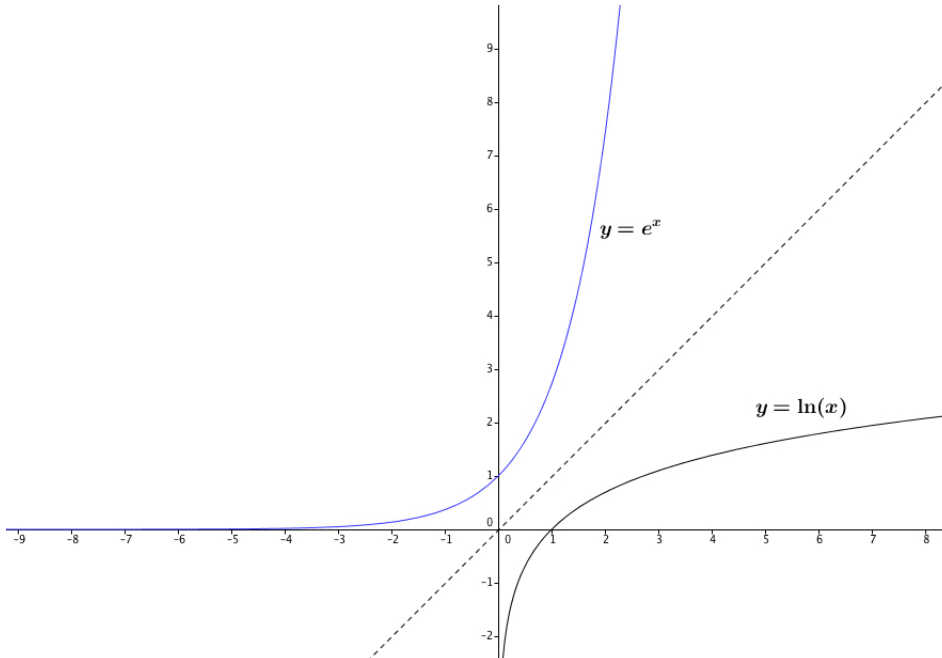
$$\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{\ln(y)} = y \quad (y > 0)$$

Además, si $y = e^x$, entonces:

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Así:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$



Función Exponenciales generales

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x \ln(a)}.$$

Observaciones generales:

- La función $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.
- Denotamos por $g(x) = \log_a(x)$ a la función inversa de a^x .

Derivada de exponenciales generales

Si $a > 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x.$$

Tarea en casa para el alumno: Usar regla de la cadena en la definición de a^x .