# Análisis Matemático I
# Clase 21: Sucesiones. Series numéricas. Serie geométrica. Información del Parcial 2.

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Mayo, 2026

# Sucesiones: motivación

**Entrenamiento de modelos: sucesión de errores (pérdida)** Cuando una red neuronal o un modelo de aprendizaje automático aprende, se ajustan parámetros iterativamente para minimizar un error.
Se obtiene una colección ordenada:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

donde $E_n$ representa el error en la iteración $n$.

# Sucesiones: motivación

**Entrenamiento de modelos: sucesión de errores (pérdida)** Cuando una red neuronal o un modelo de aprendizaje automático aprende, se ajustan parámetros iterativamente para minimizar un error.
Se obtiene una colección ordenada:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

donde $E_n$ representa el error en la iteración $n$.
Se busca que:

$$\lim_{n \to \infty} E_n = 0$$

o al menos muy chico. Los alumnos de Mecatrónica y Licenciatura en Computación, verán en Inteligencia Artificial un método, que utiliza derivadas, para obtener la sucesión de pérdida.

Intuitivamente, una sucesión es una lista *infinita* de números:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Observar que al hacer un listado se está ordenando la colección de números. Cada uno de los números $a_1$, $a_2$, ... representa un término de la sucesión.
Por ejemplo, la lista de números

$$2, 4, 6, ..., 2n, ...$$

es una sucesión. De forma genérica, la sucesión puede representarse por su término $n-$ésimo

$$a_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, para distintos valores de $n$ obtenemos

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2$$

$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 4$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 6.$$

$$\vdots$$

Observar que una sucesión puede verse como una función que a cada número natural $n$ le asigna un número $a_n$.

## Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales. En símbolos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotamos una sucesón por los símbolos

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o también} \qquad a_n.$$

Un ejemplo de sucesión es

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

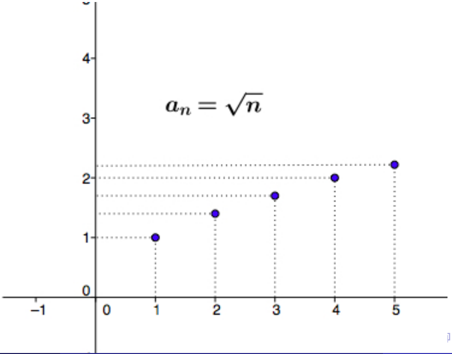
que puede escribirse también en la forma:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}.$$

Dado que las sucesiones son funciones, es posible graficarlas. Sin embargo, a diferencia de las funciones que hemos estudiado, los gráficos de las sucesiones no constituyen curvas sino solamente una colección discreta de puntos. Por ejemplo, para la sucesión

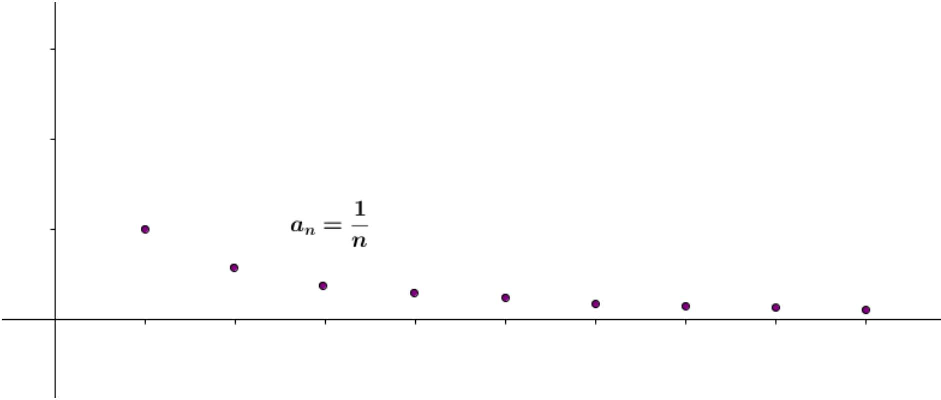
$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

obtenemos el siguiente gráfico

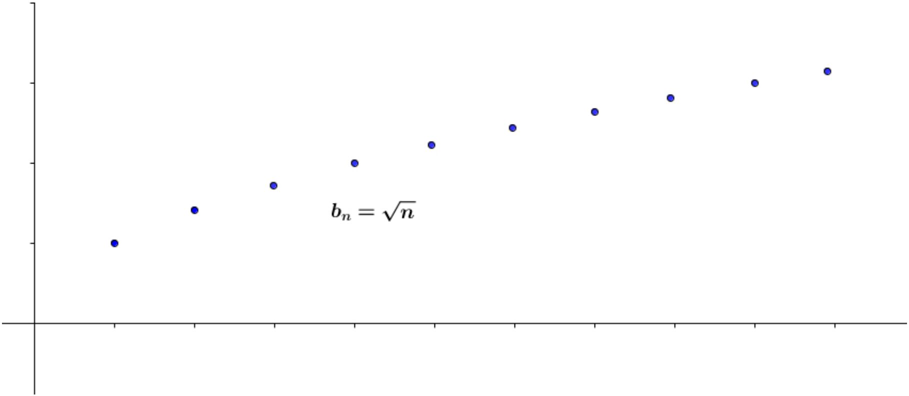


# Convergencia de sucesiones

Consideremos los siguientes gráficos de sucesiones



# Convergencia de sucesiones



# Convergencia de sucesiones

En el primer caso diríamos: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mientras que en el segundo $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Si bien es posible definir el límite de sucesiones formalmente, no lo haremos en este curso. Definiremos a continuación la noción de convergencia de sucesiones.

**Convergencia de sucesiones**

Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

existe y es igual a $L$, entonces decimos que la sucesión $a_n$ converge a $L$. Si el límite no existe, decimos que la sucesión diverge.

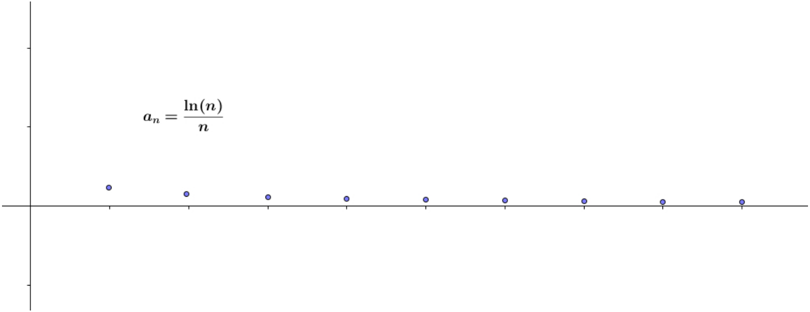
Todas las propiedades de límites de funciones se aplican a los límites de sucesiones (reglas de suma, productos, cocientes, etc).

# Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{ln(n)}{n}.$$

Su gráfico es



# Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

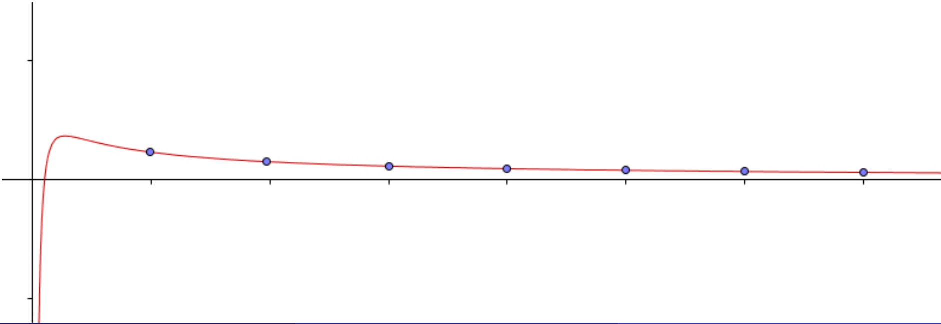
Para estudiar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n},$$

se puede introducir la función

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x}.$$

Observando el gráfico



# Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

podemos concluir que si el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$$

existe, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}.$$

**La ventaja de introducir la función $f$ es que podemos usar regla de L'Hopital.**

De hecho en el ejemplo anteriore tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

y entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0.$$

Ejemplo: calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1}.$$
Para resolver el ejemplo, primero introducimos la función
$$f(x) = \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1}.$$
Cuando $x \to \infty$, el denominador tiende a infinito y estamos en la situación (2) de la regla de L'Hopital. Analizamos si el límite del cociente de las derivadas existe
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + cos(x)}{9x^2 + 2x} = 0.$$
Luego,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1} = 0$$
y entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1} = 0.$$

# Motivación a series numéricas

Muchos datos de IA pueden descomponerse como suma de frecuencias.

La idea central:

> una señal complicada puede expresarse como suma de ondas simples.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Aplicaciones reales:

## Audio y voz

Reconocimiento de voz:

- asistentes virtuales,
- transcripción automática,
- análisis del habla.

# Motivación a series numéricas

Muchos datos de IA pueden descomponerse como suma de frecuencias.

La idea central:

> una señal complicada puede expresarse como suma de ondas simples.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Aplicaciones reales:

### Audio y voz

Reconocimiento de voz:

- asistentes virtuales,
- transcripción automática,
- análisis del habla.

En esta clase, aprenderemos a trabajar con *sumas infinitas*.

# Introducción a Series Numéricas

Comenzamos con una sucesión de números reales

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Deseamos extender el concepto de suma finita de números a **sumas infinitas**.

**Idea y definición de Serie:** Consideramos las siguientes *sumas parciales*

1. $s_1 = a_1$
2. $s_2 = a_1 + a_2$
3. $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
4. $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5. $\vdots$
6. $s_N = a_1 + \cdots + a_N$
7. $\vdots$

Así, hemos construído una nueva sucesión

$$\{s_N\}_{N=1}^{\infty},$$

denominada sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se denomina **serie** y se simboliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si:

$$\lim_{N\to\infty} s_N$$

existe, entonces decimos que la **suma** de $\{a_n\}$ es el valor del límite y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

En este caso, decimos que la serie converge. Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces decimos que la serie diverge.

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Observar que

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

1. $s_1=1-\frac{1}{2}$
2. $s_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$
3. $s_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}$
4. $s_4=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{5}$
5. $\vdots$
6. $s_N=1-\frac{1}{N+1}$
7. $\vdots$

Así

$$\lim_{N\to\infty} s_N = 1$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

converge y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

## Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número $r$ recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

La serie geométrica es muy importante, veremos algunas aplicaciones más adelante en la teoría de aproximación de funciones.

Sea la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

Entonces la suma parcial $n$-ésima es:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $r$ obtenemos:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}.$$

Luego:

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1} = a(1 - r^{n+1}),$$

así, si $r \neq 1$:

$$s_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^{n+1}}{1 - r}.$$

# Serie geométrica: convergencia y divergencia

Si $|r| < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}.$$

Luego, si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie diverge.
Pregunta para el estudiante: ¿Qué sucede cuando $r = 1$ o $r = -1$? Debe convencerse que en esos casos también diverge (excepto cuando $a = 0$).

**Ejemplo:** analizar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

**Ejemplo:** analizar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

**Solución:** observar que la serie es una serie geométrica con $a = 1/3$ y razón

$$r = \frac{1}{5}.$$

Como $|r| < 1$, la serie dada converge y, de hecho, converge a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{12}.$$

# Combinación de series

Volviendo al contexto general de series, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema**

Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ dos series convergentes. Entonces:

- La serie $\sum_n (a_n + b_n)$ converge a $\sum_n a_n + \sum_n b_n$.
- La serie $\sum_n (a_n - b_n)$ converge a $\sum_n a_n - \sum_n b_n$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_n (ka_n)$ converge a $k \sum_n a_n$.

Ejemplo: estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right).$$

# Información del segundo parcial: Lunes 1 de Junio

- En teoría, desde Clase 13 hasta Clase 21 (inclusive) y en la práctica final del TP 3 (antiderivadas), TP 4, TP 5, TP 6 y hasta ejercicio 6 de la Sección 2 del TP 7.
- El turno mañana rendirá de 9 a 10:45 h y el turno tarde de 17 a 18:45 h. Cada comisión rinde en el aula donde cursa habitualmente, excepto los recursantes del turno mañana que rendirán en el aula 17.
- Se podrá usar calculadora. Se pide a los alumnos que ingresen al aula donde rinden y que no esperen al docente para hacerlo.