UNIDAD 6: Series de Fourier

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

Recorrido SERIES DE FOURIER

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Familias ortogonales de funciones

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Se dice que f y g son ortogonales en $[a, b]$ si

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Definición

Una familia de funciones es ortogonal en $[a, b]$ si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en $[a, b]$.

Familias ortogonales de funciones

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Se dice que f y g son ortogonales en $[a, b]$ si

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Definición

Una familia de funciones es ortogonal en $[a, b]$ si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en $[a, b]$.

Ejemplo

Las familias $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ y
$\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ son ortogonales en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\, dx$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\, dx$$

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} dx =$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\, dx$$

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} dx =$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\, dx$$

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{p}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\Big|_0^{2p} = 0.$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

Si $m \neq n$:

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{p}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\Big|_0^{2p} = 0.$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ n \neq m.$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \text{sen}\,\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ n \neq m.$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \text{sen}\,\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p} \cos\frac{m\pi x}{p}\, dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\, dx,\ n \neq m.$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$. Cada una de las funciones $\cos\frac{n\pi x}{p}$ es periódica, con periodo fundamental $\frac{2p}{n}$; lo mismo ocurre con $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Familias ortogonales completas

Definición

Una familia ortogonal de funciones en $[a, b]$ es completa si la única función definida en $[a, b]$ que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0.

Familias ortogonales completas

Definición

Una familia ortogonal de funciones en $[a, b]$ es completa si la única función definida en $[a, b]$ que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0.

Ejemplo:
La familia $\{\cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 0, 1, 2, 3, ...\} = \{1, \cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, 3, ...\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ pero no es completa.

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Series trigonométricas de Fourier. Motivación

Dada la familia ortogonal de funciones en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$)

$$\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p};\ n = 1, 2, 3, \cdots\right\},$$

se busca coeficientes c_0, a_n y b_n, $n = 1, 2, ...$ tales que

$$f(x) = c_0 \cdot 1 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && + && a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && + && b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
\int_{-p}^{p} f(x)dx = \quad & \int_{-p}^{p} c_0 dx && + && \int_{-p}^{p} a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} dx && + \int_{-p}^{p} a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
& && + && \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx && + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
= \quad & \int_{-p}^{p} c_0 dx && + && 0 + 0 + \cdots \\
= \quad & 2pc_0
\end{aligned}
$$

$$
c_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x)dx
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\cos\tfrac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\cos\tfrac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-p}^{p} f(x)\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx = \int_{-p}^{p} c_0\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1\cos\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx + \\
&\quad + \int_{-p}^{p} a_2\cos\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx + \\
&\quad + \int_{-p}^{p} b_2\operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\cos\tfrac{1\pi x}{p}dx + \cdots \\
&= 0 + \int_{-p}^{p} a_1\cos^2\tfrac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pa_1
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$f(x) = c_0 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

$$f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} = c_0 \cos\frac{1\pi x}{p} + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx = \int_{-p}^{p} c_0 \cos\frac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx +$$
$$+ \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx +$$
$$+ \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots$$
$$= 0 + \int_{-p}^{p} a_1 \cos^2\frac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pa_1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx; \qquad c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \to c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx = \int_{-p}^{p} c_0 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx + \\
&\quad + \int_{-p}^{p} a_2 \cos\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx + \\
&\quad + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\tfrac{1\pi x}{p}dx + \cdots \\
&= 0 + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}^2\tfrac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pb_1
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$f(x) = c_0 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

$$f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} = c_0 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + \cdots + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + \cdots$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx = \int_{-p}^{p} c_0 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx +$$
$$+ \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx +$$
$$+ \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots$$
$$= 0 + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}^2\frac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pb_1 \rightarrow b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Serie de Fourier generada por f

Observación: lo mismo se hace en $[0, 2p]$: dada f definida en $[0, 2p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Convergencia de series de Fourier

En el intervalo [-p,p]:

Si f y f' son continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto) en $[-p, p]$, entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

Convergencia de series de Fourier

En el intervalo [-p,p]:

Si f y f' son continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto) en $[-p, p]$, entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

Observación: si x es un punto de continuidad de f, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en ese punto.

Observación: si las condiciones de la hipótesis se cumplen, la serie de Fourier converge para todo número real, incluidos los x que no pertenecen al intervalo $[-p, p]$.

Teorema (de Dirichlet para la convergencia de series de Fourier)

Sean f y f' continuas por partes en $[-p, p]$, y sea $\tilde{f}$ la extensión $2p$-periódica de f. Entonces la serie de Fourier de f converge para todo $x \in \mathbb{R}$ al valor:

$$\frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$$

En particular:

- *Si $x \in (-p, p)$, la serie converge a $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*
- *En los extremos $x = \pm p$, la serie converge a $\frac{f(-p+)+f(p-)}{2}$.*

Convergencia de series de Fourier

Teorema (de Dirichlet para la convergencia de series de Fourier)

Sean f y f' continuas por partes en $[-p, p]$, y sea $\tilde{f}$ la extensión $2p$-periódica de f. Entonces la serie de Fourier de f converge para todo $x \in \mathbb{R}$ al valor:

$$\frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$$

En particular:

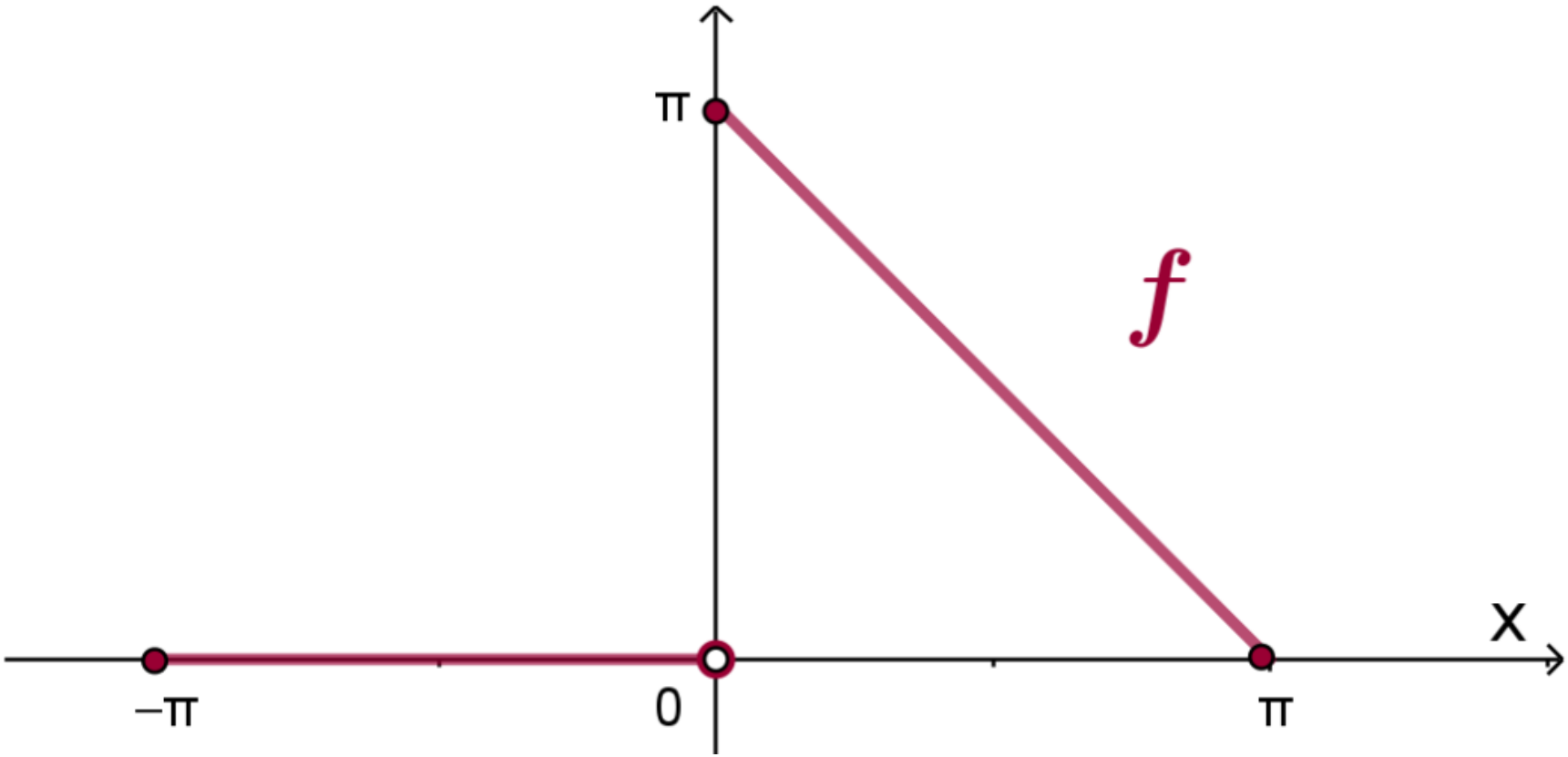
- *Si $x \in (-p, p)$, la serie converge a $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*
- *En los extremos $x = \pm p$, la serie converge a $\frac{f(-p+)+f(p-)}{2}$.*

Observación

Si f es continua en $x \in (-p, p)$, la serie de Fourier converge directamente a $f(x)$.

Ejemplo 1

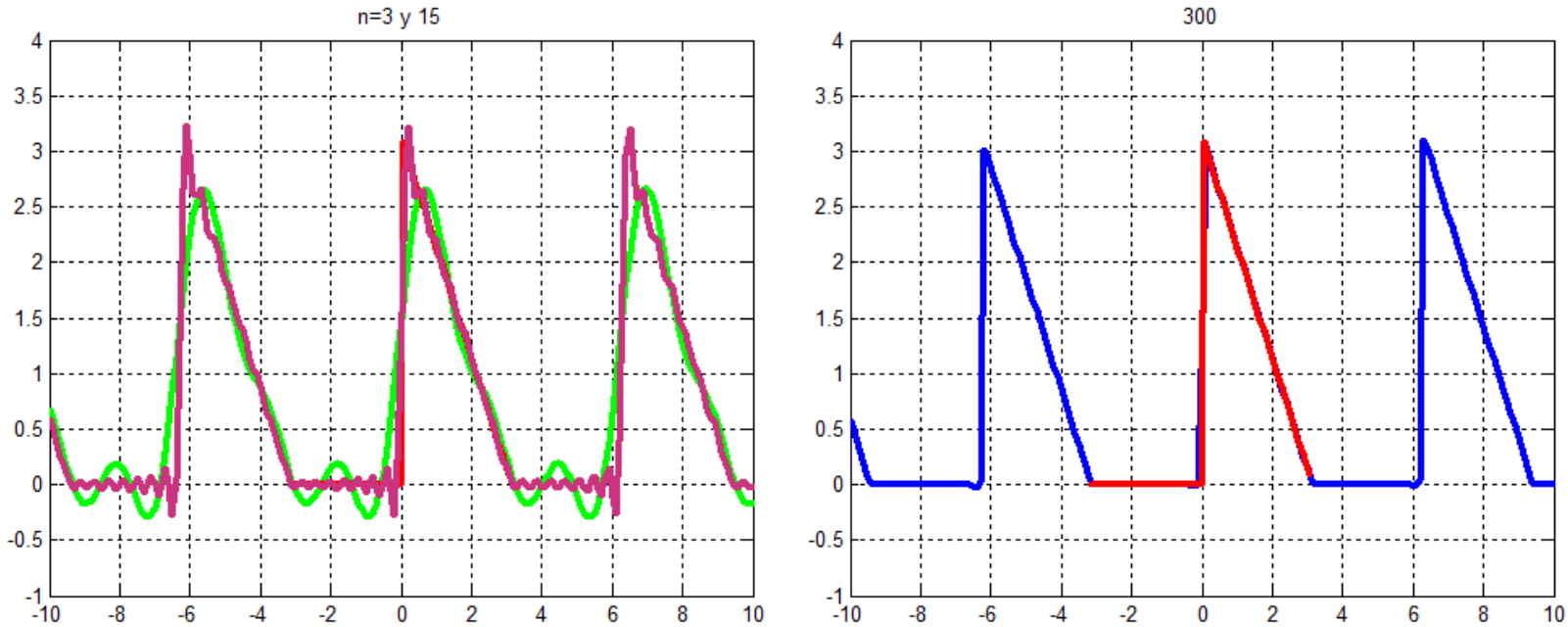
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$



Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

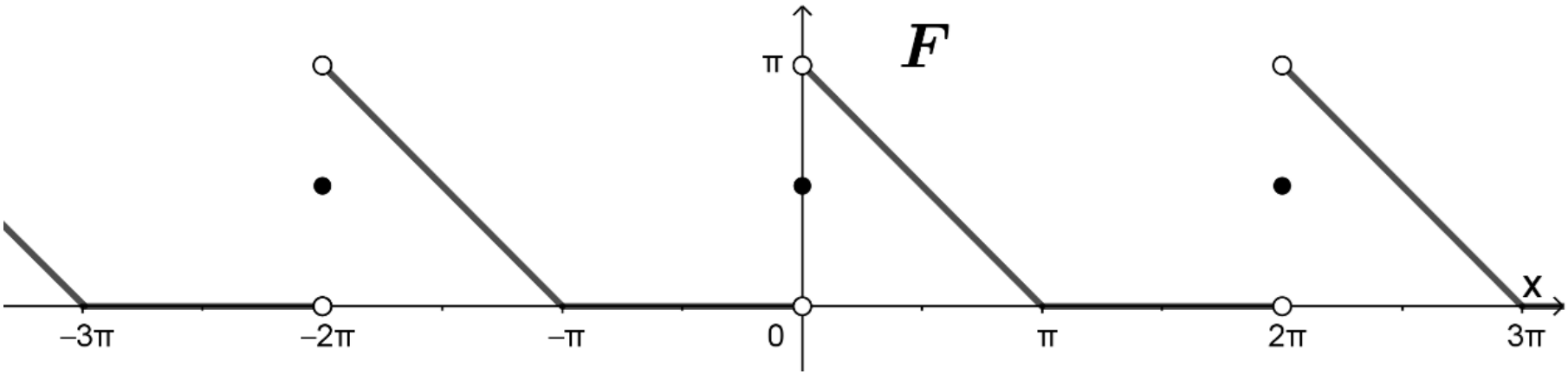


Gráficos de sumas parciales.

Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) = F(x)$$



- F está definida en $\mathbb{R}$.
- $F(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi, 0)$ y todo $x \in (0, \pi)$, ya que f es continua en esos puntos.
- $F(0) = \pi/2 = \dfrac{f(0+) + f(0-)}{2} = F(-2\pi) = F(2\pi)$.

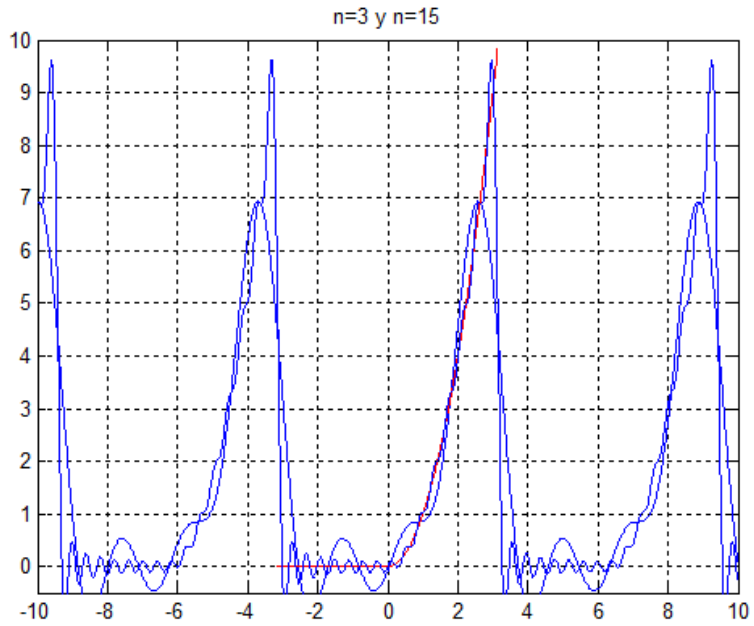
Ejemplo 2

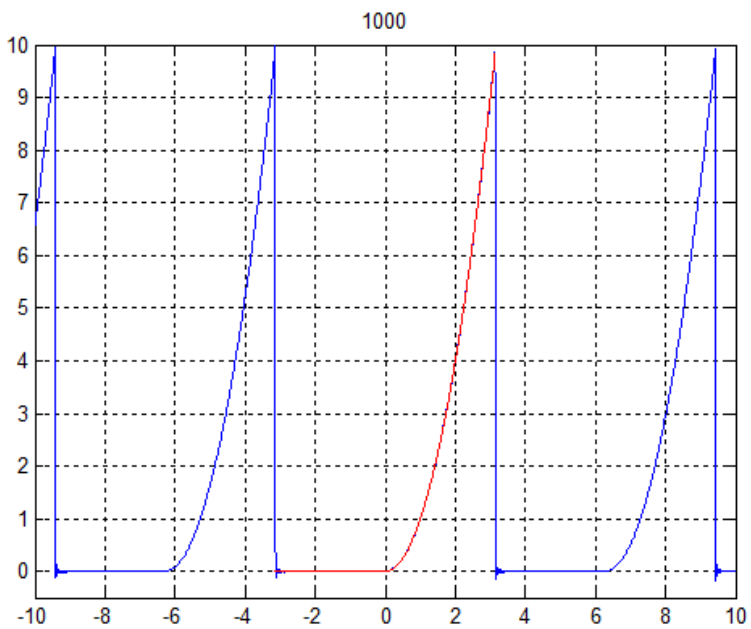
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \right)$$





Gráficos de sumas parciales.

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \right)$$

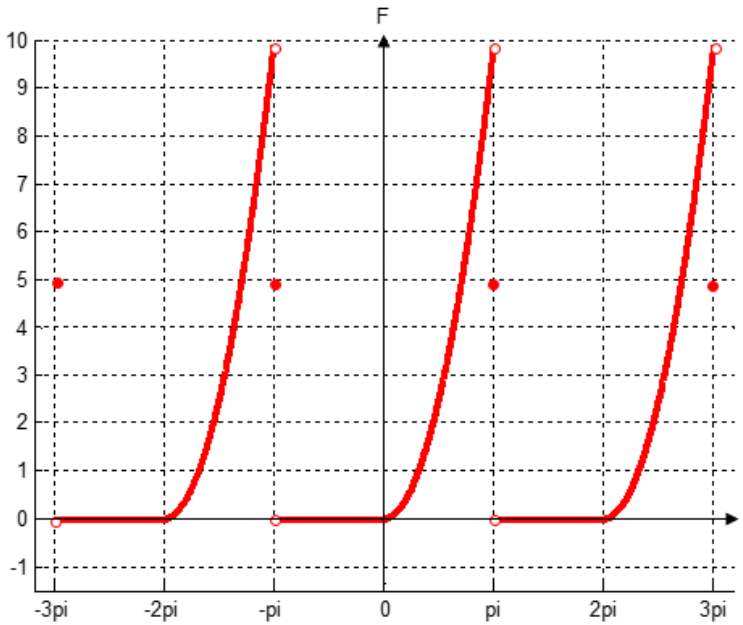


Gráfico de la función F dada por la serie de Fourier generada por f.

Ejercicios del TP6

1. Encuentre la serie (trigonométrica) de Fourier de f en el intervalo dado:

$d)$ (o) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$

$g)$ (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad -\pi < x < \pi.$

$h)$ (o) $f(x) = 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

$i)$ (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

7. (r) Halle la serie de Fourier generada por la función f definida en $[0, 2]$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

11. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

$a)$ (o) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ x + 1, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Funciones pares e impares

Teorema

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son ambas pares o ambas impares,* $f \cdot g$ *es par.*

Funciones pares e impares

Teorema

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son ambas pares o ambas impares,* $f \cdot g$ *es par.*
2. *Si* f *es par y* g *es impar,* $f \cdot g$ *es impar.*

Funciones pares e impares

Teorema

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son ambas pares o ambas impares,* $f \cdot g$ *es par.*
2. *Si* f *es par y* g *es impar,* $f \cdot g$ *es impar.*
3. *Si* f *es par,* $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$.

Funciones pares e impares

Teorema

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son ambas pares o ambas impares,* $f \cdot g$ *es par.*
2. *Si* f *es par y* g *es impar,* $f \cdot g$ *es impar.*
3. *Si* f *es par,* $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$.
4. *Si* f *es impar,* $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$.

Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos se llama periodo fundamental.

Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos se llama periodo fundamental.

Ejemplo

- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene periodos 2π, 4π, 6π,...; su periodo fundamental es 2π.
- $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ tiene periodos π, 2π, 3π,... y su periodo fundamental es π.
- Cada término de la serie

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

tiene periodo 2π. Luego la serie tiene periodo 2π.

Serie de Fourier generada por una función par

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

1) Si f es par,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier generada por una función impar

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

2) Si f es impar,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Extensiones par e impar de una función definida en un semiintervalo

Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, que sea par o impar (esta última, si $f(0) = 0$):
Extensión par:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Extensión impar (asumimos $f(0) = 0$):

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Serie de cosenos de Fourier

La **serie de cosenos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión par de** f.

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f:

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f: $\quad (L = p)$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x)dx;$$

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f: $(L = p)$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f: $(L = p)$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f: $\quad (L = p)$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Serie de senos de Fourier

La **serie de senos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión impar de** f.

Serie de senos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión impar es:

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de senos de Fourier de f:

Serie de senos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión impar es:

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de senos de Fourier de f: $\quad (L = p)$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Recorrido

1. Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
   - Funciones pares e impares: propiedades
   - Funciones periódicas
   - Serie de Fourier para una función par
   - Serie de Fourier para una función impar
   - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida un en semiintervalo

Serie de Fourier de una función definida en semiintervalo

Si se desarrolla la función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ en serie de Fourier, igualando $[0, L] = [0, 2p]$ y $L = 2p$, se obtienen los coeficientes de Fourier

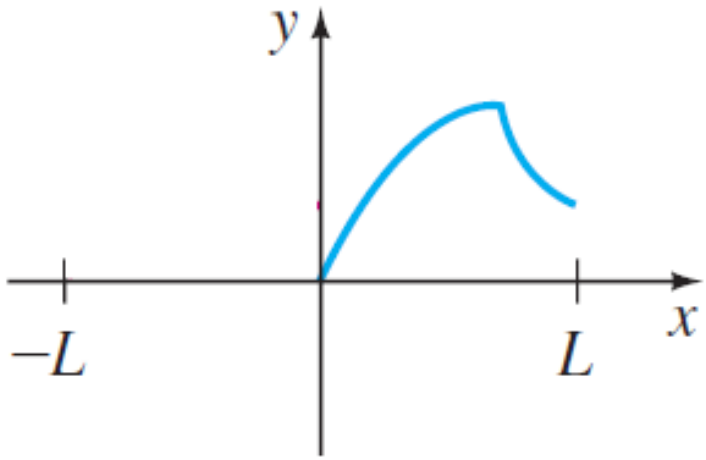
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

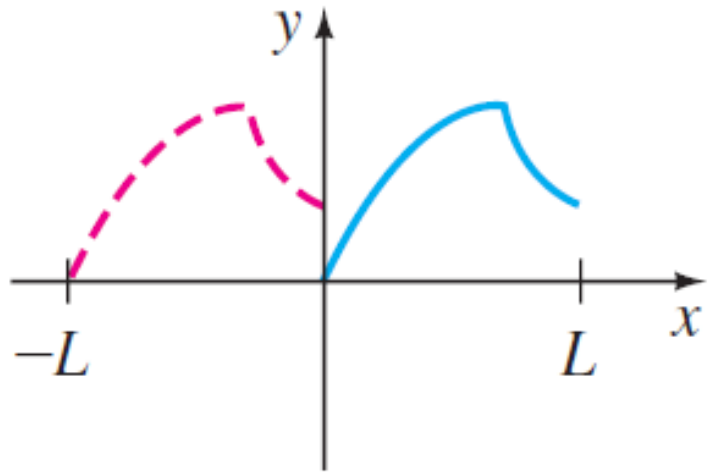
$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

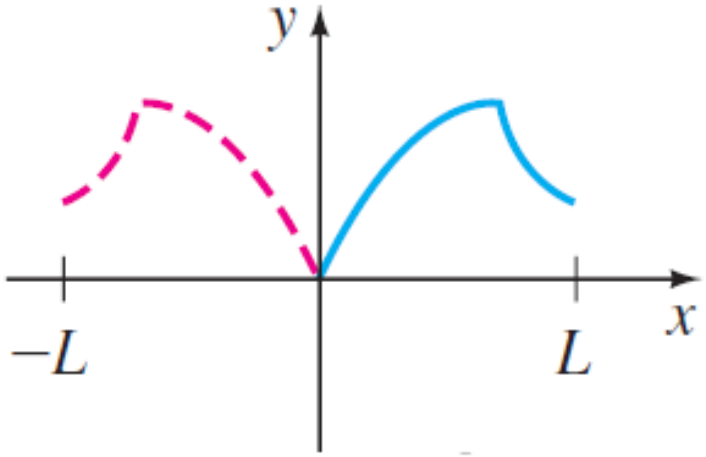
Ilustraciones de extensiones de funciones



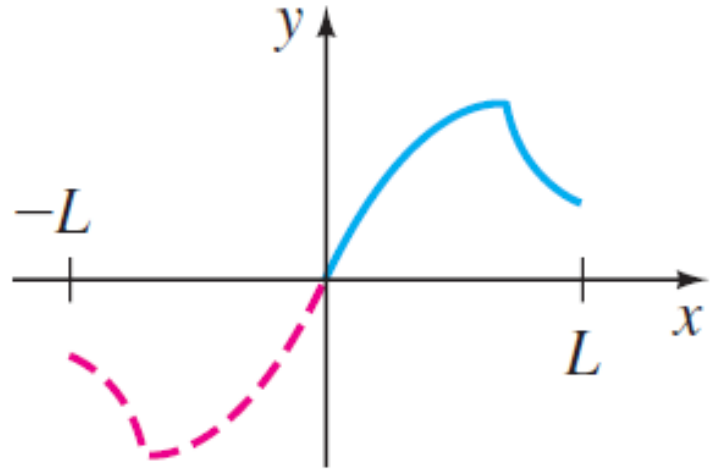
$f : [0, L] \to \mathbb{R}$



Extensión periódica

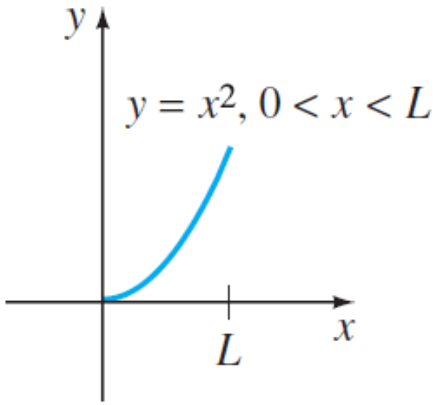


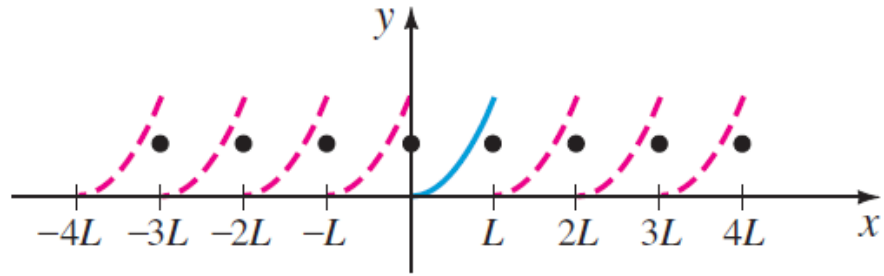
Extensión par



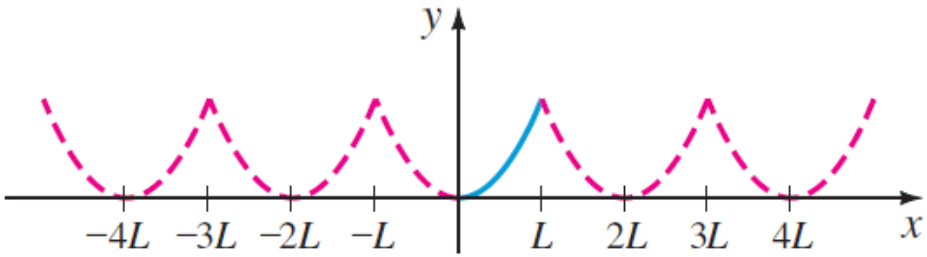
Extensión impar

Ilustraciones de tipos de series

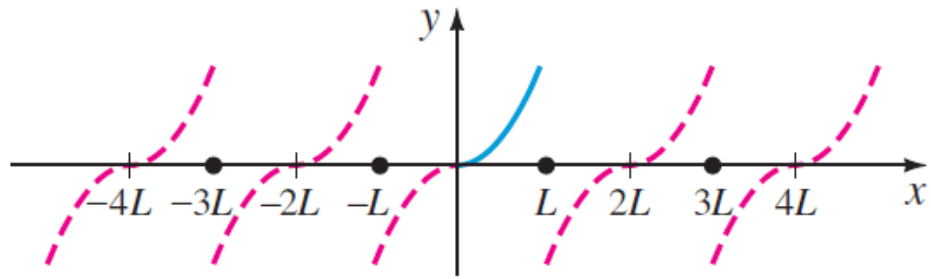




Serie de Fourier



Serie del coseno



Serie del seno

Ejercicios del TP 6

10. Sin calcular ningún coeficiente, en los siguientes ejercicios grafique en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ las series de Fourier, de senos y de cosenos generadas por las funciones dadas. En caso de presentarse una discontinuidad, marque claramente el valor de la serie en ese punto.

    $b)$ (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

    $e)$ (r) $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$.

Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.
Los coeficientes de Fourier de f son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, ...$
Halle la serie de Fourier generada por f, F, e indique cuánto valen $F(0)$ y $F(-1)$.

Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.
Los coeficientes de Fourier de f son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, ...$
Halle la serie de Fourier generada por f, F, e indique cuánto valen $F(0)$ y $F(-1)$.

$$F(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x).$$

$$F(0) = 1,5; \quad F(-1) = 1,5.$$

Ejercicios del TP 6

12. Desarrolle la función dada en tres series: una de Fourier, una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

    $a)$ (o) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

13. (r) Sea F la serie de senos de Fourier generada por $f(x) = x + 1$, con $0 < x < p$.

    $a)$ Represente gráficamente la función F en $[-2p, 2p]$.

    $b)$ Indique cuánto valen $F(-p)$, $F(\frac{3}{2}p)$ y $F(100p)$.

    $c)$ Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de f.

14. (o) Dada la función f por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ \\ x^2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

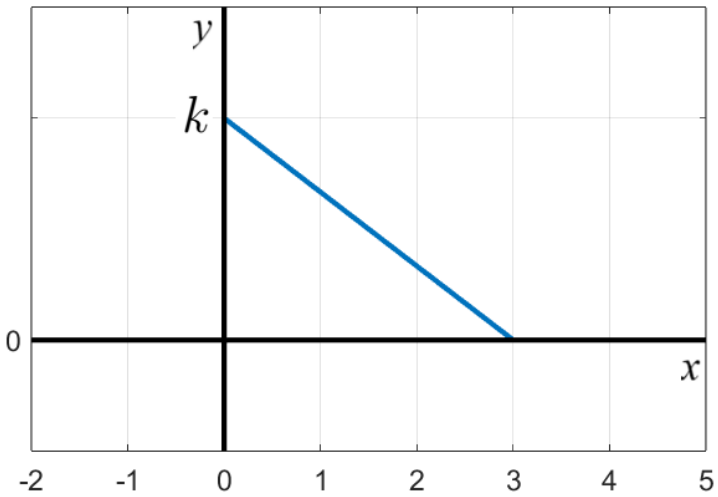
a) Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por f.

b) Si F es una serie de senos de Fourier generada por f, indique cuánto valen:

$$F(2), \qquad F(-1), \qquad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

Ejercicios del TP6

19. (o) Sea f la función definida en el intervalo $(0, 3)$ cuyo gráfico se presenta a continuación. Cabe destacar que k es un número positivo.



a) Sabiendo que los coeficientes a_n correspondientes a la serie de Fourier generada por f son todos ellos nulos, para $n = 1, 2, ...$, halle los restantes coeficientes y escriba la serie de Fourier generada por f.

b) Considerando las series de Fourier, la serie de senos y la serie de cosenos generadas por f, indique cuánto vale cada una de estas tres series en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 100$.

Ejercicios del TP6

20. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 < x < 1, \\ 2x, & si \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

a) (r) Escriba la serie de **cosenos** de Fourier generada por f.

b) (o) Complete el siguiente cuadro:

	$F(62)$	$F(79)$
Serie de cosenos generada por f		
Serie de senos generada por f		
Serie de Fourier generada por f		