ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 2026

Trabajo Práctico N°6: Series de Fourier

Consideraciones Generales: Selección de ejercicios de temas de la Unidad 5, Ecuaciones diferenciales ordinarias. Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelaje de Dennis Zill, novena edición, Ed. CENGAGE Learning.
Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con los Jefes de Trabajos Prácticos y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (*), que cada estudiante puede elegir si lo resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

Objetivos: al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de:

- Calcular los coeficientes de Fourier y construir el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier para funciones definidas por partes o continuas en intervalos simétricos y no simétricos.
- Evaluar la convergencia de las series de Fourier en puntos de continuidad y discontinuidad mediante el Teorema de Convergencia de Series de Fourier, determinando con precisión el valor numérico hacia el cual converge la serie en cualquier punto del dominio real.
- Clasificar funciones en pares, impares o sin simetría, aplicando analíticamente sus propiedades algebraicas e integrales para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier.
- Construir y graficar extensiones pares e impares (series de cosenos y de senos de Fourier, respectivamente) de funciones definidas en un semiintervalo, así como extensiones periódicas (series de Fourier) identificando el comportamiento de las ondas generadas y sus simetrías en periodos extendidos.
- Predecir y evaluar el valor de convergencia de una serie de Fourier (trigonométrica, de senos o de cosenos) en cualquier valor arbitrario del dominio real, aplicando las condiciones de convergencia de Dirichlet en combinación con las propiedades de paridad, extensión y periodicidad de las funciones generadoras.
- Emplear series de Fourier evaluadas en puntos específicos para demostrar la convergencia y calcular la suma exacta de series numéricas notables.
- Comunicar con solvencia técnica y lenguaje matemático preciso la resolución de problemas de ingeniería, tanto de forma escrita (LaTeX) como oral.

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-p,\, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{p}) \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx,\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{p})dx,\ n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, L)$, $L = 2p$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi x}{L}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2n\pi x}{L}) \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos(\frac{2n\pi x}{L})dx,\ b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}(\frac{2n\pi x}{L})dx,\ n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de cosenos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{p})$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx,\ n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de senos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, p)$.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{p})$$
$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(\frac{n\pi x}{p})dx,\ n = 1, 2, ...$$

1. Series de Fourier

1. Encuentre la serie (trigonométrica) de Fourier de f en el intervalo dado:

   a) (r) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \le x < 1. \end{cases}$

   b) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

   c) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{si} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

   d) (o) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$

   e) (r) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$

   f) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

   g) (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad -\pi < x < \pi.$

   h) (o) $f(x) = 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

   i) (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

2. (r) Ulilizando la serie del ejercicio 1*c* que, por ejemplo, se puede expresar como

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \frac{(2-n^2\pi^2)(-1)^n - 2}{n^3\pi}\operatorname{sen}(nx)\right),$$

   demuestre que:

   a) $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ...$

   b) $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + ...$

3. (*)

   a) Utilice las formas exponenciales complejas del seno y del coseno,

$$\cos\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

   para demostrar que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$$

   se puede expresar en la forma compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

   donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

   b) Demuestre que c_0, c_n y c_{-n} del inciso anterior se pueden escribir como

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}dx, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

4. (r) Utilice los resultados del problema 3 para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

5. (r) Considere la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Represente gráficamente a esta función y halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función. Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

6. (r) Si $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$,

   a) plantee fórmulas para los coeficientes de la serie de Fourier generada por f.

   b) Si F es la función definida por la serie de Fourier generada por f, indique cuánto vale $F(L)$.

7. (r) Halle la serie de Fourier generada por la función f definida en $[0, 2]$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

2. Series de Fourier de cosenos y de senos

8. (r) Determine si la función dada es par, impar o ninguna:

   a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x + 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = \text{sen}(3x)$

   c) $f(x) = x^2 + x$

   d) $f(x) = e^{|x|}$

   e) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

9. (r) Pruebe las siguientes propiedades de funciones pares o impares (suponga f definida en un intervalo simétrico $[-a, a]$).

   a) El producto de dos funciones pares es par.

   b) El producto de dos funciones impares es par.

   c) El producto de una función impar y una función par es impar.

   d) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

   e) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. Sin calcular ningún coeficiente, en los siguientes ejercicios grafique en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ las series de Fourier, de senos y de cosenos generadas por las funciones dadas. En caso de presentarse una discontinuidad, marque claramente el valor de la serie en ese punto.

   a) (r) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \pi$.

   b) (o) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

   c) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi$.

   d) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

   e) (r) $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$.

11. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

   a) (o) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ x + 1, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

   b) (r) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

   c) (r) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ 1 - x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$

d) (r) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{si} \quad -2\pi < x < -\pi, \\ x, & \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi, \\ \pi, & \text{si} \quad \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$

12. Desarrolle la función dada en tres series: una de Fourier, una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

a) (o) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

b) (r) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$

c) (r) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \pi.$

d) (r) $f(x) = x^2$, $(0, 2\pi)$.

e) (r) $f(x) = x + 1$, $(0, 1)$.

13. (r) Sea F la serie de senos de Fourier generada por $f(x) = x + 1$, con $0 < x < p$.

a) Represente gráficamente la función F en $[-2p, 2p]$.

b) Indique cuánto valen $F(-p)$, $F(\frac{3}{2}p)$ y $F(100p)$.

c) Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de f.

14. (o) Dada la función f por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

a) Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por f.

b) Si F es una serie de senos de Fourier generada por f, indique cuánto valen:

$$F(2), \qquad F(-1), \qquad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

15. (r) Considere la función f dada por $f(x) = x$, $0 < x < \pi$.

a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

16. (r) Considere la función f dada por $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

17. (r) Dada la función $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$, y conociendo las antiderivadas en (1)-(4) (no necesita calcularlas):

a) Exprese la serie de Fourier generada por f.

b) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 2\pi$.

c) (agregado al TP en 2022) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 200\pi$ y en $x = 111\pi$.

$$\int e^x \cos(2nx)\,dx = \frac{e^x}{4n^2+1}(2n\,\mathrm{sen}(2nx) + \cos(2nx)) \tag{1}$$

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(2nx)\,dx = \frac{e^x}{4n^2+1}(\mathrm{sen}(2nx) - 2n\cos(2nx)) \tag{2}$$

$$\int e^x \cos(nx)\,dx = \frac{e^x}{n^2+1}(n\,\mathrm{sen}(nx) + \cos(nx)) \tag{3}$$

$$\int e^x \,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{e^x}{n^2+1}(\mathrm{sen}(nx) - n\cos(nx)) \tag{4}$$

18. (r) Supongamos que f es una función continua en el intervalo $(0, L)$, $L > 0$. Consideremos la extensión impar de f y llamemos F a la serie trigonométrica de Fourier generada por dicha extensión.

    a) Para cualquier función f continua definida en $(0, L)$, plantee fórmulas para hallar los coeficientes a_0, a_n y b_n que corresponden a la serie de Fourier F buscada.

    b) Para el caso especial en que f está dada por

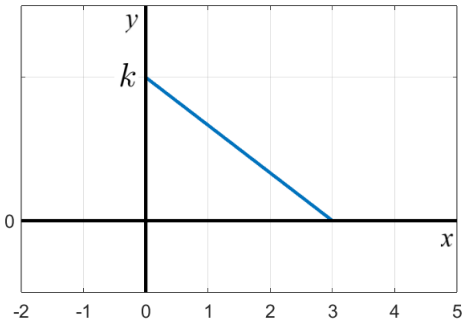
    $$f(x) = x^2 - 1,\ 0 < x < L,$$

    indique cuáles son los siguientes valores: $F(0)$, $F(-L)$ y $F(\frac{3}{2}L)$.

    c) Enuncie el teorema de convergencia de series de Fourier.

3. Ejercicios integradores

19. (o) Sea f la función definida en el intervalo $(0, 3)$ cuyo gráfico se presenta a continuación. Cabe destacar que k es un número positivo.



    a) Sabiendo que los coeficientes a_n correspondientes a la serie de Fourier generada por f son todos ellos nulos, para $n = 1, 2, ...$, halle los restantes coeficientes y escriba la serie de Fourier generada por f.

    b) Considerando las series de Fourier, la serie de senos y la serie de cosenos generadas por f, indique cuánto vale cada una de estas tres series en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 100$.

20. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 < x < 1, \\ 2x, & si \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

    a) (r) Escriba la serie de **cosenos** de Fourier generada por f.

    b) (o) Complete el siguiente cuadro:

	$F(62)$	$F(79)$
Serie de cosenos generada por f		
Serie de senos generada por f		
Serie de Fourier generada por f		

21. (r) Sea la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

    Se sabe que

$$\int_1^2 1\,dx = 1, \qquad \int_1^2 \cos(n\pi x)dx = 0, \qquad \int_1^2 \mathrm{sen}(n\pi x)dx = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi},$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \int_1^2 \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

a) Escriba la serie de Fourier, la serie de cosenos y la serie de senos generadas por f. Para justificar su respuesta, plantee las fórmulas para hallar los coeficientes necesarios; no hace falta que calcule las integrales si aparecen en la lista de más arriba.

b) Dé los valores de cada una de estas tres series evaluadas en -2.

c) Indique, para cada una de las funciones definidas por las series anteriores, si se trata de una función continua en $x = 4$ o no, justificando su respuesta.

22. (r) Considere la función dada por $f(x) = 10x - x^2$ en el intervalo $[0, 10]$.

a) Plantee el desarrollo en serie de senos de Fourier de f. Para ello especifique (sin necesidad de resolver) claramente las integrales necesarias, y luego exprese la serie pedida.

b) Indique, justificando su respuesta, si la serie obtenida es o no convergente al valor de la función f en $x \in [0, 10]$. En caso de no ser convergente en algunos valores x, debe indicar claramente a qué valor converge la serie obtenida, si es que lo hace.

c) Represente gráficamente en el intervalo $[-\mathbf{10}, \mathbf{10}]$ la función obtenida (serie de Fourier).

23. (r) Sea f la función definida en $(0, 2k)$ por $f(x) = k$, si $0 < x < k$ y $f(x) = 2k - x$, si $k \leq x < 2k$. Sabiendo que:

$$(1)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)dx = \frac{3k}{2};$$

$$(2)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right);$$

$$(3)\frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx = \frac{4k}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{n\pi};$$

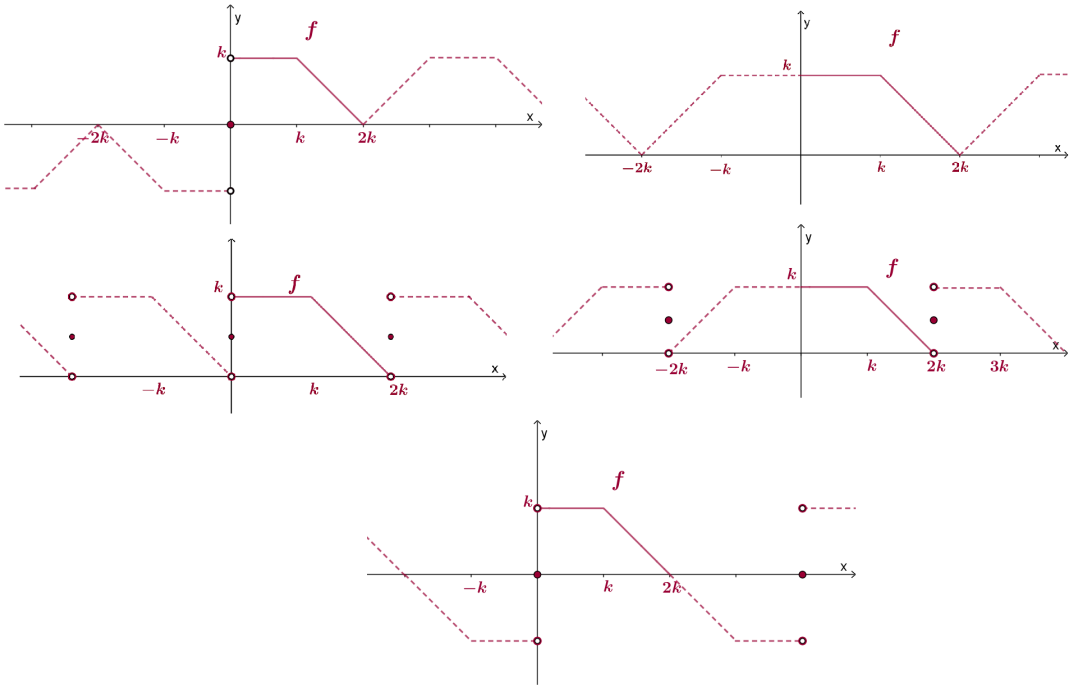
$$(4)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx = \frac{k}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right));\ (5)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx = \frac{k}{n\pi}$$

a) (10 puntos) Exprese la serie de cosenos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

b) (10 puntos) Exprese la serie de senos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

c) (10 puntos) Exprese la serie de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

d) (15 puntos) Indique si alguno de los siguientes gráficos corresponde a la serie de cosenos de Fourier generada por f, si alguno corresponde a la serie de senos de Fourier generada por f y si alguno corresponde a la serie de Fourier generada por f. Justifique.



4. Apéndice: fórmulas trigonométricas útiles

Identidad trigonométrica	Fórmulas derivadas
Identidad Pitagórica (1) $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$	$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$ $\tan^2 + 1 = \sec^2(x)$
Funciones trignométricas de la suma o resta de ángulos $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$ **si** $x = y$**:** $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$ $-\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ **si** $x = y$**:** (2) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ Combinando (1) y (2): $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$ $1 - \cos(2x) = 2\operatorname{sen}^2(x)$