Análisis Matemático I
Clase 23: Series de Taylor. Examen final.

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2026

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).
¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de f aumentando el grado del polinomio de aproximación?

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1.

Series de Taylor

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.

Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$

$$\vdots$$

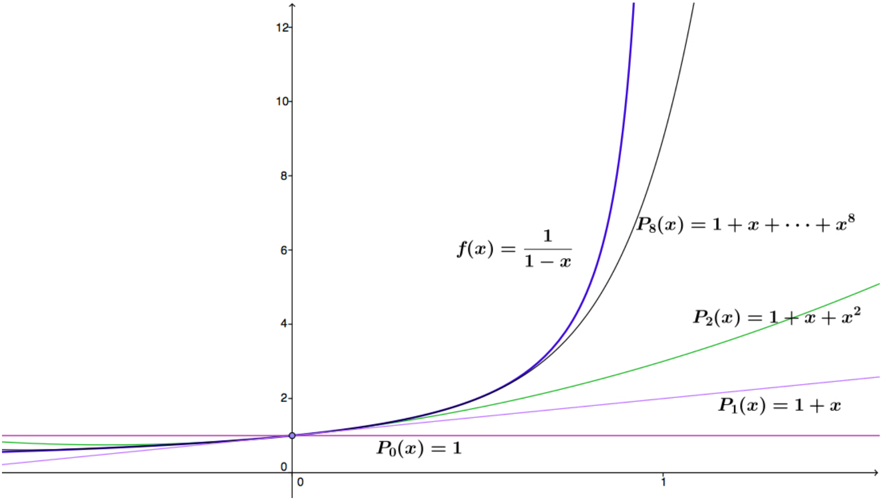
En general, la suma parcial n-ésima será:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \qquad |x| < 1.$$

Así, a medida que n es mayor, el polinomio P_n aproxima mejor a f cerca de $a = 0$.



$P_8(x) = 1 + x + \cdots + x^8$
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
$P_2(x) = 1 + x + x^2$
$P_1(x) = 1 + x$
$P_0(x) = 1$
12
10
8
6
4
2
0
0
1

Series de Taylor

A lo largo de la siguiente clase vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.

Series de Taylor

A lo largo de la siguiente clase vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en a hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de f cerca del punto a.

Series de Taylor

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Series de Taylor

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots , \quad |x-a| < R$$

Entonces necesariamente:

$$a_0 = f(a) = f^{(0)}(a) \qquad (\text{convención } f^{(0)} = f).$$

Si derivamos f:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

y entonces:

$$a_1 = f'(a).$$

Si volvemos a derivar:

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2.a_3(x-a) + \cdots$$

y así

$$f^{(2)}(a) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

La derivada de orden 3 de f es:

$$f^{(3)}(a) = 3.2a_3 + \text{términos que dependen de } (x-a),$$

y:

$$f^{(3)}(a) = 3.2.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

y en general los coeficientes de la serie f en potencias de $(x-a)$ son:

$$f^{(n)}(a) = n!.a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Serie de Taylor generada por una función

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a. Entonces, la serie de Taylor generada por f y centrada en el punto a es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad x \in I.$$

Escribimos:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función f, centrada en a, se llaman polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplo: mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución: vamos a calcular los coeficientes de la serie de Taylor generada por la función exponencial en $a = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Series de Taylor

Para $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ y entonces:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Además, $f'(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$ y entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ para todo } n.$$

Así

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pregunta: ¿podemos asegurar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}? \textbf{ Es decir ¿} \lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x?$$

Sin embargo, observar que si tomamos los primeros polinomios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

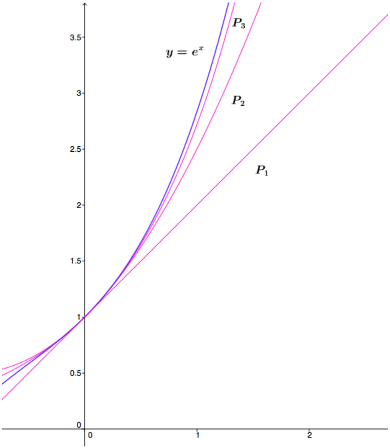
$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

y los graficamos:

Aproximación de $y = e^x$ mediante los polinomios de Taylor



se obtiene que a medida que n aumenta, los polinomios P_n son cada vez más parecidos a e^x, es decir, conjeturamos que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x$ para todo x.

Convergencia de series de Taylor

Teorema de Convergencia de series de Taylor

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo $I = (c, d)$ y $a \in (c, d)$, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n y el término:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

es el residuo de orden n.

Observación: la expresión $f^{(n+1)}(c_n)$ representa la derivada de orden $n+1$ de f evaluada en el punto c_n.

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Recordemos que para obtener:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

las sumas parciales de la serie de Taylor deben converger a $f(x)$. Es decir:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

En vista del teorema anterior, esto sucede si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Convergencia de series de Taylor

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Convergencia de series de Taylor

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplos: para la función exponencial y las funciones seno y coseno, se cumple $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo x. Así:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. (En práctica van a generar las series de seno y coseno).

En Métodos numéricos, realizará el siguiente análisis donde estará usando el teorema de convergencia de series de Taylor:
Considere la función e^x. Entonces, sabemos por ejemplo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

donde

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c_2)}{3!}x^3 = \frac{e^{c_2}}{3!}x^3.$$

Entonces, el residuo se puede controlar por

$$|R_2(x)| \leq M|x|^3,$$

con lo cual se dirá que el residuo R_2 es de orden 3 y podrá hacer la siguiente aproximación:

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

siendo el error de aproximación de orden 3. Por ejemplo, el error entre

$$e^{0.1} \quad y \quad 1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}$$

puede ser controlado **aproximadamente** por 0.1^3. Otras aplicaciones se darán en la práctica.

Examen final

Estructura:

- Alumno regular: rendirá un escrito ejercicios, uno de ellos teórico (una de las demostraciones dadas en clases o definiciones), los otros ejercicios serán del estilo del parcial 1 (límites, continuidad y derivadas), del parcial 2 (aplicaciones de derivadas, integración y funciones trascendentes) y ejercicios de sucesiones y series del estilo del TP7. En base al desempeño en el examen escrito, se verá si continúa al examen oral.
- Alumno libre: rendirá un escrito integrador con todos los temas de la asignatura y, en caso de aprobarlo, pasará a la instancia oral.

-Pueden acceder al examen final los alumnos que queden en condición regular o libre, excepto los que queden en figura abandonó (es decir, aquellos que no asistieron a ninguno de los parciales).
-Los exámenes finales se rinden en días específicos. En la próxima clase se mostrará el calendario.

Examen final

Requisito para rendir examen final (alumnos libres y regulares) de ingeniería y computación 2026: traer resuelto, en forma escrita, uno de los problemas de la **Guía de Situaciones Aplicadas de Análisis Matemático** que está publicada en la plataforma en la sección del mismo nombre.

- **Objetivo de la guía:** mostrar al estudiante algunas de las muy diversas aplicaciones de los conceptos y procedimientos adquiridos en Análisis Matemático. Además, se busca que el estudiante estimule y acreciente su capacidad de abstracción, analice diversos factores y variables en un determinado fenómeno o situación problemática, construya modelos matemáticos sencillos y, finalmente, aplique las técnicas aprendidas en el curso de Análisis para resolver el problema planteado.

Examen final

Metodología: cada alumno eligirá un problema de la guía. Deberá interpretarlo y resolverlo utilizando lo aprendido en Análisis Matemático I. Habrá docentes asignados a cada problema que **suministrarán una guía introductoria para resolver el problema**. El alumno deberá asistir al horario habitual de consulta del docente relacionado al problema.
La exposición de la resolución del problema resuelto podría ser considerada uno de los temas del examen oral, luego de que el alumno apruebe el examen escrito. Pueden trabajar en grupos pero la presentación escrita del problema es individual y obligatoria para comenzar con el examen final. El alumno debe traer impresas las consignas del problema y la resolución puede ser a mano o en algún procesador de texto.

Examen final

-Apuesto a que, a largo plazo, pierdes (Nodaro-Garrido)
-Concentración de desinfectantes (Nodaro)
- Radiación de antena de telefonía celular (Garrido)
- Selección de un sensor para iniciar su compra (Garrido-Matons)
- Flexión de una viga en voladizo (Bertoldi-Ochoa)
- Flujo en un canal abierto (Bertoldi-Fernández Gauna)
- Emplazamiento de un parque eólico (Martínez-Acosta)
-Medición de la velocidad de una pelota de tenis en el saque (Garrido)
- Selección del mejor pozo para extracción de hidrocarburos (Martínez-Acosta)
- Fórmulas para estimar la inflación (Matons-Garrido)
- Accidente en el ensayo de la Fiesta de la Vendimia 2017 (Garrido)
- Orden de complejidad de un algoritmo (Larriqueta-Ochoa)
- Curva de Laffer (Nodaro-Martínez)

Examen final

-Integración numérica (Larriqueta-Ochoa)
-Cuando un martillo y una pluma viajaron a la Luna (Bertoldi)
-Eficiencia de un motor (Bertoldi-Fernández Gauna)
-Ajuste iterativo en un equipo de fabricación aditica (Garrido-Ochoa)
-Tensión nominal del sistema eléctrico doméstico argentino (Garrido-Ochoa)
-Producción de suministros sanitarios en Pandemia (Bertoldi-Garrido-Matons)
-Estudio de carga en circuito RLC (Ochoa)
-Cálculo del tiempo de enfriamiento de un turbogenerador en la Central Hidroeléctrica del Chocón (Fernández-Ochoa)
-Aproximando cambios de funciones potenciales con multiplicaciones simples (Garrido-Ruiz)