Análisis Matemático I
Clase 20: Técnicas de integración: integración por partes y método de integración por fracciones simples. Integrales impropias.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2026

Integración por partes para integrales definidas

Sean f y g funciones derivables en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Cuidado: la variable de integración sigue siendo x (de hecho, u y v son funciones de x), así que no hay que cambiar los extremos de integración.

Integración por partes

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

  Solución: en este caso no podemos elegir $dv = ln(x)dx$ pues deberíamos integrar $ln(x)$ que es justamente lo que se quiere hacer. Entonces tomamos:

  $$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

  $$dv = 1\, dx \Rightarrow v = x$$

  Luego:

  $$\int_1^2 ln(x)dx = x.ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}\, dx = 2ln(2) - 1.$$

Método de descomposición de fracciones simples

Objetivo: calcular integrales de funciones racionales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

donde P y Q no tiene raíces en común y donde Q sólo tiene raíces reales distintas (los casos de raíces múltiples o complejas no se verán pero se pueden trabajar en forma similar). Además se asume que el grado de P es menor al de Q. Si esto no fuera así, se divide P entre Q y se aplica la descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el cociente y R el resto. Entonces se aplica el método a $R(x)/Q(x)$.

Ejemplo 1: calcular:

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx.$$

Solución: observar que el grado del numerador es menor al del denominador. No es necesario dividir los polinomios.
El primer paso es factorizar el denominador. En este caso, el denominador ya está factorizado. Ahora vamos a descomponer la función racional en fracciones simples. Como los factores del denominador son todos distintos (el denominador tiene todas raíces distintas), planteamos la siguiente descomposición:

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}. \tag{1}$$

Buscamos los valores de A, B y C. Si sumamos las fracciones anteriores obtenemos:

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

Eliminando denominadores, se llega a:

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1).$$

- Si $x = 1$ en la igualdad anterior, se obtiene:

$$6 = A.2.4$$

  Así:

$$A = \frac{3}{4}.$$

- Si hacemos $x = -1$:

$$-2 = B.(-2).2$$

  y entonces:

$$B = \frac{1}{2}.$$

- Finalmente, si hacemos $x = -3$:

$$-2 = C.(-4)(-2)$$

y:

$$C = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, (1) implica:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

Las integrales resultantes se obtiene fácilmente.

Calcular:

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 1} \, dx.$$

Integrales impropias

Hasta ahora hemos calculado integrales de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

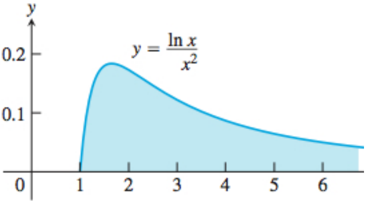
donde:

- el intervalo $[a, b]$ es acotado,
- el integrando f es continuo en $[a, b]$ (y por ende acotado en $[a, b]$).

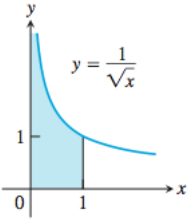
Vamos a considerar integrales en donde al menos una de estas propiedades no se cumple. Es decir, calcularemos integrales donde:

1. El intervalo $[a, b]$ no es acotado (va a ser de la forma: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.)
2. La función f presenta discontinuidades esenciales en el intervalo de integración.

Integrales del primer tipo:



Integrales del segundo tipo:



Integrales impropias

Integrales impropias de tipo I

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotados se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. Entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Sea f una función continua en $(-\infty, b]$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Integrales impropias de tipo I (continuación)

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotado se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

  donde $c \in \mathbb{R}$.

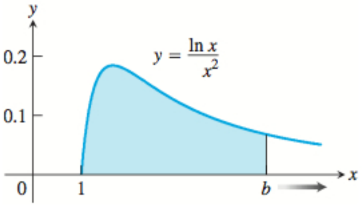
En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia es convergente. Si el límite no existe, entonces decimos que la integral impropia diverge.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.



Ejemplos:

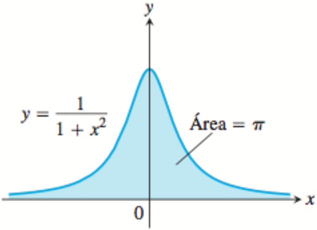
1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Ejemplos:

1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$



Integrales impropias de tipo II

Las siguientes integrales con integrandos que tienen discontinuidades en el intervalo de integración se denominan integrales impropias de tipo II:

- Sea f una función continua en $(a, b]$ y discontinua en $x = a$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

- Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en $x = b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Integrales impropias

Integrales impropias de tipo II (continuación)

- Si $c \in (a, b)$ y f es discontinua en c y continua en $[a, c) \cap (c, b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia converge y que el valor de la integral es el valor del límite. Si el límite no existe, decimos que la integral diverge.

Ejemplo:

- Estudie el comportamiento de:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

- Evalúe (sólo plantear):

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$