

Análisis Matemático I

Clase 22: Series numéricas: criterios de convergencia. Repaso para parcial 2.

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2026

Criterios de Convergencia

En muy pocos casos es posible hallar una expresión de las sumas parciales de una serie. En vista de lo estudiado anteriormente, la serie geométrica es uno de esos casos.

Para la gran mayoría de las series, la convergencia se analiza mediante criterios. En este curso veremos los siguientes:

- 1 Criterio del término n -ésimo.
- 2 Criterio de la integral.
- 3 Criterio del cociente.
- 4 Criterio de Leibnitz para series alternantes.

Los criterios nos ayudan a decidir si una serie converge o no, pero no nos dice cuál es el valor de la suma.

Criterio del término n -ésimo

Comenzamos con la siguiente observación: supongamos que la serie

$$\sum_n a_n$$

converge. Entonces se espera que a medida que n aumenta, los términos a_n que se están sumando sean cada vez más chicos (si no, no tendríamos *suma finita*). De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Criterio del término n -ésimo

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverge.}$$

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

Observación: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces no podemos emplear el criterio para decir que la serie dada converge o diverge. es necesario aplicar un criterio diferente.

Criterio de la integral

Sea a_n una sucesión de términos positivos. Supongamos que:

$$a_n = f(n),$$

donde $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva, decreciente y continua para todo $x \geq 1$. Entonces:

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Ejemplo: analizar la convergencia de la serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ejemplo (lo harán en las prácticas): series p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

Criterio de la razón

Cuando los términos de una serie contienen potencias n' -ésimas o factoriales, el siguiente criterio es muy útil.

Criterio de la razón

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide.

Mostrar por qué el criterio no decide en el último caso.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$.

Criterio de Leibniz

Cuando la serie considerada tiene términos que alternan en signos, el siguiente criterio es de gran utilidad.

Criterio de Leibniz

Sea la siguiente serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

Entonces esta serie converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Todos los términos u_n son positivos.
- u_n es una sucesión decreciente.
- $u_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

El criterio de Leibniz también se aplica si la serie está escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

o de forma similar. Lo importante es que al expandir la expresión, los signos de los términos alternen.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

- Resolver:

$$\int_0^{\pi/6} (\sec(x) + \tan(x))^2 dx =$$

- Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2(3x) \cdot \cos(3x) dx =$$

- Encuentre el área entre las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

- Una región en el primer cuadrante está acotada por arriba por $y = \cosh(x)$, por abajo por $y = \sinh(x)$ y por izquierda y derecha por el eje y y la recta $x = 2$, respectivamente. Calcular el volumen que esa región genera al girar alrededor del eje x .
- Obtenga la integral

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx =$$

- Calcular

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} =$$

- Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx =$$

- Calcular

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)x} dx =$$

Analice si las siguientes series convergen. Encuentre el valor de la suma si es posible:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right).$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$