

Trabajo Práctico N°1: Funciones vectoriales

Consideraciones Generales: Selección de ejercicios de temas de la Unidad 1, Funciones Vectoriales. Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables” de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con los Jefes de Trabajos Prácticos y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (*), que cada estudiante puede elegir si lo resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

Objetivos: al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de:

- Representar y parametrizar curvas en el plano y en el espacio, determinando analítica y gráficamente su sentido de recorrido, puntos de autointersección y restricciones geométricas.
- Analizar la continuidad y la suavidad de funciones vectoriales, evaluando la existencia de derivadas y su relación con las propiedades geométricas de la curva.
- Modelar la cinemática de una partícula en movimiento, calculando e interpretando geoméricamente los vectores de posición, velocidad, aceleración, rapidez y el vector tangente unitario.
- Resolver problemas que involucren el cálculo de integrales de funciones vectoriales y longitudes de arco, incluyendo la reparametrización de curvas mediante el parámetro de longitud de arco.
- Aplicar el concepto de hélice y funciones componentes a la resolución de problemas prácticos de ingeniería, analizando deformaciones, longitudes y el impacto del cambio de parámetros en el diseño de componentes mecánicos.
- Comunicar con solvencia técnica y lenguaje matemático preciso la resolución de problemas de ingeniería, tanto de forma escrita como oral.

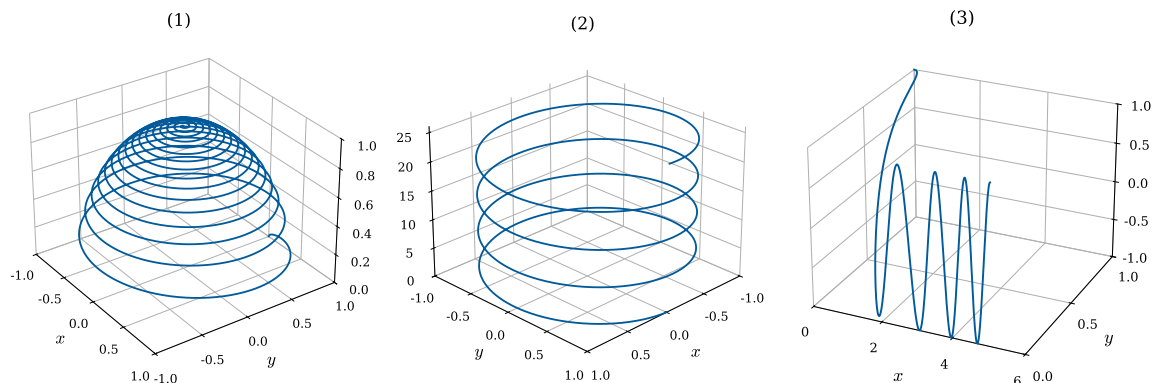
Expresiones de cálculo (las definiciones se han dado en clase de teoría).

$$s = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt \quad \text{Longitud de arco}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{r}'(t) \quad \text{Vector tangente unitario}$$

1. Funciones vectoriales: introducción

1. a) Represente gráficamente la curva que es la imagen de cada una de las siguientes funciones vectoriales, indicando punto inicial y final en cada caso. (En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva.)
 - 1) (o) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1)$, $-2 \leq t \leq 2$.
 - 2) (o) $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $-2 \leq t \leq 2$.
 - 3) (o) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
 - 4) (o) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
 - 5) (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - 6) (o) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$.
 - 7) (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - 8) (o) $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - 9) (o) $\mathbf{r}(t) = (1, t^2, t)$, $0 \leq t \leq 2$.
 - 10) (r) $\mathbf{r}(t) = (\cos(3t) \cos(t), \cos(3t) \sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$. En esta curva analice si se corta a sí misma e indique cuál es una condición para que una función vectorial represente una curva que no se corte a sí misma (es decir, que sea simple).
- b) (r) Indique qué gráfico se corresponde con qué curva: (En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva)



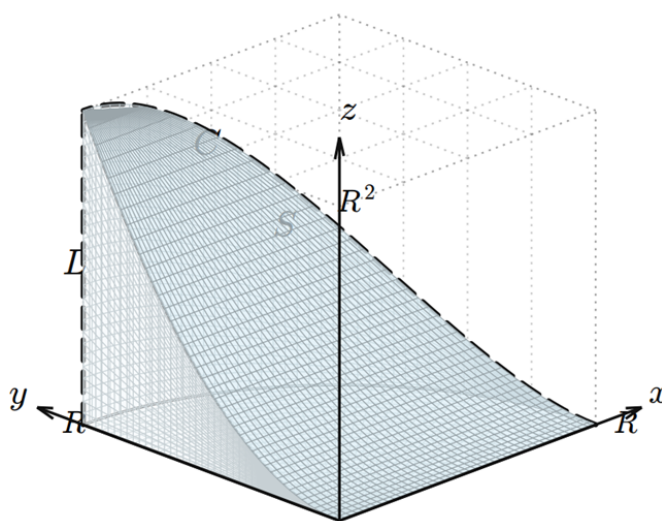
$$\mathbf{r}_1(t) = (\sin t, \cos t, t), t \in [0, 8\pi];$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (\sqrt{t}, e^{-t}, \cos t), t \in [0, 8\pi];$$

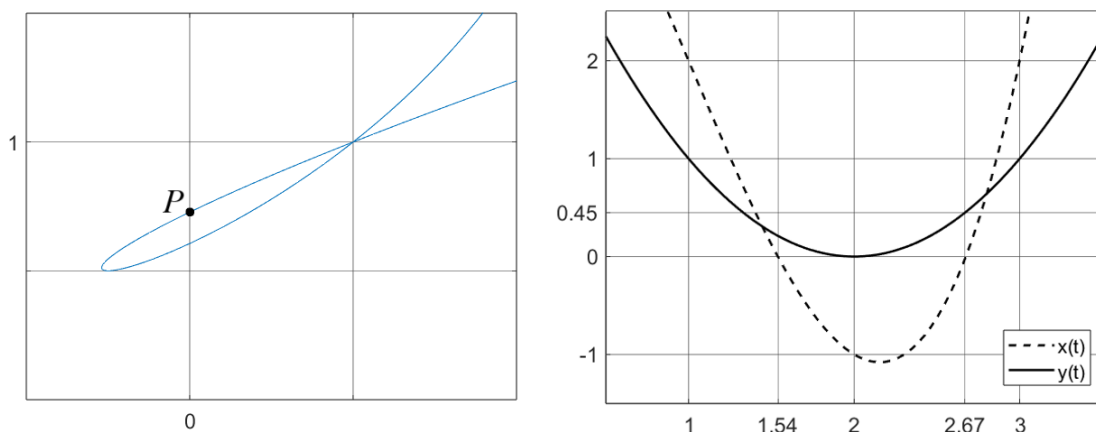
$$\mathbf{r}_3(t) = ((1-t)\sin(100t), (1-t)\cos(100t), \sqrt{1-(1-t)^2}), t \in [0, 1].$$

2. (o) Dé una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

- El segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$, en ese orden, en el plano. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.
- El segmento que une los puntos $(0, 3, 1)$ y $(1, 3, 0)$, en ese orden, en el espacio. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.
- La curva que se encuentra en el espacio, y se puede describir como el lugar geométrico de intersección del cilindro parabólico de ecuación $z = 1 - x^2$ y el plano $y = 5$, entre los puntos $(0, 5, 1)$ y $(1, 5, 0)$, recorridos en ese orden. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.
- Dado $R > 0$, parametrize el arco de circunferencia con centro en $(0, R, 0)$ y radio R , incluido en el plano $y = R$, desde el punto $(R, R, 0)$ hasta el punto $(0, R, R)$, en sentido horario visto desde el punto $(0, 2R, 0)$. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.
- Dado $R > 0$, parametrize el arco C de la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 = R^2$ y $z = y^2$ que va desde $(R, 0, 0)$ hasta $(0, R, R^2)$, como muestra la figura (curva punteada), en sentido antihorario cuando se mira desde el semieje z positivo. Parametrize también la curva L desde $(0, R, 0)$ hasta $(0, R, R^2)$.



3. (o) Una curva plana C se parametriza por una función $\mathbf{r}$ con componentes $x(t)$ e $y(t)$. Se sabe que $y(t)$ es un polinomio de segundo grado. Además, se presenta a continuación un gráfico de C (izquierda) y gráficos de las funciones componentes $x(t)$ e $y(t)$ (derecha). Usted cuenta con la información que estos gráficos brindan.



- Halle las coordenadas del punto de autointersección, es decir, las coordenadas del punto donde la curva se corta a sí misma. Debe dar también los valores correspondientes del parámetro.
- Halle las coordenadas del punto de menor ordenada. Indique el valor correspondiente del parámetro. Marque este punto en el gráfico.
- Halle las coordenadas del punto P que aparece marcado en el gráfico de la izquierda.
- Corrobore la información que ha obtenido antes, sabiendo ahora que $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 3t^2 - t + 5, t^2 - 4t + 4)$.

2. Límite, continuidad y derivada; concepto de curva suave

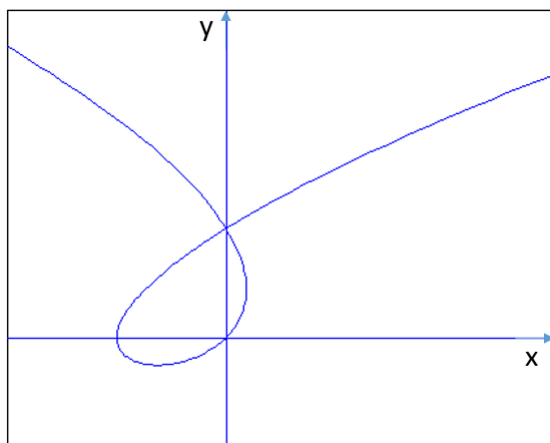
- Para cada una de las funciones del ejercicio 1a,
 - analice la continuidad;
 - calcule la derivada en cada punto e indique si se trata o no de una curva suave;
 - halle la rapidez, velocidad, aceleración, vector tangente unitario y ecuación de la recta tangente en el punto intermedio de cada intervalo.
- Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función con derivadas de todos los órdenes. Si u es una función definida en $\mathbb{R}$ por $u(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, pruebe que $u'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$.
- Pruebe que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable de módulo constante, entonces la derivada $\mathbf{r}'$ es ortogonal a $\mathbf{r}$ en cada punto.
 - Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial diferenciable de t . Pruebe que si $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ para todo t , entonces $|\mathbf{r}|$ es constante.
- En cada uno de los siguientes ejercicios $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t , $t \geq 0$. Halle una ecuación en x e y cuyo gráfico sea la trayectoria de la partícula. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el valor indicado de t .
 - (r) $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}$, $t = 1$.
 - (o) $\mathbf{r}(t) = (e^t, \frac{2}{9}e^{2t})$, $t = \ln 3$.
- (r) La posición de una partícula que se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy viene dada por $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Halle la velocidad y aceleración de la partícula en los instantes $t_1 = \pi/4$ y $t_2 = \pi/2$; represéntelos como vectores sobre la curva.
- La posición de una partícula que se mueve en el espacio viene dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t+1, t^2-1, 2t), t \in \mathbb{R}.$$

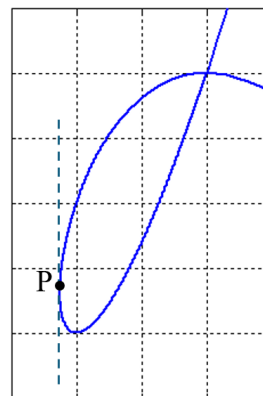
Halle la velocidad y aceleración de la partícula. También halle la rapidez y dirección del movimiento de la partícula en el instante $t = 1$. Escriba la velocidad de la partícula como el producto de la rapidez y la dirección de movimiento.

- Repita el ejercicio anterior para $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t, 4t)$ y $t = \pi/2$.

10. (o) Sea la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t^3 - t^2 - t, t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



- Indique con una flecha sobre el gráfico, cuál es el sentido de recorrido de la curva.
 - Halle analíticamente las coordenadas de los puntos de corte de esta curva con los ejes coordenados.
 - Indique dónde esta curva se corta a sí misma (debe dar los valores del parámetro y las coordenadas del punto de corte).
 - Si $\mathbf{r}$ representa la posición de un móvil en función del parámetro t , exprese cuál es $\mathbf{r}'(t)$. Trace en su gráfico $\mathbf{r}'(1)$.
 - Si $\mathbf{r}$ representa la posición de un móvil en función del parámetro t , exprese cuál es $\mathbf{r}''(t)$. Trace en su gráfico $\mathbf{r}''(1)$.
 - Halle el vector tangente unitario a la curva dada por $\mathbf{r}$ en el punto $\mathbf{r}(0)$. Trácelo en el gráfico.
 - Indique, justificando su respuesta, si se trata o no de una curva suave.
11. (r) Sea la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t^2 - t + 2, t^3 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.^a



- Indique con una flecha sobre el gráfico, cuál es el sentido de recorrido de la curva.
- Indique dónde esta curva se corta a sí misma (debe dar los valores del parámetro y las coordenadas del punto de corte), sabiendo que la abscisa del punto de corte es 4.
- En el punto P marcado, la recta tangente a la curva es vertical. Dé el vector tangente unitario a la curva en P y las coordenadas de P .

^aCon esta curva se trabajará en el Trabajo Práctico 4A.

12. Dé ecuaciones paramétricas para la recta que es tangente a la curva dada en el valor dado del parámetro:

- (o) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, t^2 - \cos t, e^t)$, $t_0 = 0$.
- (r) $\mathbf{r}(t) = (\ln t, \frac{t-1}{t+2}, t \ln t)$, $t_0 = 1$.

13. Considere las siguientes funciones:

- (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \geq 0$;
- (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \geq 0$;
- (r) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(t - \frac{\pi}{2}))$, $t \geq 0$;
- (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\sin t)$, $t \geq 0$;
- (o) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$, $t \geq 0$;

Cada una de las ecuaciones anteriores describe el movimiento de una partícula sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Para cada caso responda las siguientes preguntas:

- ¿Es constante la rapidez de la partícula?
- ¿Es la aceleración de la partícula ortogonal a su velocidad en todos los puntos?
- ¿El movimiento de la partícula es en sentido horario o contrario al movimiento de las agujas del reloj?
- ¿La partícula está inicialmente en el punto $(1, 0)$?

14. (o) Una partícula se mueve a lo largo de la rama superior de la parábola $y^2 = 2x$, de izquierda a derecha, con una rapidez constante de 5 unidades por segundo. Halle la velocidad de la partícula al pasar por el punto $(2, 2)$.

3. Integrales de funciones vectoriales

15. (o) Calcule:

$$a) \int (\cos t, 1, -2t) dt \quad b) \int_0^\pi (\cos t, 1, -2t) dt \quad c) \int_0^1 (t^3, 7, t+1) dt, \quad d) \int_0^1 (te^{t^2}, e^{-t}, 1) dt.$$

16. (o) Suponga que se desconoce la trayectoria de un planeador pero se conoce su aceleración: $\mathbf{a}(t) = -3 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$. Se sabe que inicialmente (en $t = 0$) el planeador partió del punto $(3, 0, 0)$ con velocidad $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$. Determine la posición del planeador como función de t .

17. (*)

- a) Mediante funciones vectoriales escriba fórmulas que describan el movimiento de un proyectil, para el caso en que no hay rozamiento. Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- b) Un proyectil es disparado desde el origen de coordenadas sobre suelo horizontal con una rapidez inicial de $500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y un ángulo de lanzamiento de 60° . ¿Cuál será la ubicación del proyectil 10s más tarde?

18. (r) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ sujeta a la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, para $\mathbf{r}$ como función vectorial de t .

19. (*) Pruebe que si $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \mathbf{C} \times \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{C} \times \int_a^b \mathbf{r}(t) dt.$$

4. Longitud de arco en el plano y en el espacio

20. (o) Un planeador se eleva a lo largo de la hélice de ecuación $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del planeador, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$?

21. (o) Consideremos la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

y llamemos $t_0 = 0$.

- a) Encuentre el parámetro de la longitud de arco $s(t)$ a lo largo de la hélice desde t_0 hasta t .
- b) En la ecuación obtenida despeje t en función de s .
- c) Sustituya este valor $t(s)$ en la ecuación (1) para obtener la parametrización por longitud de arco para la hélice.
- d) ¿Cuáles son los puntos $\mathbf{r}(t(0))$, $\mathbf{r}(t(\sqrt{2}\pi))$, $\mathbf{r}(t(-1))$?

22. (r) Obtenga el vector tangente unitario a la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, t^2)$, que representa la trayectoria de cierto planeador.

23. (o) En cada ejercicio obtenga el vector tangente unitario a la curva. También calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

$$a) \mathbf{r}(t) = (2 \cos t) \mathbf{i} + (2 \sin t) \mathbf{j} + \sqrt{5} t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$b) \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{2}{3} t^{3/2} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

24. (r) Obtenga el punto en la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (5 \sin t) \mathbf{i} + (5 \cos t) \mathbf{j} + 12t \mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, que se encuentra a una distancia, a lo largo de la curva, de 26π unidades desde el punto $(0, 5, 0)$ y en la dirección en la que crece la longitud de arco.

25. (r) Obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

desde el punto donde $t = 0$, calculando la integral

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau.$$

Luego, calcule la longitud de la parte de la curva para la cual $0 \leq t \leq \pi/2$.

5. Aplicación

26. (*) Para construir un tornillo sin fin como los de la imagen (usados para mover engranajes de una máquina o para arrastrar material),



se puede pensar en una helicoides, que es una superficie (del tipo de las que estudiaremos en la unidad 4), constituida por la unión de hélices cilíndricas (como las presentadas en los ejercicios 20 y 21), como se ve en la imagen de la izquierda, a continuación:



Para construir este tipo de piezas, puede por ejemplo, utilizarse prensas o unirse porciones de material. En las imágenes de la derecha, se corta una corona circular y se la **moldea**, usando una prensa, para obtener la forma deseada. Acá entran en juego características del material, que permite hacer esto sin romperse o deformarse de maneras no deseadas.¹

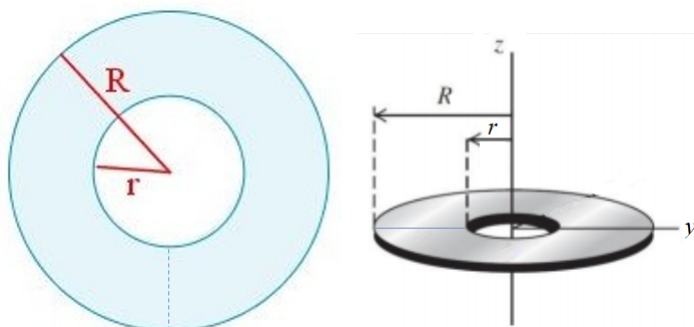
La siguiente ecuación corresponde a una hélice, definida para valores de t en un intervalo $[a, b]$:

$$\mathbf{r}_0(t) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t), \alpha t), \quad a \leq t \leq b,$$

donde $\rho > 0$ y elegimos $\alpha > 0$. Trabajaremos en el intervalo $[a, b] = [0, 2\pi]$.

- Realice un esbozo de la hélice.
- ¿Qué representa el número ρ ?
- ¿Cuál es la influencia de α ? Es decir, ¿qué cambia si α es pequeño o si es grande?

Se tiene una corona circular, como la de la imagen a continuación, que será cortada por la línea punteada para darle forma usando una prensa (como vimos en imágenes anteriores).



¹En la práctica suele cortarse una corona circular con radios exterior e interior apropiados, mayores que los R y r nominales, de acuerdo a una fórmula determinada.

- d)* Para cada una de las circunferencias (la interior, de radio r , y la exterior, de radio R), calcule el perímetro.
- e)* Calcule la longitud de la hélice exterior que se obtiene al separar las partes de la corona circular a ambos lados de la línea punteada, una distancia $\beta > 0$ (suponiendo que solo varían las cotas de los puntos de las curvas).
- f)* Calcule cuánto debe estirarse el material (compare las longitudes de la circunferencia de radio R y de la hélice correspondiente).