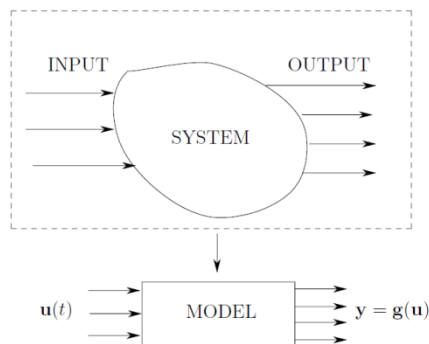
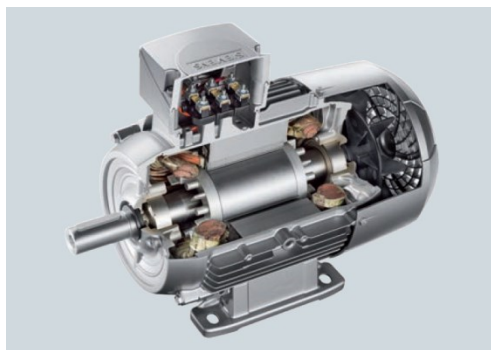
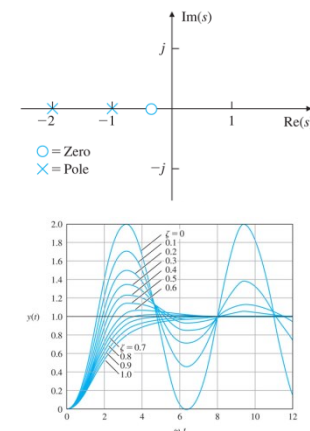
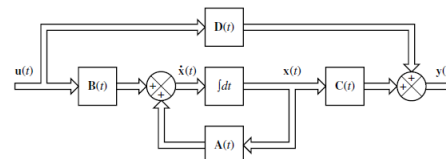


Unidad 2:

Modelado y Análisis en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan General:

1. Accionamientos: Conversión de energía y Control

- Aplicaciones y Fundamentos. Conversión de energía eléctrica y eléctrica-mecánica.

2. Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado

- Modelos lineales. Respuesta dinámica. Estabilidad. Controlabilidad y Observabilidad.

3. Control de SD en Espacio de Estado

- Retroalimentación de Estado. Observadores. Control óptimo.

4. Control de Accionamientos de CC

- Modelado, simulación. Control de velocidad / posición, control de corriente / torque.

5. Control de Accionamientos de CA

- Modelado, simulación. Control de velocidad / posición, control escalar / vectorial de corriente / torque.

Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 2:

A. Sistemas Dinámicos Físicos continuos (SD). Variables de Estado

- Concepto. Entradas y salidas. Sistemas SISO vs. MIMO (MV). Estado interno. Orden de Sistema.
- Representación en Espacio de Estados (SS). Ecuación de Estado, diagrama de bloques de estado.

B. Modelos Lineales Invariantes (LTI). Aplicación. Interconexión

- Propiedades. Función de transferencia. Sistemas eléctricos y mecánicos de 1° y 2° orden.
- Modelos para sistemas interconectados: serie, paralelo, retroalimentación de salida / estado.

C. Respuesta Dinámica. Estabilidad. Discretización. Linealización.

- Respuesta natural y forzada. Discretización. Simulación numérica. Análisis de Estabilidad en SS.
- Sistemas Lineales vs. NO Lineales. Linealización Jacobiana, modelos LPV.

D. Realizaciones Canónicas. Controlabilidad y Observabilidad

- Transformación de cambio de base en SS. Formas o Realizaciones diagonal, controlable, observable.
- Controlabilidad y Observabilidad. Criterios: Gilbert, Kalman. Subsistemas Controlable y Observable.
- Resumen y Consultas.
- Próximos Pasos...

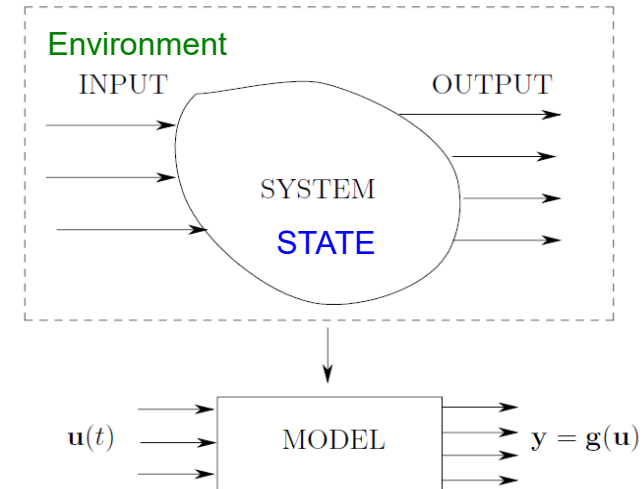
Sistemas y Modelos: Concepto

SISTEMA: Conjunto de **Elementos interrelacionados**, considerado como **un todo** en contexto definido, y **separado** de su **Entorno o Ambiente**.

SYSTEM: set of **interrelated elements** considered **as a whole** in a defined context and **separated** from their **environment**.

- A system is generally defined with the view of **achieving a given objective**, for example by **performing a definite function**.
- Elements of a system may be natural or man-made material objects, as well as modes of thinking and the results thereof (for example forms of organization, mathematical methods, programming languages).
- The system is considered to be **separated** from the **environment** and the other external systems **by an imaginary surface**, through which pass the links (i.e. signals or variables) between them and the considered system.
- The term "system" should be qualified when it is not clear from the context to what it refers, for example: **control system**, calorimetric system, system of units, transmission system.

MODEL: mathematical or physical **representation** of a **System** or a process, based with **sufficient precision** upon **known laws**, **identification** or specified suppositions.



Fuente: IEC 60050 **Electropedia: The World's Online Electrotechnical Vocabulary**, Area **351: CONTROL TECHNOLOGY**
 → <https://www.electropedia.org/iev/iev.nsf/display?openform&ievref=351-42-08> (System) /
 → <https://www.electropedia.org/iev/iev.nsf/display?openform&ievref=351-42-26> (Model)

SISTEMA DINAMICO FÍSICO Continuo (SD):

- Elementos **físicos** (naturales o contruidos) que **almacenan** e intercambian **ENERGÍA**.
- Variables involucradas: entradas, salidas, estado son **CONTINUAS** (Reales), en **t (Tiempo)**.

MODELO Dinámico: Representación (matemática) **Aproximada** del SD que permite **analizar y simular** las propiedades de interés del **comportamiento** del SD en su **evolución temporal**.

Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Roller Coaster (Montaña Rusa): Video 47 s $\rightarrow$ <https://x.com/i/status/1823583789651574892>

Sistema Dinámico Físico $\Leftrightarrow$ ENERGÍA E [J] en juego;
Estado evoluciona en el **TIEMPO t [s]**, NO instantáneo.

1) **Almacenamiento** interno de Energía $\rightarrow$ **Estado** interno:

Energía **Cinética** de carro (*movimiento*): $E_k(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\vec{v}(t)|^2$

Energía **Potencial gravitatoria** de carro: $E_g(t) = (m \cdot |\vec{g}|) \cdot h(t)$

Energía **Potencial elástica** de estructura: $E_p(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |\vec{\Delta r}(t)|^2$

2) **Intercambio** de Energía $\rightarrow$ **Interacción** y **Evolución** en t :

Interno: reversible entre Almacenamientos (Conservativo).

Externo: con Control o Entorno (No conservativo):

- **Control o Actuación**: **aporte** de Energía externa $\rightarrow$ Sistema.
- **Fricción**: **disipación** irreversible, Energía (Calor) $\rightarrow$ Entorno.

1) y 2) **NO Instantáneos $\rightarrow$ Dinámica o Retardos** (Transitorios).



¿Qué es la ENERGÍA? (Física: **Energía**, **Tiempo**, **Reloj**)

Charla Prof. César Gómez, Instituto de Física Teórica IFT UAM-CSIC (España)

Video 1h20min $\rightarrow$ https://www.youtube.com/watch?v=96XkoB4v_dE (Nov. 2017)

- Concepto de ENERGÍA, desde diversas aproximaciones conceptuales.
- La Energía encierra la clave de los grandes misterios de la Física actual.



Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Sistema **Dinámico** Físico continuo: **Energía $E[J]$** en juego Modelo físico idealizado

- **Almacenamiento interno:** (reversible)

- Energía **Cinética** (en masa o inercia): $E_k(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [v(t)]^2$
- Energía **Potencial elástica** (en resorte): $E_p(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [Y_0 - y(t)]^2$
- Energía **Potencial gravitatoria** (en masa): $E_g(t) = P \cdot (Y_0 - y(t))$
debido a fuerza externa de atracc. gravitatoria: peso $P = m \cdot g$ (perturb. const.)

- **Intercambio de energía:**

- Interno: entre componentes o subsistemas (**reversible**).
- Externo: con medioambiente
 - Excitación: trabajo externo sobre sistema (**control** vs. perturbación)
 - Fricción: disipación (**irreversible**) de energía (Calor) al ambiente

→ Reacción o Rta. NO Instantánea: Retardos o Transitorios
(“constantes de tiempo”) hasta Nuevo equilibrio = **Dinámica**

(depende de **Estructura de Interconexión + Leyes Constitutivas + Parámetros**)

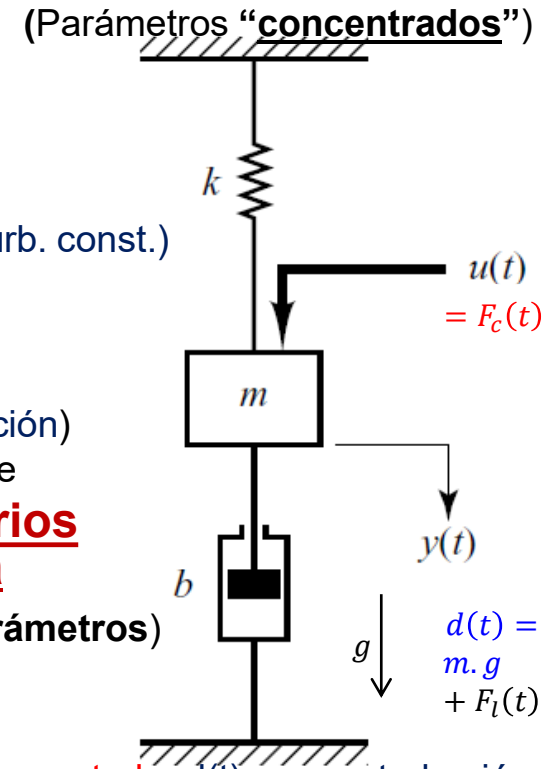
- Definimos: (Sist. **SISO** vs. **MIMO**)

- **Entrada** (excitación): Fuerzas externas $u(t)$ var. manipulada o acción control + $d(t)$ var. perturbación;
- **Salida** (respuesta medida): Desplazamiento de masa $y(t)$ (respecto a equilibrio $Y_0=0$ sin energía)

- Equilibrio:

$u(t)=u_e=0$ (excitación nula); $v(t)=dy/dt=v_e=0$ (energía cinética nula);

$y(t)=Y_0=0$ (energía potencial elástica nula=equilibrio NO cargado) vs $y(t)=y_e=m \cdot g/k$ (equilibrio Cargado)



Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Modelo físico idealizado

- Ecuación de Movimiento en DT: 2° Ley de Newton (cuerpo “libre”)

$$a(t) = \frac{\sum F(t)}{m} \quad \therefore$$

$$m \cdot a(t) = -b \cdot v(t) - k \cdot y(t) + u(t) + m \cdot g$$

$$v(t) \equiv \dot{y}(t); \quad a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{y}(t)$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = u(t) + m \cdot g$$

Sist. 2° orden LTI (E.D.O. Lineal de parám. const. 2° orden, forzada=no homog.)

- Función de Transferencia: Modelo externo DF (Entrada/Salida)

(Condiciones Iniciales nulas)

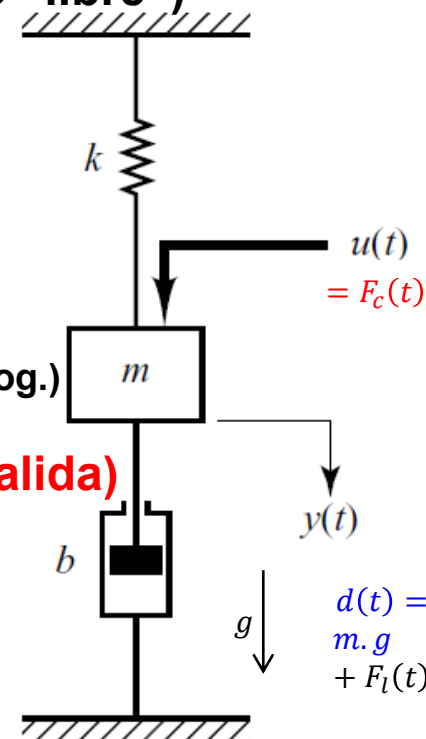
$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

- Propiedades dinámicas:

Ganancia estática: $G(0) = \frac{1}{k}$

Polos: $p_1, p_2 = -\frac{b}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

→ **Respuesta Dinámica:** oscilatoria ($b=0$), o subamortiguada, amortiguam. crítico, sobreamortiguada ($b>0$).



Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Modelo físico idealizado

- Ecuación de Movimiento en DT: 2° Ley de Newton (cuerpo “libre”)

$$a(t) = \frac{\sum F(t)}{m} \quad \therefore$$

$$m \cdot a(t) = -b \cdot v(t) - k \cdot y(t) + u(t) + m \cdot g$$

$$v(t) \equiv \dot{y}(t); \quad a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{y}(t)$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = u(t) + m \cdot g$$

- Modelo de Estado: **Modelo interno DT (Espacio de Estado)**

(Condiciones Iniciales **NO** nulas en general = **ESTADO INICIAL** en $t=t_0$)

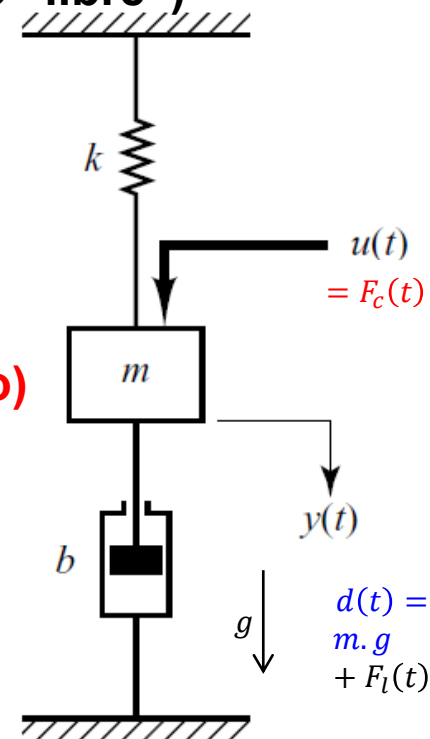
– Estado: $x_1(t) \equiv y(t); \quad x_2(t) \equiv v(t) = \dot{y}(t) \rightarrow$

– Ecuación de Estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m \cdot \dot{x}_2(t) = -k \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t) + u(t) + m \cdot g \end{cases}$$

– Estado Inicial: $x_1(t_0) \equiv x_{10}; \quad x_2(t_0) \equiv x_{20}$ (resume historia anterior)

– Ecuación de Salida: $y(t) = x_1(t)$



Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Modelo físico idealizado

- Modelo de Estado: Modelo interno DT (Espacio de Estado)**

(Condiciones Iniciales **NO nulas** en general = **ESTADO INICIAL** en $t=t_0$)

- **Estado:** $x_1(t) \equiv y(t)$; $x_2(t) \equiv v(t) = \dot{y}(t) \rightarrow$

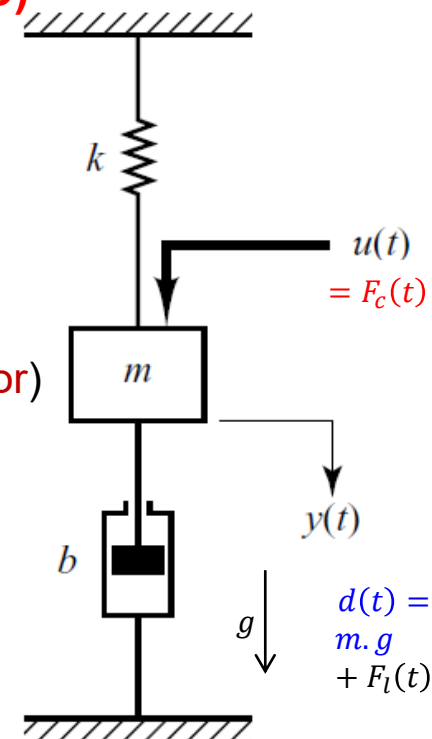
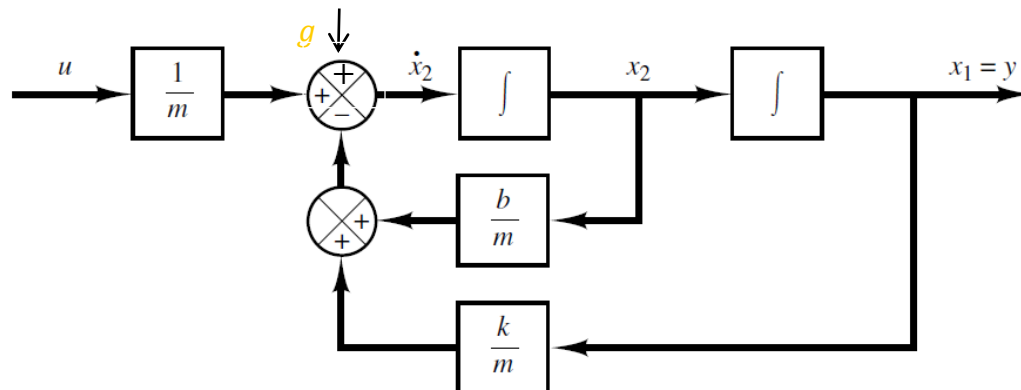
- **Ecuación de Estado:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m \cdot \dot{x}_2(t) = -k \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t) + u(t) + m \cdot g \end{cases}$$

- **Estado Inicial:** $x_1(t_0) \equiv x_{10}$; $x_2(t_0) \equiv x_{20}$ (resume **historia anterior**)

- **Ecuación de Salida:** $y(t) = x_1(t)$

Diagrama de Bloques de Estado



Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Modelo físico idealizado

- Modelo de Estado: Modelo interno DT (Espacio de Estado)**

(Condiciones Iniciales **NO nulas** en general = **ESTADO INICIAL** en $t=t_0$)

- **Estado:** $x_1(t) \equiv y(t)$; $x_2(t) \equiv v(t) = \dot{y}(t) \rightarrow$

- **Ecuación de Estado:**

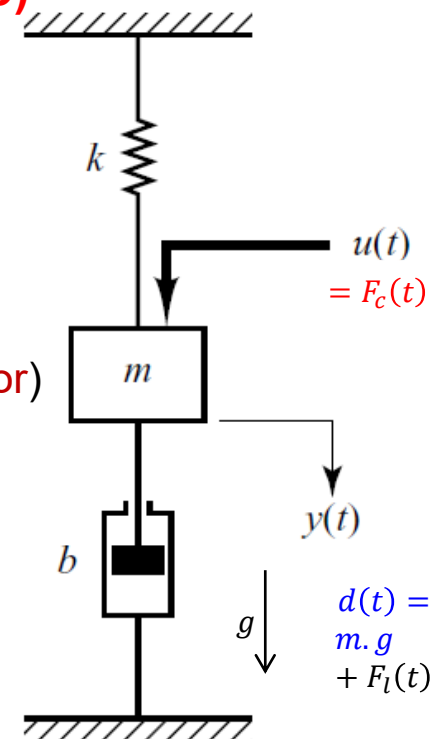
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m \cdot \dot{x}_2(t) = -k \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t) + u(t) + m \cdot g \end{cases}$$

- **Estado Inicial:** $x_1(t_0) \equiv x_{10}$; $x_2(t_0) \equiv x_{20}$ (resume **historia anterior**)

- **Ecuación de Salida:** $y(t) = x_1(t)$

- Forma MATRICIAL:**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot g; & \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$



Autovalores $\lambda_{1,2}$ de matriz de Sistema A: $\det(\lambda \cdot I - A) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = ?$ (hacer)

Representación de Sistemas Lineales IT

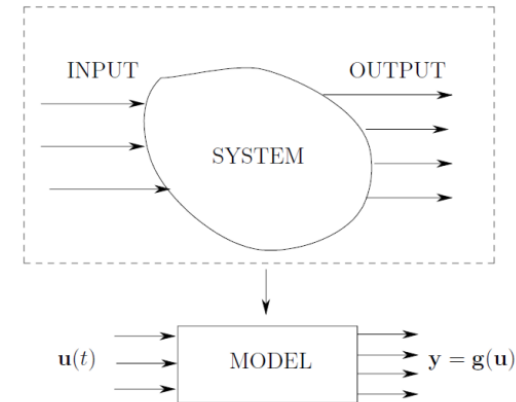
a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$



Concepto de ESTADO: → Espacio Vectorial de Estado

Estado de un Sistema Dinámico (SD):

Menor conjunto de variables $\{x_i(t)\}$ (“**variables de estado**”) que representan el **estado energético interno instantáneo** del SD, tales que el conocimiento de sus valores $\{x_{i0}\}$ en instante inicial $t = t_0$ (“**estado inicial**”), junto con el conocimiento de la entrada $u(t)$ para todo $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento posterior del SD: $x(t)$, $y(t)$ para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$.

Representación de Sistemas Lineales IT

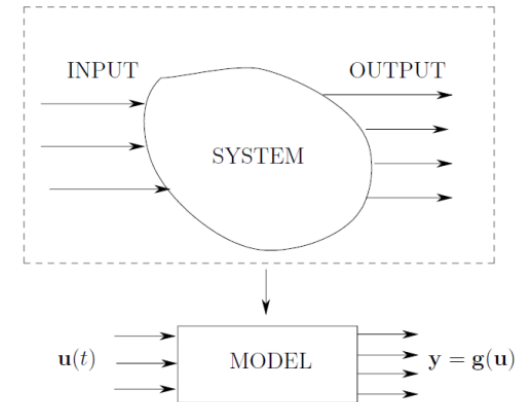
a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$



Forma equivalente a Forma estándar o fundamental en Espacio Vectorial Estado

SEPARACIÓN de Entradas: Manipuladas (por control) vs. Perturbaciones o Cargas

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) = C \cdot x(t) + D_c \cdot u_c(t) + D_d \cdot u_d(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1} = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ u_d(t) \end{bmatrix}, u_c(t)_{m_c \times 1}, u_d(t)_{m_d \times 1}, \underline{m = m_c + m_d}$$

$$B_{n \times m} = [B_c \quad B_d], D_{p \times m} = [D_c \quad D_d]$$

Representación de Sistemas Lineales IT

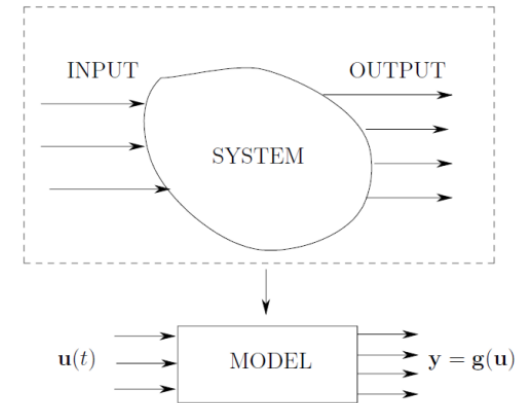
a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$



Otras formas → Forma estándar o fundamental en Espacio Vectorial Estado

- Descriptor form: (Forma generalizada)

$$E \cdot \dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t), \quad E_{n \times n} \text{ NO singular (ej. SD mec./el.)} \rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = [E^{-1} \cdot F] \cdot x + [E^{-1} \cdot G] \cdot u(t)$$

Nota: si $E_{n \times n}$ Singular → DAE: Modelo Diferencial-Algebraico (Restricción Algebraica)

Representación de Sistemas Lineales IT

a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$

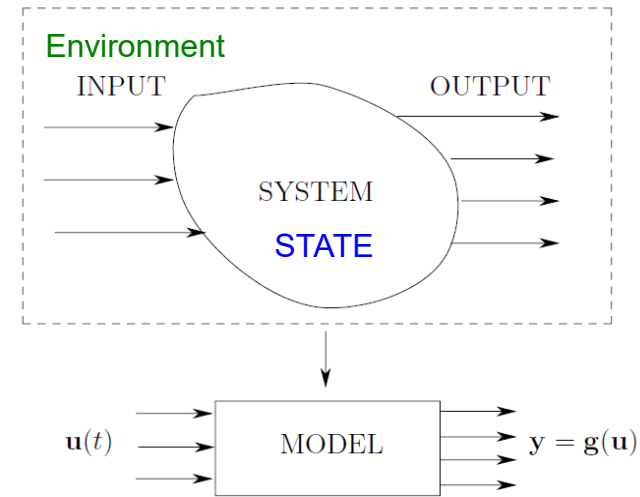
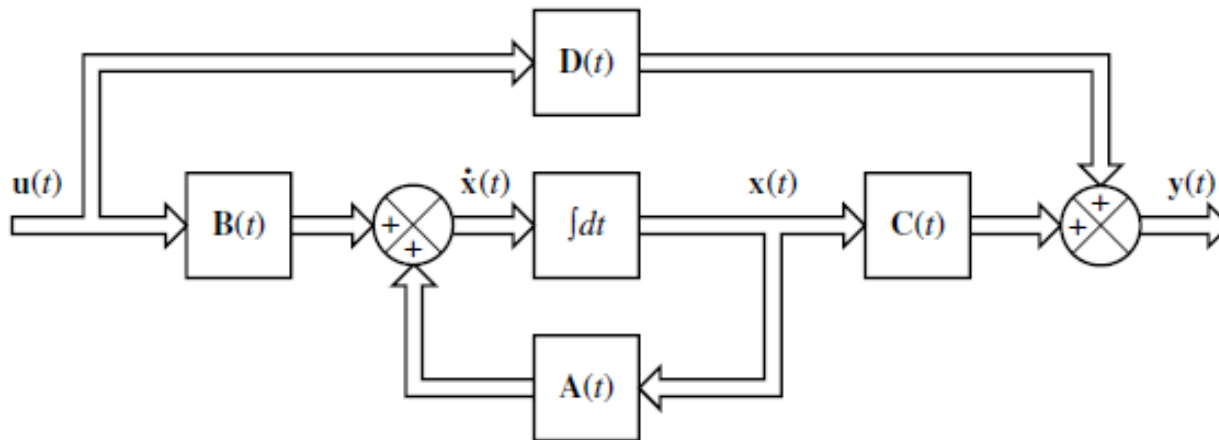


Diagrama de Bloques de Estado Matricial:



Representación de Sistemas Lineales IT

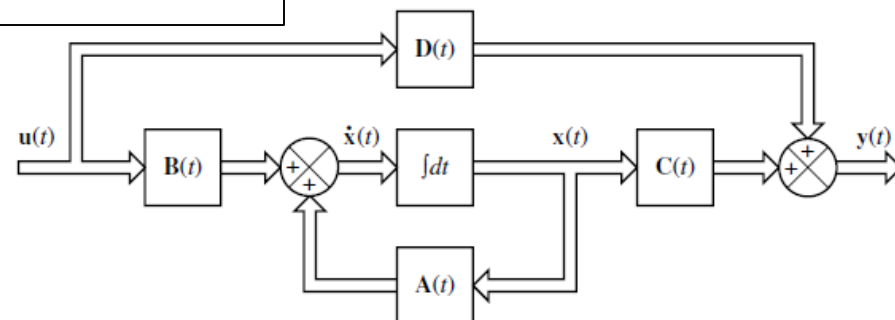
a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$

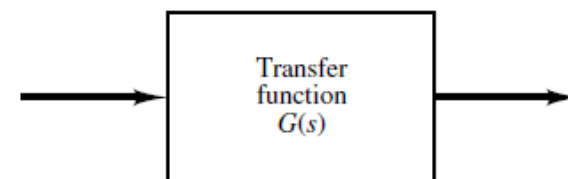


b) Transferencia Entrada-Salida (Laplace) (Dominio Frec.)

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \mid x_0 \equiv \mathbf{0}$$

Donde:

$$U(s)_{m \times 1}, Y(s)_{p \times 1}, G(s)_{p \times m},$$



$$G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D \quad P \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Transferencia Entrada-Salida

Matriz INVERSA A^{-1} de una Matriz A cuadrada ($n \times n$) (repaso **Álgebra Lineal**)

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$M_{2,3} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & \square \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = 9 - (-4) = 13$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}}; Adj(A) = [Cof(A)]^T; Cof(A) = [cof(a_{ij})] = [(-1)^{i+j} \cdot Minor_{ij}];$$

Transferencia Entrada-Salida (Laplace) (Dominio Frec.)

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \mid x_0 \equiv \mathbf{0} \quad \text{Donde: } U(s)_{m \times 1}, Y(s)_{p \times 1} \quad G(s)_{p \times m}$$

$$G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D = C \cdot \frac{Adj([s \cdot I - A])}{|s \cdot I - A|} \cdot B + D$$

→ Todos los **elementos (FT)** de $G(s)$ tienen

mismo denominador = Polinomio Característico de A →
mismos Polos = Autovalores de A .

Aunque:

puede haber **Cancelación Polo-Cero** en algunos elementos.

Sistemas Dinámicos FÍSICOS $\Leftrightarrow$ ENERGÍA

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Modelo físico idealizado

- Modelo de Estado: Modelo interno DT (Espacio de Estado)**

(Condiciones Iniciales **NO nulas** en general = **ESTADO INICIAL** en $t=t_0$)

- **Estado:** $x_1(t) \equiv y(t)$; $x_2(t) \equiv v(t) = \dot{y}(t) \rightarrow$

- **Ecuación de Estado:**

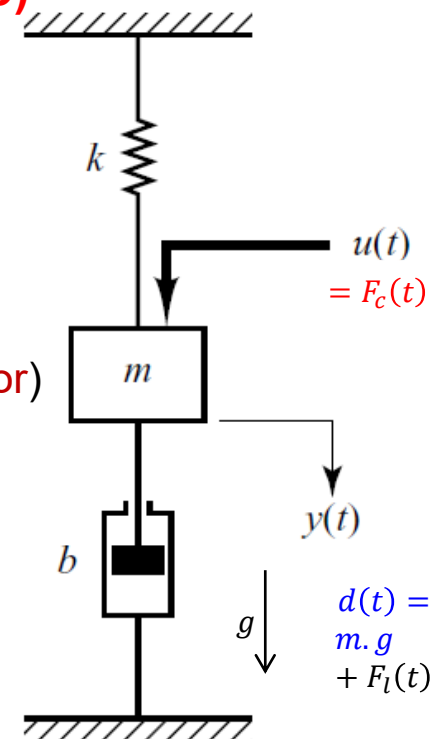
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m \cdot \dot{x}_2(t) = -k \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t) + u(t) + m \cdot g \end{cases}$$

- **Estado Inicial:** $x_1(t_0) \equiv x_{10}$; $x_2(t_0) \equiv x_{20}$ (resume **historia anterior**)

- **Ecuación de Salida:** $y(t) = x_1(t)$

- Forma MATRICIAL:**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot g; & \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$



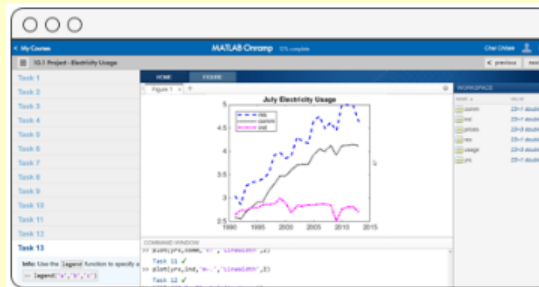
Autovalores $\lambda_{1,2}$ de matriz de Sistema A: $\det(\lambda \cdot I - A) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = ?$ (hacer)

Función de Transferencia: $G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D = ?$ (hacer) $\rightarrow$ **Polos $p_{1,2} = ?$**

Introducción a MATLAB / Simulink

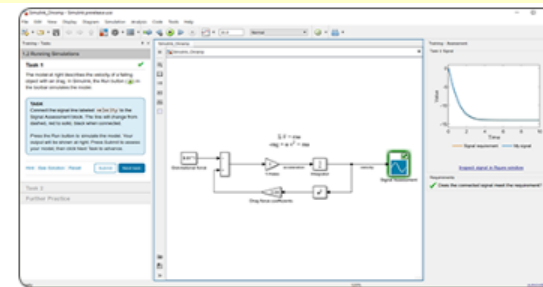
MATLAB and Simulink **free** online **Tutorials** (requiere registrar cuenta propia libre)

<https://www.mathworks.com/support/learn-with-matlab-tutorials.html>



MATLAB Onramp

Quickly learn the essentials of MATLAB®.



Simulink Onramp

Learn to create, edit, and troubleshoot Simulink® models.

1. **MATLAB Onramp** (ver video introd.: 1:18 min. → **tutorial: 2 hs.**, a ritmo propio)

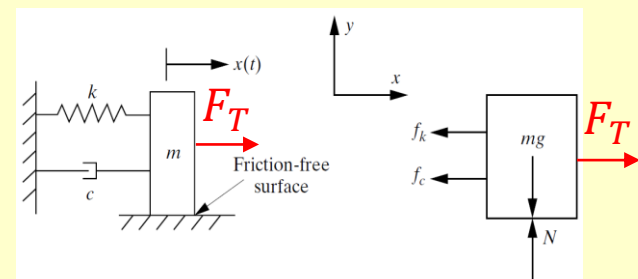
<https://www.mathworks.com/learn/tutorials/matlab-onramp.html>

2. **Simulink Onramp** (ver video introd.: 1:41 min. → **tutorial: 3 hs.**, a ritmo propio)

<https://www.mathworks.com/learn/tutorials/simulink-onramp.html>

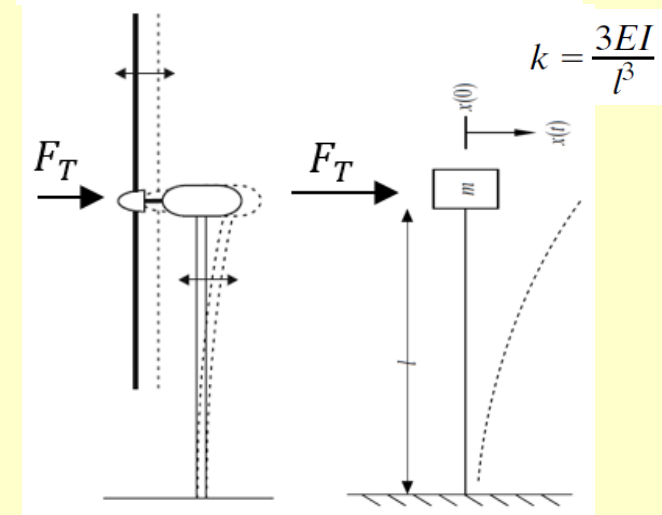
Ej.: **Turbina Eólica**: Modelos simplificados

Estructuras de Torre y Palas (Flexión Elástica Axial): SD mecánico **LTI** 1 g.d.l.
1 modo **Vibración** u Oscilación en Traslación **forzado por F_T** (Empuje aerodinámico)



$$\begin{cases} m_t \cdot \frac{dv_{x_t}(t)}{dt} = f_{acel}(t) = -K_t \cdot x_t(t) - b_t \cdot v_{x_t}(t) + F_T(t) \\ \frac{dx_t(t)}{dt} \equiv v_{x_t}(t) \end{cases}$$

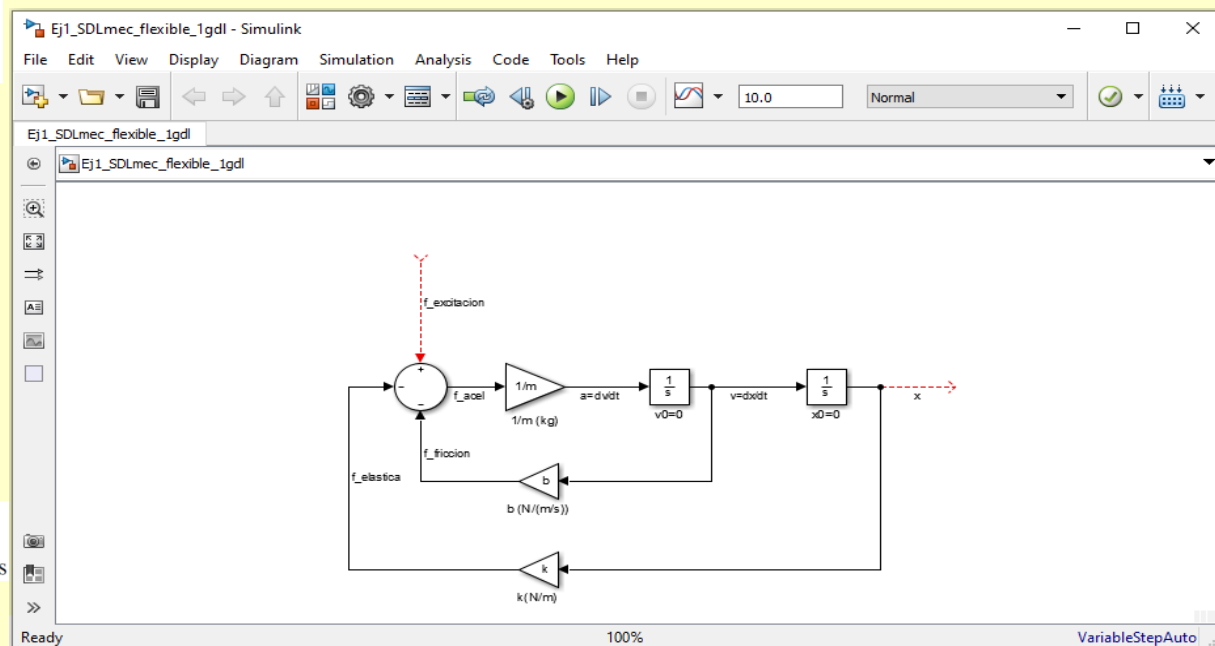
Estado inicial: $v_{x_t}(0) \equiv v_{x_{t0}}$; $x_t(0) \equiv x_{t0}$



E = elastic modulus
 l = length of beam
 I = moment of inertia of cross-sectional area about the neutral axis

Análisis Dinámico:

- Función de Transferencia, Estabilidad (autovalores)

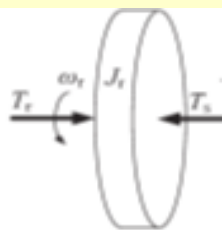


Ej.: **Turbina Eólica**: Modelos simplificados

Rotor de Turbina y Generador (Rotación Rígida Libre): SD mecánico **LTI** 1 g.d.l.
1 modo **Cuerpo Rígido Libre** forzado por T_w , **compensado** por T_g (Control)

a) **Direct Drive**

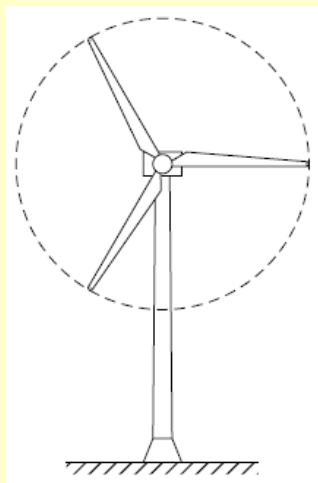
Accionamiento **DIRECTO**
(SIN caja de engranajes
multiplicadora de velocidad)



$$\begin{cases} J_r \cdot \frac{d\omega_r(t)}{dt} = T_{acel}(t) = -T_g(t) - b_r \cdot \omega_r(t) + T_w(t) \\ \frac{d\theta_r(t)}{dt} \equiv \omega_r(t) \end{cases}$$

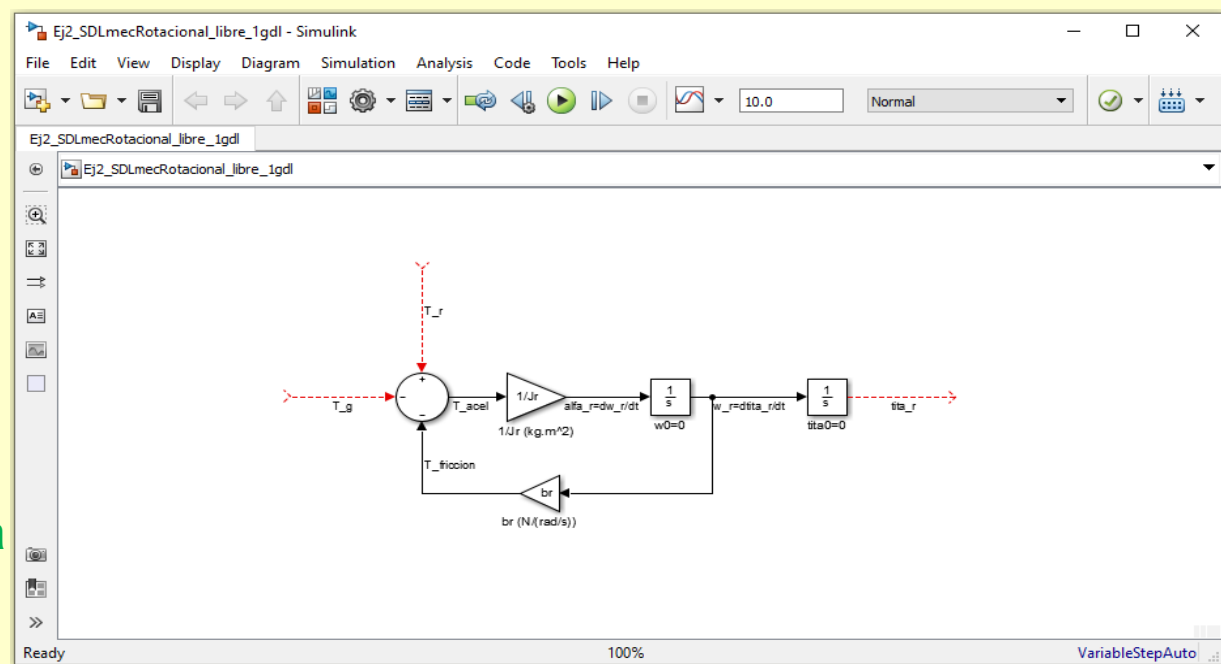
Estado inicial: $\omega_r(0) \equiv \omega_{r0}$; $\theta_r(0) \equiv \theta_{r0}$

Potencia generada (electromagnética): $P_g(t) = T_g(t) \cdot \omega_r(t)$



Análisis Dinámico:

- Función de Transferencia
- Estabilidad (autovalores)

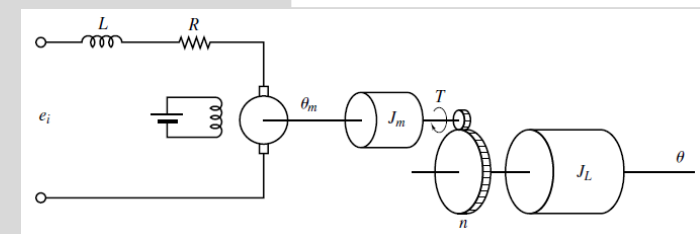
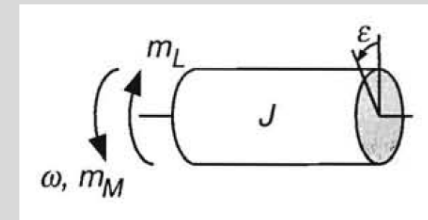
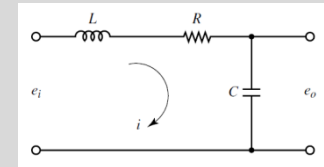
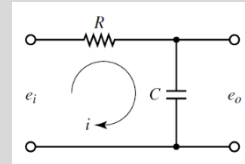
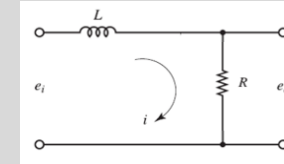


Representación de Sistemas Lineales IT

TRABAJO PRÁCTICO Unidad 2: *ver AyME_02_Trabajo Práctico 2023_Unidad 2.pdf*

Ejercicios: Representar en Espacio de Estados $\leftrightarrow$ Matriz de Transferencia

1. [Circuito **LR** pasabajos: $e_i \rightarrow i_l$ vs. $e_i \rightarrow v_r$]
2. [Circuito **RC** pasabajos: $e_i \rightarrow i_c$ vs. $e_i \rightarrow v_c$]
3. Ogata 5th Ed., Section 3-3 (pág. 72) [Circuito **RLC**]
4. Ogata 5th Ed., Section 2-5 (pág. 36) [**E.D.O. orden n**]
5. Ogata 5th Ed., Section 2-6 (pág. 39) [Matlab **tf2ss**, **ss2tf**]
6. Ogata 5th Ed., Ej. A-2-6 (pág. 51) hasta A-2-12 (pág. 58)
7. Inercia rotante con fricción
(modelo mecánico 1 g.d.l. de accionamiento).
8. Ogata 5th Ed., Probl. B-3-13 (pág. 99)
[**servomotor CC** c/control armadura]
9. Filtro cuña 2° orden: $H(s) \equiv \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2}$



Interconexión → Estructuras compuestas

- **Sistemas dinámicos complejos:** compuestos por subsistemas más simples **interconectados** entre sí.
- **Salidas** de un subsistema actúan como **entradas** a otros subsistemas en forma directa o mediante operaciones algebraicas.
- Conjunto de **variables de estado** del sistema global = **unión** de conjuntos de variables de estado de los subsistemas.

$$\{x\} = \{x_1\} \cup \{x_2\}$$
- **Ecuación de estado** del sistema **global:** **eliminar variables intermedias.**

Sean 2 subsistemas:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u_1(t); & x_1(t_0) = x_{10} \\ y_1(t) = C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u_1(t) \end{cases}$$

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s)$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot u_2(t); & x_2(t_0) = x_{20} \\ y_2(t) = C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot u_2(t) \end{cases}$$

$$Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s)$$

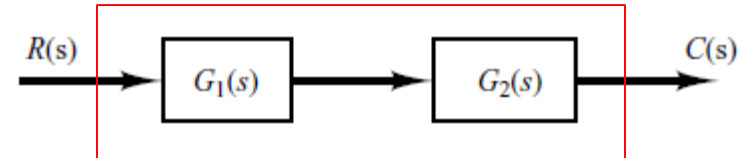
Interconexión en **SERIE** (o Cascada)

Relación estructural: $\mathbf{u}_2(t) \equiv \mathbf{y}_1(t)$; $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t)$; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_2(t)$

→ Restricción: $\dim(\mathbf{u}_2) = \dim(\mathbf{y}_1)$

Estado: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$

Operando:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2 \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2 \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1] \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Transferencia: $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s) = [\mathbf{G}_2(s) \cdot \mathbf{G}_1(s)] \cdot \mathbf{U}(s) \mid \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$

Interconexión en PARALELO

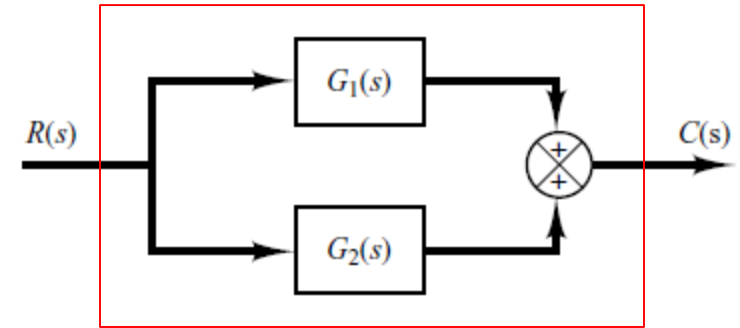
Relación estructural: $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)$; $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{u}_2(t)$;

→ Restricción : $\dim(\mathbf{y}_2) = \dim(\mathbf{y}_1)$;

$\dim(\mathbf{u}_2) = \dim(\mathbf{u}_1)$

Estado: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$

Operando:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2] \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Transferencia: $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s) = [\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s)] \cdot \mathbf{U}(s) \mid \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$

RETROALIMENTACIÓN Const. de Salida

Relación estructural: $\mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}_2(t)$; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_2(t) \equiv \mathbf{y}_1(t)$;

→ Restricción : $\dim(\mathbf{y}_2) = \dim(\mathbf{u}_1) = \dim(\mathbf{r})$;

$$\dim(\mathbf{u}_2) = \dim(\mathbf{y}_1)$$

Asumimos:

a) Retroalim. Constante: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{y}_1$

b) Transmisión directa nula: $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{0}$

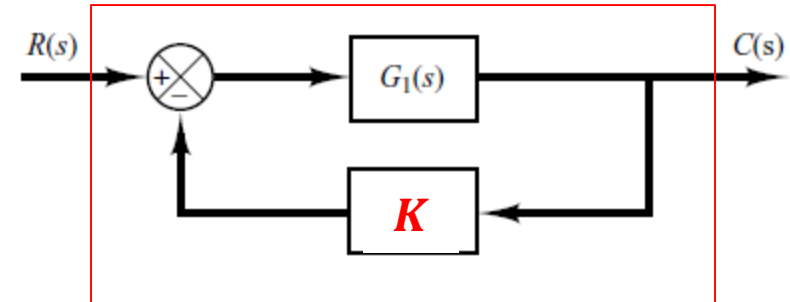
Estado: $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t)]$

Operando:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_1] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{r}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}_1] \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Transferencia: $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{R}(s) = \mathbf{G}_1(s) \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{G}_1(s)]^{-1} \cdot \mathbf{R}(s)$
(demostrar !)
 $= [\mathbf{I} + \mathbf{G}_1(s) \cdot \mathbf{K}]^{-1} \cdot \mathbf{G}_1(s) \cdot \mathbf{R}(s)$



RETROALIMENTACIÓN de Estado

Relación estructural: Retroalim. ESTADO: $u(t) \equiv r(t) - K \cdot x(t)$;

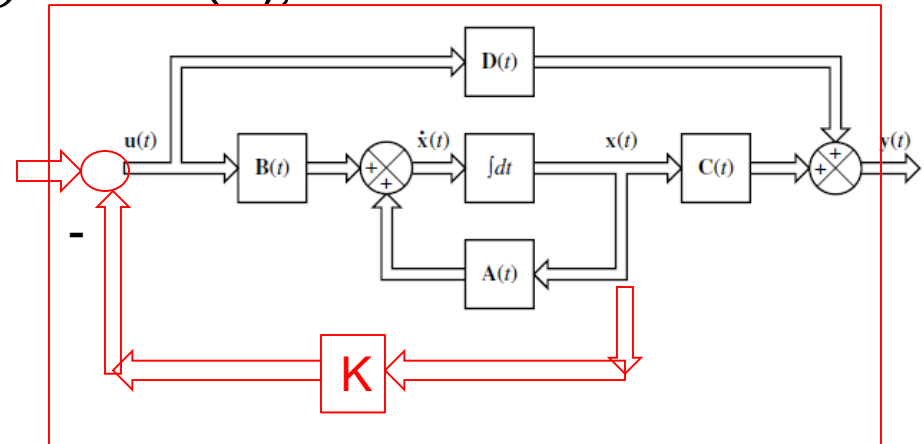
→ Restricción: $\dim(K \cdot x) = \dim(u) = \dim(r)$;

Asumimos:

Retroalim. Constante: $-K \cdot x(t)$
(Ley de Control)

Estado: $x(t) = [x_1(t)]$

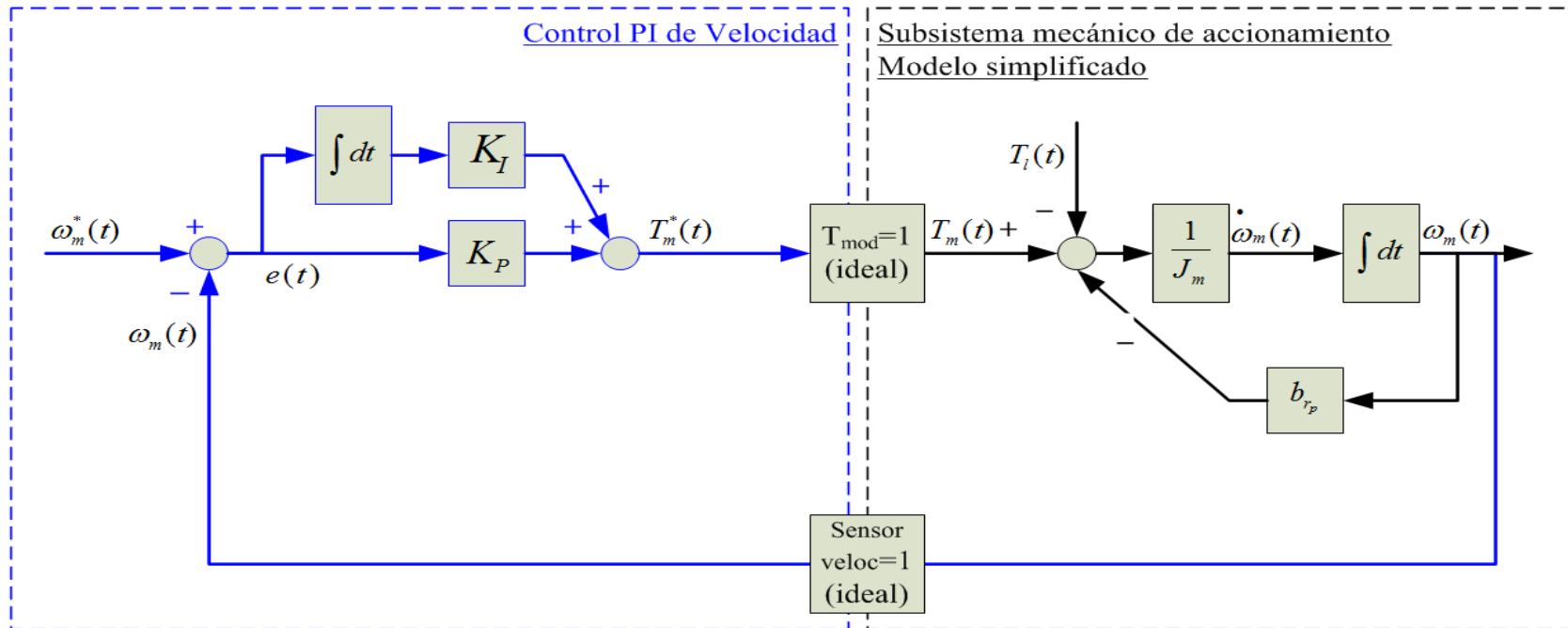
Operando:



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (r(t) - K \cdot x(t)) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot (r(t) - K \cdot x(t)) \end{cases}$$

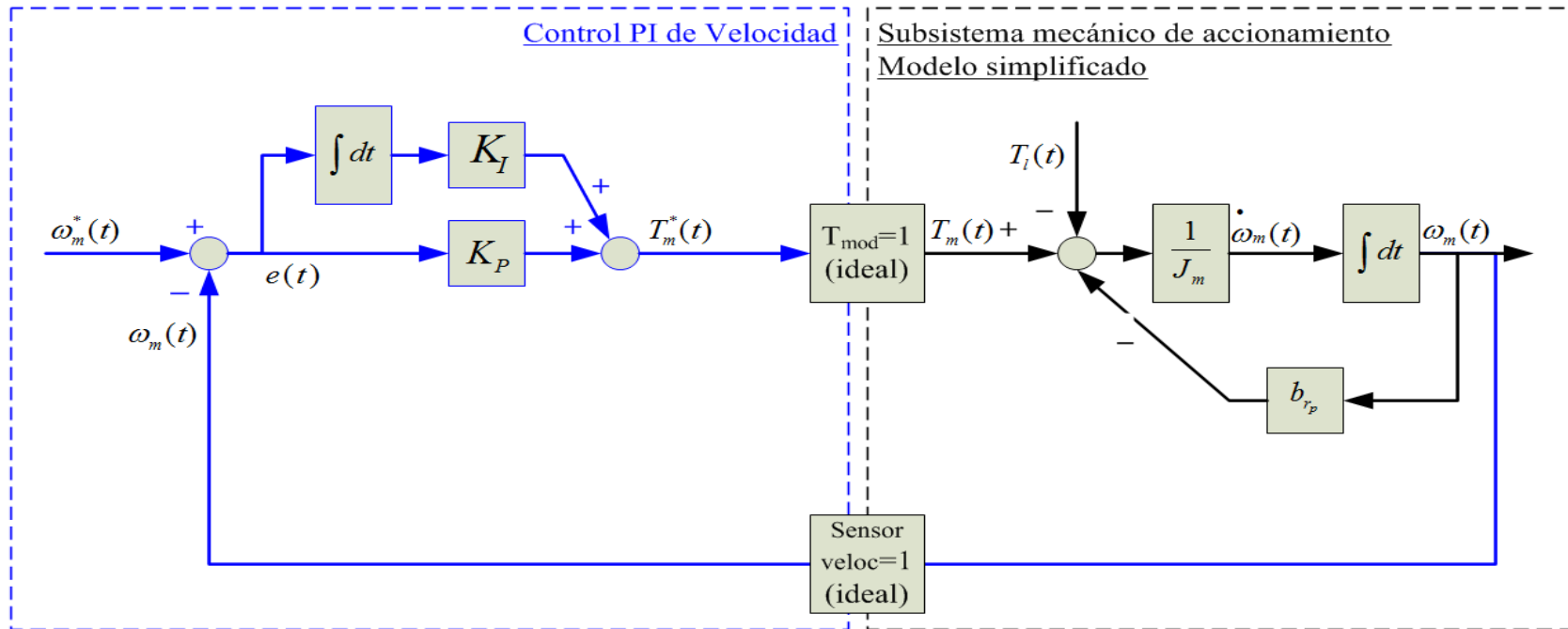
$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B \cdot K] \cdot x(t) + [B] \cdot r(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = [C - D \cdot K] \cdot x(t) + D \cdot r(t) \end{cases}$$

Control de velocidad en accionamiento



- **Sistema conceptual idealizado:** compuesto por algunos subsistemas más simples interconectados entre sí.
- **Salidas** de un subsistema actúan como **entradas** a otros subsistemas en forma directa o mediante operaciones algebraicas.
- Conjunto de **variables de estado** del sistema global = unión de conjuntos de variables de estado de los subsistemas.
- **Ecuación de estado** del sistema global: eliminar variables intermedias.

Control de velocidad en accionamiento

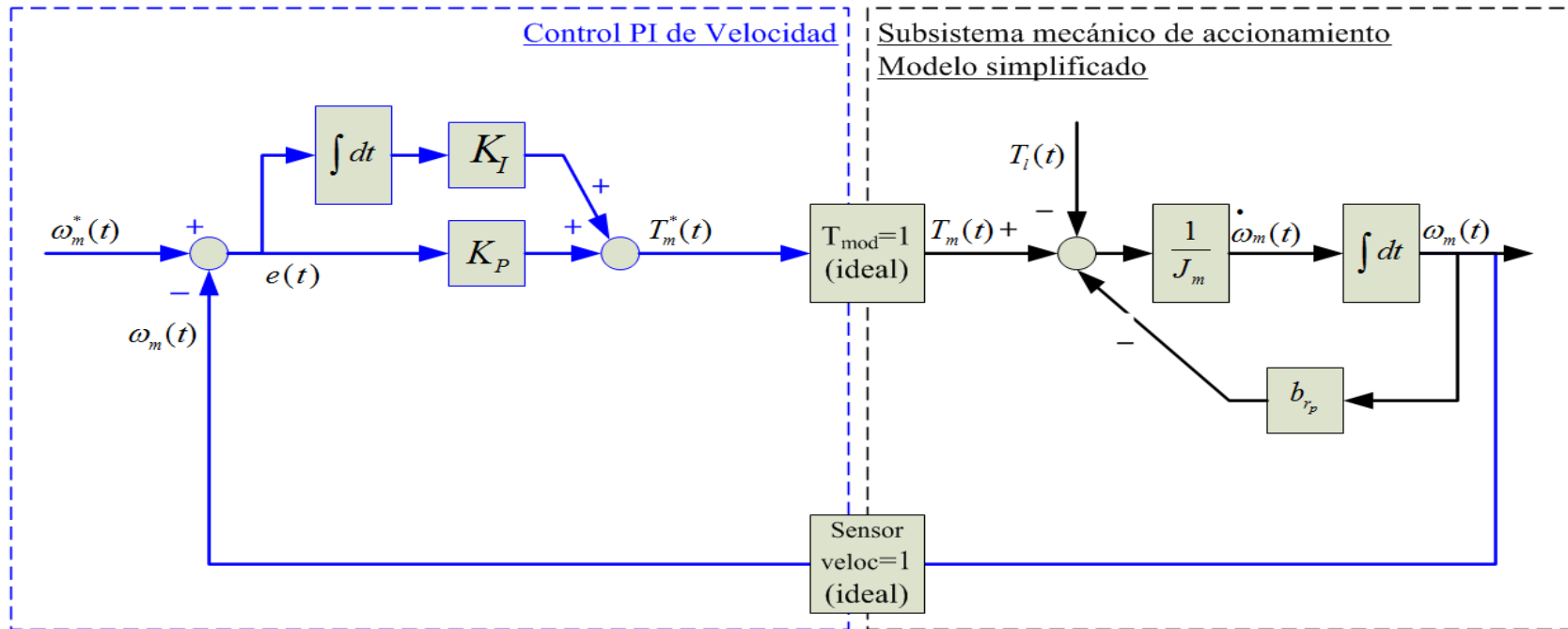


Subsistemas: $S_1(PI)$, $S_2(Mec.)$ (inicialmente no consideramos carga T_l) → agregar carga T_l

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u_1(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = e(t) \\ T_m^*(t) = K_I \cdot x_1(t) + K_P \cdot e(t) \end{cases} \rightarrow (A_1 = 0; B_1 = 1) \\ (C_1 = K_I; D_1 = K_P)$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{J_m} \cdot x_2(t) + \frac{1}{J_m} \cdot T_m(t) - \frac{1}{J_m} \cdot T_l(t) \\ w_m(t) = x_2(t) \end{cases} \\ \rightarrow (A_2 = -\frac{b}{J_m}; B_2 = \frac{1}{J_m}; C_2 = 1; D_2 = 0)$$

Control de velocidad en accionamiento



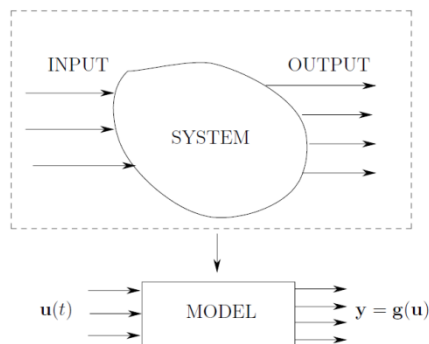
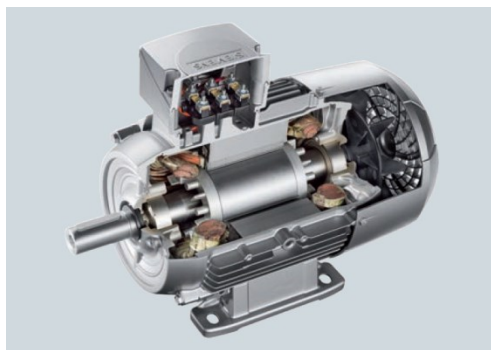
Interconexión: $S_1(PI), S_2(Mec.)$ Cascada → Retroalimentación const. de Salida (HACER!)

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u_1(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = e(t) \\ T_m^*(t) = K_I \cdot x_1(t) + K_P \cdot e(t) \end{cases} \rightarrow (A_1 = 0; B_1 = 1) \\ (C_1 = K_I; D_1 = K_P)$$

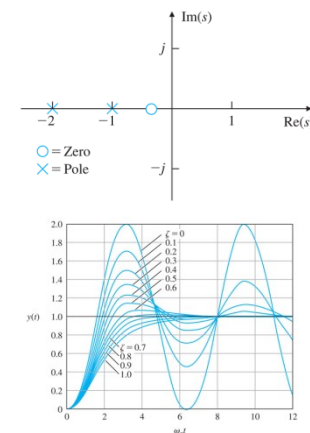
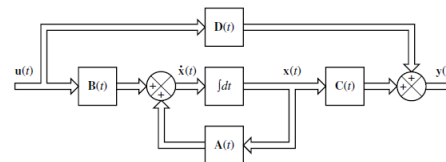
$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{J_m} \cdot x_2(t) + \frac{1}{J_m} \cdot T_m(t) - \frac{1}{J_m} \cdot T_l(t) \\ w_m(t) = x_2(t) \end{cases} \\ \rightarrow (A_2 = -\frac{b}{J_m}; B_2 = \frac{1}{J_m}; C_2 = 1; D_2 = 0)$$

Unidad 2:

Modelado y Análisis en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 2:

A. Sistemas Dinámicos Físicos continuos (SD). Variables de Estado

- Concepto. Entradas y salidas. Sistemas SISO vs. MIMO (MV). Estado interno. Orden de Sistema.
- Representación en Espacio de Estados (SS). Ecuación de Estado, diagrama de bloques de estado.

B. Modelos Lineales Invariantes (LTI). Aplicación. Interconexión

- Propiedades. Función de transferencia. Sistemas eléctricos y mecánicos de 1° y 2° orden.
- Modelos para sistemas interconectados: serie, paralelo, retroalimentación de salida / estado.

C. Respuesta Dinámica. Estabilidad. Discretización. Linealización.

- Respuesta natural y forzada. Discretización. Simulación numérica. Análisis de Estabilidad en SS.
- Sistemas Lineales vs. NO Lineales. Linealización Jacobiana, modelos LPV.

D. Realizaciones Canónicas. Controlabilidad y Observabilidad

- Transformación de cambio de base en SS. Formas o Realizaciones diagonal, controlable, observable.
- Controlabilidad y Observabilidad. Criterios: Gilbert, Kalman. Subsistemas Controlable y Observable.
- Resumen y Consultas.
- Próximos Pasos...

Representación de Sistemas Lineales IT

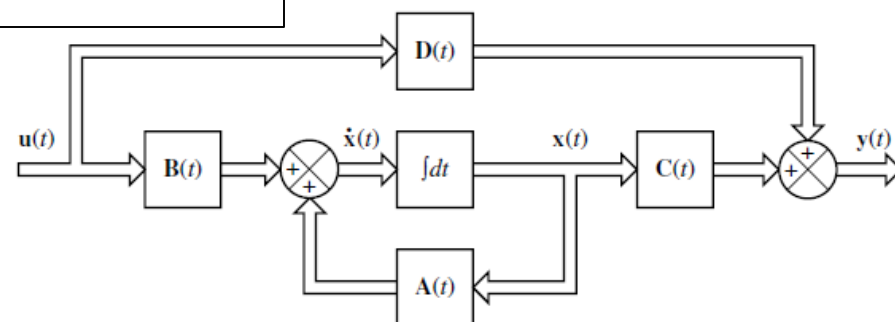
a) Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo): Forma estándar

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Donde:

$$\mathbf{u}(t)_{m \times 1}, \mathbf{x}(t)_{n \times 1}, \mathbf{y}(t)_{p \times 1}$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times m}, \mathbf{C}_{p \times n}, \mathbf{D}_{p \times m}$$

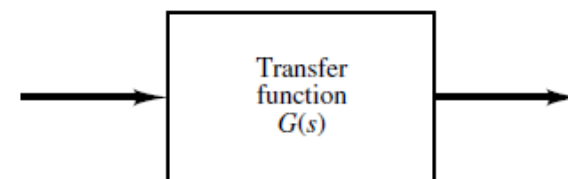


b) Transferencia Entrada-Salida (Laplace) (Dominio Frec.)

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \mid \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$$

Donde:

$$\mathbf{U}(s)_{m \times 1}, \mathbf{Y}(s)_{p \times 1}, \mathbf{G}(s)_{p \times m},$$



$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \mathbf{P} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Solución de la Ecuación de Estado LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

1. Solución Analítica: ANÁLISIS – DISEÑO Conceptual

Caso **Escalar**: ej. 1 modo de forma canónica diagonal $\rightarrow \exp(p.t)$

- a) Ec. Homogénea $\rightarrow$ Rta. Natural
- b) Ec. Forzada $\rightarrow$ Rta. Forzada (convolución)

Caso Vectorial: cualquier realización o forma acoplada $\rightarrow \exp(A.t)$

- a) Ec. Homogénea $\rightarrow$ **Rta. Natural (a estado inicial)**
- b) Ec. Forzada $\rightarrow$ **Rta. Forzada (a entradas) [convolución] (+ Rta. Natural)**

- **Métodos**: $\rightarrow$ deducción a) y b) en páginas siguientes

- 1) Desarrollo en serie de potencias en DT vs.
- 2) Transformada de Laplace en DF

- Justificación de la **definición de estado** / **Matriz de Transición de Estado**
- Transferencia = Transformada de **Rta. Impulsional** (estado inicial nulo)

2. Solución Numérica: SIMULACIÓN de Respuesta Dinámica (step/lsim)

Ej. 9-5, 9-6 Ogata (p. 665-668) Resolver analíticamente y luego mediante simulación
Hacer !

Respuesta Natural en T. Continuo $t \in \mathbb{R}$

$$s_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \text{Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R}$$

A) Respuesta **Natural** (causada solo por **Estado Inicial** NO Nulo, SIN Excitación posterior):
Solución de la Ecuación Diferencial de Estado **Autónoma u Homogénea**

$$u(t) \equiv 0 \therefore \boxed{\dot{x}(t) = A \cdot x(t)}; \quad \underline{x(t_0) = x_0}; \quad y(t) = C \cdot x(t)$$

1. **Solución en DT:** Proponemos solución general $x(t) =$ serie de potencias de $(t - t_0)$:

$$x(t) = b_0 + b_1 \cdot (t - t_0) + b_2 \cdot (t - t_0)^2 + b_3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots + b_k \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (t - t_0)^k$$

Evaluamos $x(t)$ en instante inicial $t = t_0$: $x(t_0) = b_0 = x_0 = I \cdot x_0$

a) Derivamos $x(t)$ con respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot (t - t_0) + 3 \cdot b_3 \cdot (t - t_0)^2 + \dots + k \cdot b_k \cdot (t - t_0)^{k-1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k \cdot (t - t_0)^{k-1}$$

b) Reemplazamos $x(t)$ propuesta en la Ecuación Diferencial de Estado Autónoma original:

$$\dot{x}(t) = A \cdot b_0 + A \cdot b_1 \cdot (t - t_0) + A \cdot b_2 \cdot (t - t_0)^2 + \dots + A \cdot b_k \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot b_k \cdot (t - t_0)^k$$

Comparamos a) y b) $\rightarrow$ igualamos coeficientes de cada término de igual potencia de $(t - t_0)$:

$$b_1 = A \cdot b_0 \therefore b_1 = A \cdot x_0; \quad 2 \cdot b_2 = A \cdot b_1 \therefore b_2 = \frac{A^2 \cdot x_0}{2!}; \quad 3 \cdot b_3 = A \cdot b_2 \therefore b_3 = \frac{A^3 \cdot x_0}{3!}; \quad \dots$$

$$k \cdot b_k = A \cdot b_{k-1} \therefore b_k = \frac{A^k \cdot x_0}{k!}$$

Reemplazamos coeficientes en la solución general $x(t)$ propuesta originalmente:

$$x(t) = I \cdot x_0 + A \cdot x_0 \cdot (t - t_0) + \frac{A^2 \cdot x_0}{2!} \cdot (t - t_0)^2 + \dots + \frac{A^k \cdot x_0}{k!} \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot x_0}{k!} \cdot (t - t_0)^k$$

$$x(t) = \left[I + A \cdot (t - t_0) + \frac{A^2 \cdot (t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot (t - t_0)^k}{k!} + \dots \right] \cdot x_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot (t - t_0)^k}{k!} \right] \cdot x_0$$

Función exponencial natural *escalar*: $e^{a \cdot t} = 1 + a \cdot t + \frac{a^2 \cdot t^2}{2!} + \dots + \frac{a^k \cdot t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \cdot t^k}{k!}$

$$\text{Función Exponencial Matricial: } \Phi_A(t) = e^{A \cdot t} \equiv I + A \cdot t + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$$

$$\text{Respuesta Natural: } x(t) = e^{A \cdot (t - t_0)} \cdot x(t_0) = \Phi_A(t - t_0) \cdot x(t_0)$$

$\Phi_A(t - t_0)$: **Matriz de Transición de Estado**, evolución de Estado inicial $x_0 = x(t_0) \rightarrow$ Estado actual $x(t)$.

1. Solución Analítica: ANÁLISIS – DISEÑO Conceptual

2. **Solución en DF:** aplicando Transformada de Laplace $\mathcal{L}$

$$\text{DT: } t[s] \in \mathbb{R} \rightarrow \text{DF } s[\text{rad/s}] = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t) = A \cdot x(t)\}$$

$$s \cdot X(s) - x(0) = A \cdot X(s)$$

$$[s \cdot I - A] \cdot X(s) = x(0)$$

$$X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0), \quad [s \cdot I - A]^{-1} = \mathcal{L}\{e^{A \cdot t}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0)\}$$

$$\text{Respuesta Natural: } x(t) = e^{A \cdot (t - 0)} \cdot x(0) = \Phi_A(t - 0) \cdot x(0)$$

Ver Detalle en Doc.
PDF ADJUNTO

Respuesta Forzada en T. Continuo $t \in \mathbb{R}$

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \text{Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R}$$

B) Respuesta **Forzada** (causada por **Excitación**) + Respuesta **Natural** (causada por Estado Inicial):
Solución de la Ecuación Diferencial de Estado Completa, **Forzada o No Homogénea**

$$u(t) \neq 0 \therefore \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

1. **Solución en DT:** Reordenamos y pre-multiplicamos por exponencial $e^{-A \cdot t}$:

$$e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Por otro lado:

- $\frac{d}{dt}[e^{A \cdot t}] = A \cdot e^{A \cdot t} = e^{A \cdot t} \cdot A$ (Producto sí es Conmutativo, Propiedad de **Exponencial Matricial**)
- $\frac{d}{dt}[e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot \dot{x}(t) - A \cdot e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)]$

Reemplazamos en ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt}[e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Integramos la ecuación con respecto a t en ambos miembros:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}[e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)] \cdot d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$[e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)] \Big|_{t_0}^t = e^{-A \cdot t} \cdot x(t) - e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + e^{A \cdot t} \cdot \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada: Integral de Convolución de Duhamel

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + e^{A \cdot (t-t_0)} * B \cdot u(t-t_0)$$

1. **Solución Analítica:**

ANÁLISIS – DISEÑO Conceptual

2. **Solución en DF:** aplicando Transformada de Laplace $\mathcal{L}$

DT: $t[s] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{DF} \ s[rad/s] = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\}$$

$$s \cdot X(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$[s \cdot I - A] \cdot X(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0) + [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B \cdot U(s), \quad [s \cdot I - A]^{-1} = \mathcal{L}\{e^{A \cdot t}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0) + [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B \cdot U(s)\}$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada:

$$x(t) = e^{A \cdot (t-0)} \cdot x(0) + e^{A \cdot (t-0)} * B \cdot u(t-0)$$

**Ver Detalle en Doc.
PDF ADJUNTO**

Respuesta Forzada en T. Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \text{ Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada: Integral de Convolución de Duhamel

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Muestreo Periódico: $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$(T_s[s] \in \mathbb{R})$: Periodo de Muestreo)

Evaluamos Respuesta exacta entre instantes correspondientes a dos muestras consecutivas de tiempo:

$$t_0 \equiv t_k \equiv k \cdot T_s; \quad t \equiv t_{k+1} \equiv (k+1) \cdot T_s \rightarrow t - t_0 = T_s$$

$$x((k+1) \cdot T_s) = e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Aproximamos $u(\tau) \cong u(k \cdot T_s)$ "Constante" en intervalo: $\forall \tau \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s) \rightarrow$ fuera de la integral:

Nota: esto equivale a considerar la salida de un **retenedor de orden 0 (ZOH, Zero-Order Hold)** como entrada $u(t)$, válido para la acción de control desde un controlador digital a través de un Convertidor D/A (retardo $\sim T_s/2$).

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot d\tau \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$

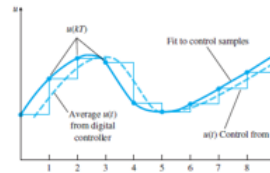
Resolvemos la integral definida del 2º término por **sustitución de variables**:

$$\eta \equiv (k+1) \cdot T_s - \tau \quad \therefore \tau = (k+1) \cdot T_s - \eta; \quad d\tau = -d\eta;$$

$$\tau = k \cdot T_s \Rightarrow \eta = T_s;$$

$$\tau = (k+1) \cdot T_s \Rightarrow \eta = 0$$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$



Ecuación en Diferencias de Estado en DT Discretizado $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong \Phi_A(T_s) \cdot x(k \cdot T_s) + \Gamma_{A,B}(T_s) \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación en Diferencias de Estado}$$

$$y(k \cdot T_s) = C \cdot x(k \cdot T_s) + D \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación Algebraica de Salida}$$

**Ver Detalle en Doc.
PDF ADJUNTO**

1. Solución Analítica: ANÁLISIS – DISEÑO Conceptual

Cálculo de Matrices de Sistema (o de Transición) $\Phi_A(T_s)$ y de Entrada $\Gamma_{A,B}(T_s)$ en DT Discretizado:

$$\begin{aligned} \Phi_A(T_s) &\equiv e^{A \cdot T_s} = I + A \cdot T_s + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot T_s^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{k!} \\ &= I + A \cdot T_s \cdot \left[I + \frac{A \cdot T_s}{2!} + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{3!} + \dots + \frac{A^{k-1} \cdot T_s^{k-1}}{k!} + \dots \right] = I + A \cdot T_s \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \end{aligned}$$

$$\Phi_A(T_s) \equiv e^{A \cdot T_s} = I + A \cdot T_s \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] = I + A \cdot T_s \cdot \Psi_A(T_s)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B}(T_s) &\equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\int_0^{T_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot \eta^k}{k!} \right) \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \int_0^{T_s} \eta^k \cdot d\eta \right] \cdot B \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \left(\frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_0^{T_s} \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{T_s^{k+1}}{k+1} \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \cdot T_s \cdot B \end{aligned}$$

$$\Gamma_{A,B}(T_s) \equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \cdot T_s \cdot B = \Psi_A(T_s) \cdot T_s \cdot B$$

Caso **particular**: $\exists A^{-1}$, A no singular o invertible:

$$\Gamma_{A,B}(T_s) \equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[A^{-1} \cdot e^{A \cdot \eta} \Big|_0^{T_s} \right] \cdot B = A^{-1} \cdot (e^{A \cdot T_s} - I) \cdot B = \left[A^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} \cdot T_s^{k+1}}{(k+1)!} \right] \cdot B$$

Definimos $\Psi_A(T_s)$ como:

$$\begin{aligned} \Psi_A(T_s) &\equiv \left[I + \frac{A \cdot T_s}{2!} + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{3!} + \dots + \frac{A^{k-1} \cdot T_s^{k-1}}{k!} + \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} + \dots \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \\ &\cong I + \frac{A \cdot T_s}{2} \cdot \left\{ I + \frac{A \cdot T_s}{3} \cdot \left[I + \frac{A \cdot T_s}{4} \cdot \left(I + \dots + \frac{A \cdot T_s}{N-1} \cdot \left(I + \frac{A \cdot T_s}{N} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Aproximación recursiva hasta factor N , tiene **mejores propiedades numéricas** [ver Papers Moler and van Loan, 1978, 2003]

$\rightarrow$ Calculamos

$$\begin{aligned} \Phi_A(T_s) &= I + A \cdot T_s \cdot \Psi_A(T_s) \\ \Gamma_{A,B}(T_s) &= \Psi_A(T_s) \cdot T_s \cdot B \end{aligned}$$

La evaluación de estas matrices se puede realizar **numéricamente** en la práctica mediante la **función c2d** en **Matlab**.

Respuesta Dinámica. Estabilidad

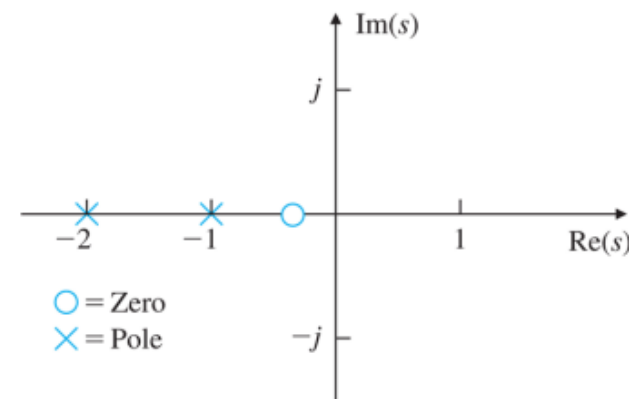
Sist. LTI en Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo)

$$S_{LTI}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Donde:

$$\mathbf{u}(t)_{m \times 1}, \mathbf{x}(t)_{n \times 1}, \mathbf{y}(t)_{p \times 1}$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times m}, \mathbf{C}_{p \times n}, \mathbf{D}_{p \times m}$$



Respuesta Dinámica $\mathbf{x}(t), t \geq t_0$: **Natural** [$\mathbf{u}(t) \equiv 0, \mathbf{x}_0$] + **Forzada** [$\mathbf{u}(t)$].

Estabilidad (Sists. LTI):

S_{LTI} **estable** si, para toda excitación $\mathbf{u}(t)$ acotada en $t \geq t_0$ (rta. **Forzada**) $\rightarrow$ todos sus estados $\mathbf{x}_i(t)$ toman **valores acotados**;
si desaparece la excitación, $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ (rta. **Natural**) $\rightarrow$ el estado **tiende al origen** del Espacio Vectorial de Estado $\mathbf{x}(t \rightarrow \infty) \equiv \mathbf{0}$.

Criterio de Estabilidad LTI (en Espacio de Estados):

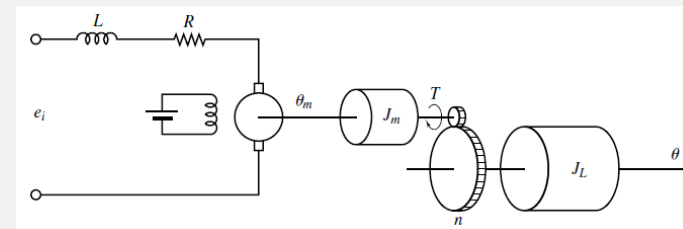
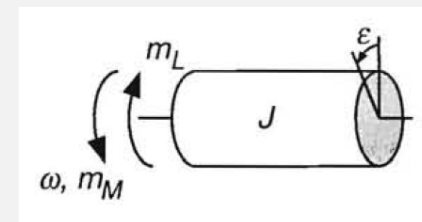
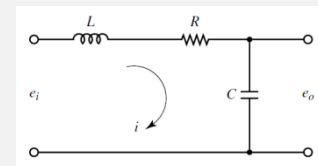
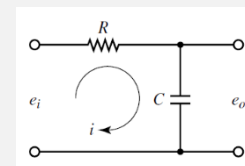
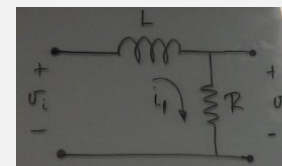
S_{LTI} **estable** $\leftrightarrow$ **Todos** los **autovalores** de $\mathbf{A}$ tienen **parte real NEGATIVA**

Respuesta Dinámica. Estabilidad

TRABAJO PRÁCTICO Unidad 2: ver *AyME_02_Trabajo Práctico 2023_Unidad 2.pdf*

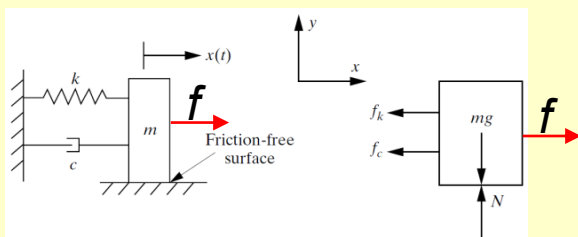
Ejercicios: Análisis de Estabilidad → Rta. Dinámica (Simulación)

1. [Circuito **LR** pasabajos: $e_i \rightarrow i_l$ vs. $e_i \rightarrow v_r$]
2. [Circuito **RC** pasabajos: $e_i \rightarrow i_c$ vs. $e_i \rightarrow v_c$]
3. Ogata 5th Ed., Section 3-3 (pág. 72) [Circuito **RLC**]
4. Ogata 5th Ed., Section 2-5 (pág. 36) [**E.D.O. orden n**]
5. Ogata 5th Ed., Section 2-6 (pág. 39) [Matlab **tf2ss**, **ss2tf**]
6. Ogata 5th Ed., Ej. A-2-6 (pág. 51) hasta A-2-12 (pág. 58)
7. Inercia rotante con fricción
(modelo mecánico 1 g.d.l. de accionamiento).
8. Ogata 5th Ed., Probl. B-3-13 (pág. 99)
[**servomotor CC** c/control armadura]
9. Filtro cuña 2° orden: $H(s) \equiv \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2}$

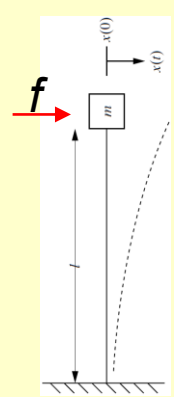
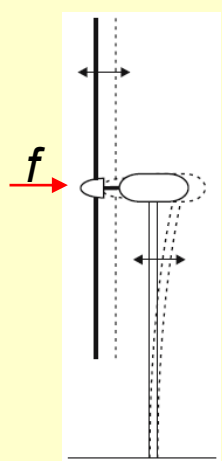


Ej.: **Turbina Eólica**: Modelos simplificados

SDL mecánico 1gdl Traslacional Elástico c/fricción (**m****k****b** / **f**): 1 modo **Vibración**
(Oscilador armónico simple **amortiguado** forzado)

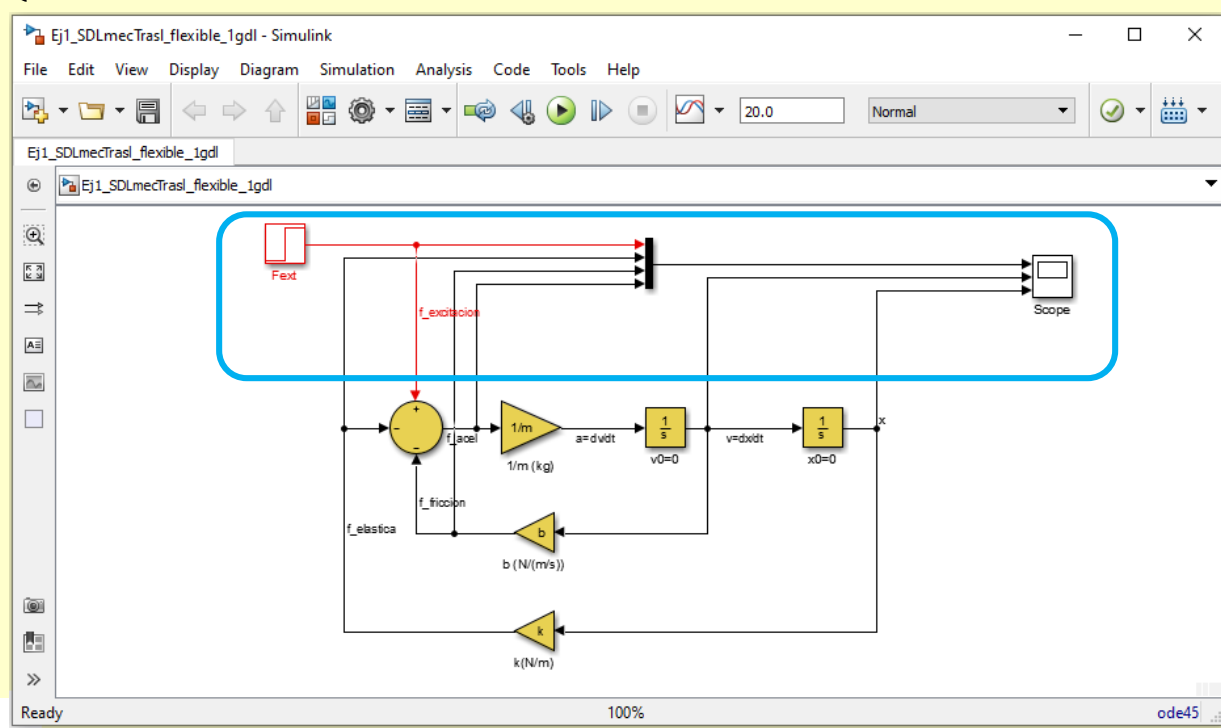


$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = f_{acel}(t) = f(t) - k \cdot x(t) - b \cdot v(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \equiv v(t) \end{cases}$$



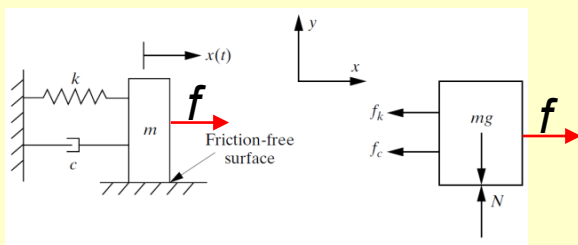
$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

E = elastic modulus
 l = length of beam
 I = moment of inertia of cross-sectional area about the neutral axis

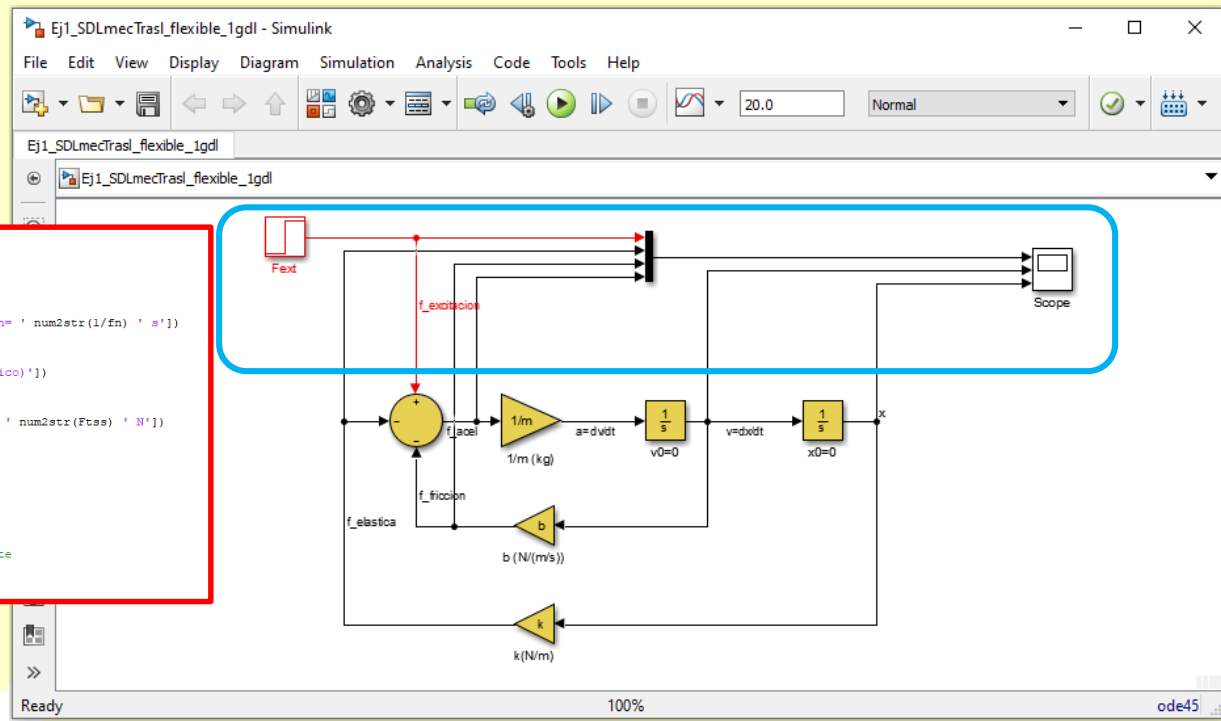
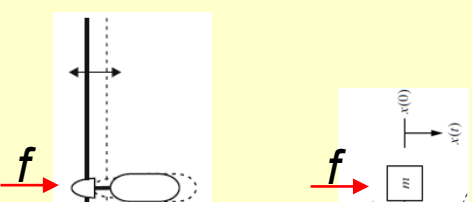


Ej.: **Turbina Eólica**: Modelos simplificados

SDL mecánico 1gdl Traslacional Elástico c/fricción (mkb / f): 1 modo **Vibración**
(Oscilador armónico simple **amortiguado** forzado)



$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = f_{acel}(t) = f(t) - k \cdot x(t) - b \cdot v(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \equiv v(t) \end{cases}$$



```

1 % Ej1 SDL mec Traslación Elástico 1gdl
2 clear all, clc
3
4 disp('Especificaciones:')
5 fn= 0.5; % [Hz] Frecuencia Natural de Vibración
6 disp(['Frec. Nat. :          fn= ' num2str(fn) ' Hz -> Periodo Nat: Tn= ' num2str(1/fn) ' s'])
7 wn= 2*pi*fn; % [rad/s]
8 zeta=0.1; % [-] Amortiguamiento relativo (vs. critico)
9 disp(['Amortiguam.:          zeta= ' num2str(zeta) ' (relativo a Critico)'])
10 Fts= 100e3; % [N] Fuerza de Excitación estática
11 xss= 0.5; % [m] Desplazamiento estático
12 disp(['Equilibrio estacionario cargado: xss= ' num2str(xss) ' m @ Fts= ' num2str(Fts) ' N'])
13 disp(' ')
14
15 disp('Parámetros Concentrados Equivalentes (1 g.d.l. flexional):')
16 k= Fts/xss; % [N/m] Rigidez equivalente
17 disp(['Rigidez equiv.:          k= ' num2str(k) ' N/m'])
18 m= k/wn^2; % [kg] Masa equivalente
19 disp(['Masa equiv.:            m= ' num2str(m) ' kg'])
20 b= 2*zeta*wn*m; % [N/(m/s)] Coef. de Fricción interna (viscosa=lineal) equivalente
21 disp(['Fricción interna equiv.: b= ' num2str(b) ' N/(m/s)'])
22

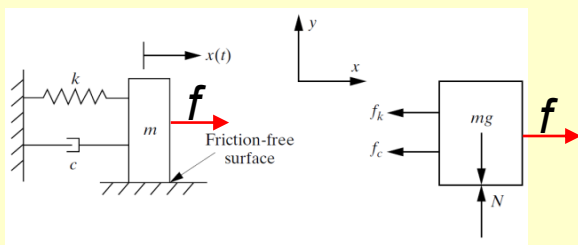
```

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

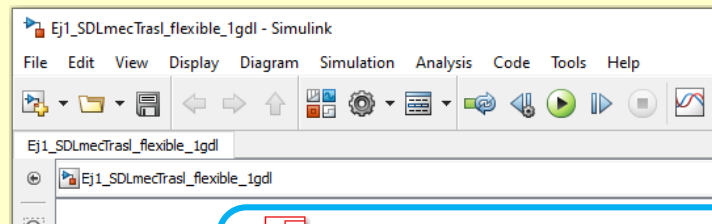
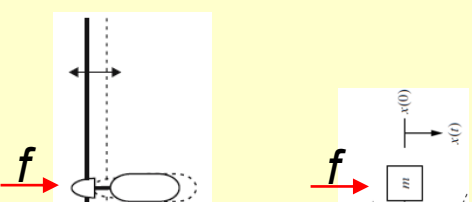
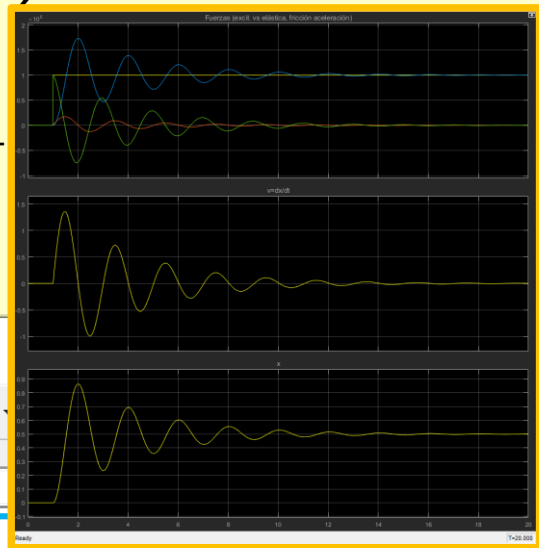
E = elastic modulus
 l = length of beam
 I = moment of inertia of cross-sectional area about the neutral axis

Ej.: **Turbina Eólica**: Modelos simplificados

SDL mecánico 1gdl Traslacional Elástico c/fricción (mkb / f): 1 modo **Vibración**
(Oscilador armónico simple **amortiguado** forzado)



$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = f_{acel}(t) = f(t) - k \cdot x(t) - \\ \frac{dx(t)}{dt} \equiv v(t) \end{cases}$$



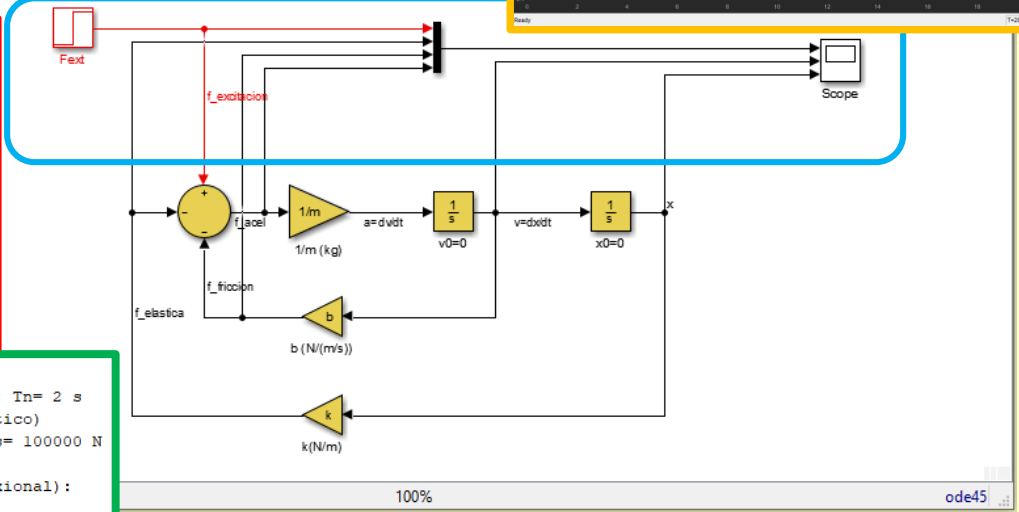
```
1 % Ej1 SDL mec Traslación Elástico 1gdl
2 clear all, clc
3
4 disp('Especificaciones:')
5 fn= 0.5; % [Hz] Frecuencia Natural de Vibración
6 disp(['Frec. Nat. :          fn= ' num2str(fn) ' Hz -> Periodo Nat: Tn= ' num2str(1/fn) ' s'])
7 wn= 2*pi*fn; % [rad/s]
8 zeta=0.1; % [-] Amortiguamiento relativo (vs. critico)
9 disp(['Amortiguam.:          zeta= ' num2str(zeta) ' (relativo a Critico)'])
10 Ftss= 100e3; % [N] Fuerza de Excitación estática
11 xss= 0.5; % [m] Desplazamiento estático
12 disp(['Equilibrio estacionario cargado: xss= ' num2str(xss) ' m @ Ftss= ' num2str(Ftss) ' N'])
13 disp(' ')
14
15 disp('Parámetros Concentrados Equivalentes (1 g.d.l. flexional):')
16 k= Ftss/xss; % [N/m] Rigidez equivalente
17 disp(['Rigidez equiv.:      k= ' num2str(k) ' N/m'])
18 m= k/wn^2; % [kg] Masa equivalente
19 disp(['Masa equiv.:         m= ' num2str(m) ' kg'])
20 b= 2*zeta*wn*m; % [N/(m/s)] Coef. de Fricción interna (viscosa=lineal) equivalente
21 disp(['Fricción interna equiv.: b= ' num2str(b) ' N/(m/s)'])
22
```

$$k = \frac{3EI}{\beta}$$

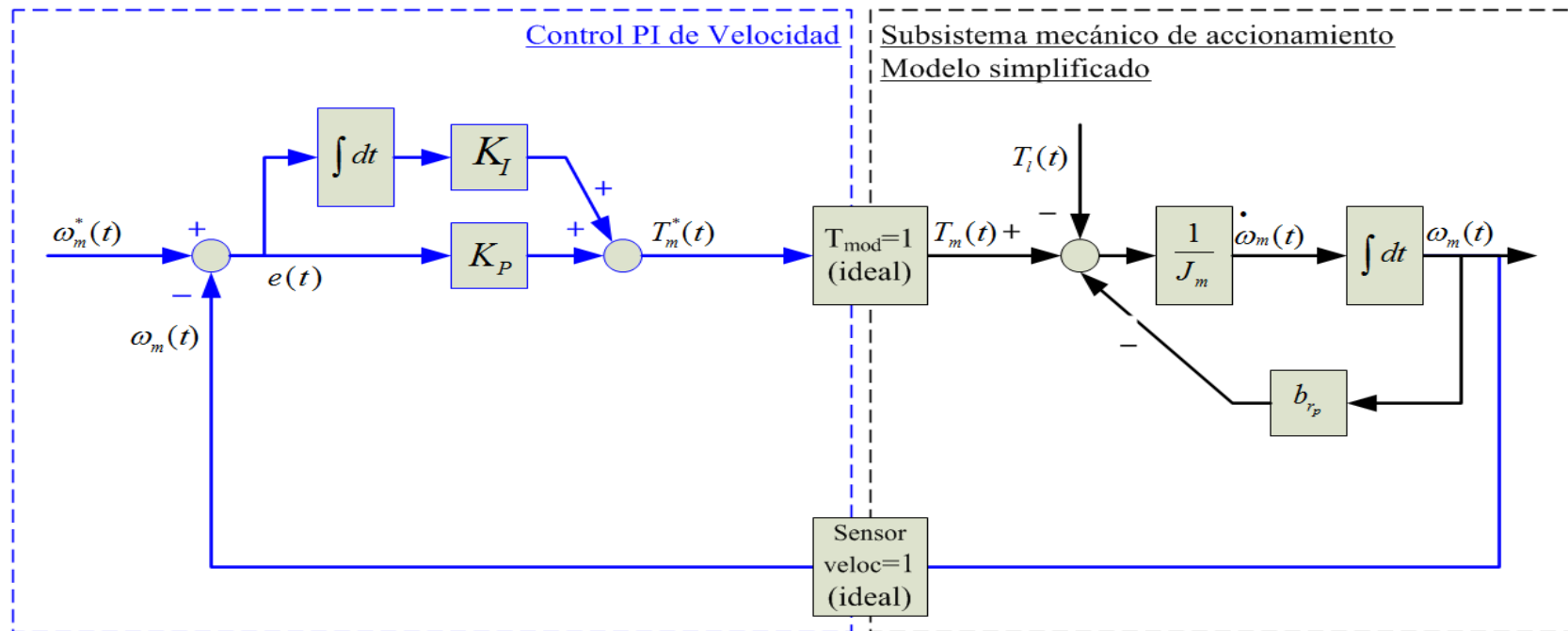
E = elastic modulus
 I = length of beam
 I = moment of inertia of cross-section

Especificaciones:
Frec. Nat. : fn= 0.5 Hz -> Periodo Nat: Tn= 2 s
Amortiguam.: zeta= 0.1 (relativo a Critico)
Equilibrio estacionario cargado: xss= 0.5 m @ Ftss= 100000 N

Parámetros Concentrados Equivalentes (1 g.d.l. flexional):
Rigidez equiv.: k= 200000 N/m
Masa equiv.: m= 20264.2367 kg
Fricción interna equiv.: b= 12732.3954 N/(m/s)



Control de velocidad en accionamiento



$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = e(t) \\ T_m^*(t) = K_I \cdot x_1(t) + K_P \cdot e(t) \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{J_m} \cdot x_2(t) + \frac{1}{J_m} \cdot T_m(t) \\ \omega_m(t) = x_2(t) \end{cases}$$

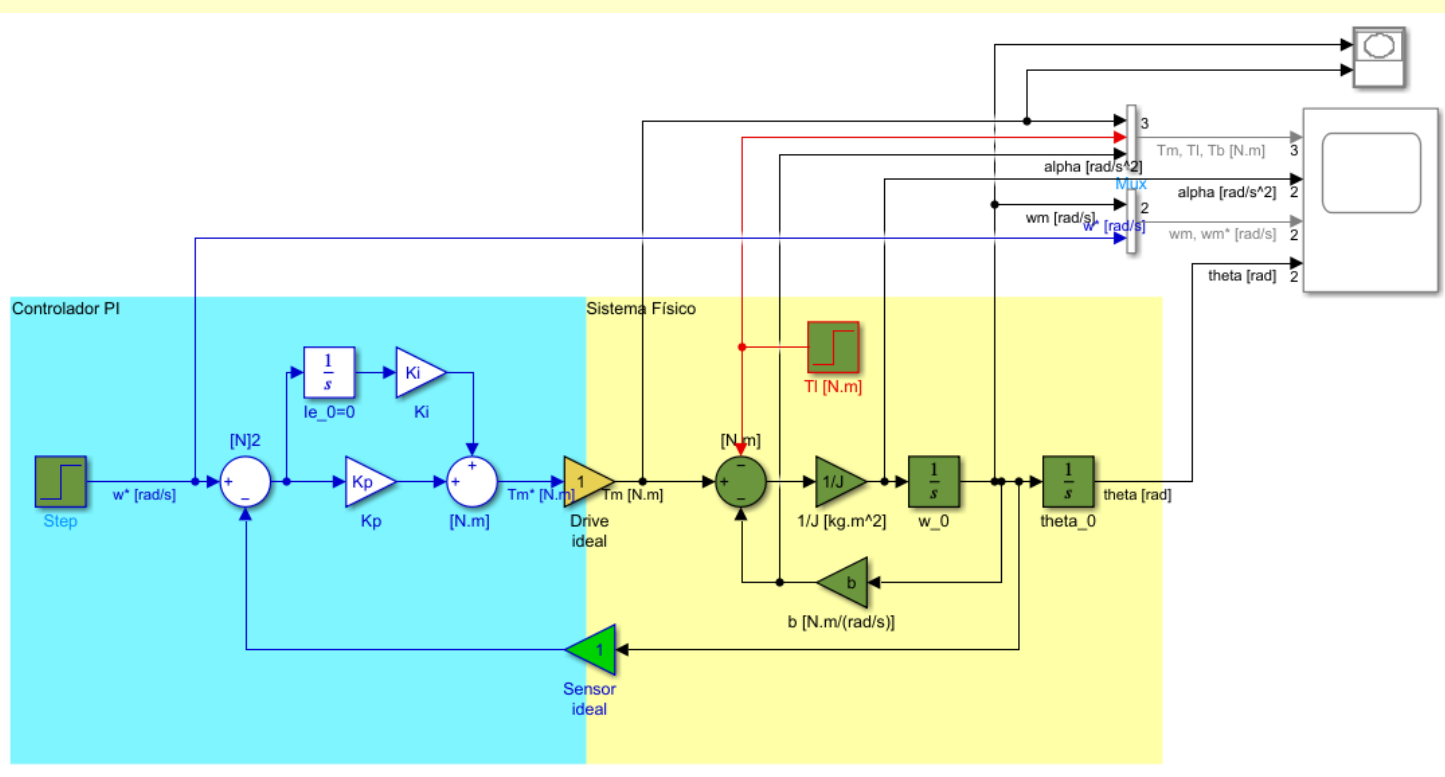
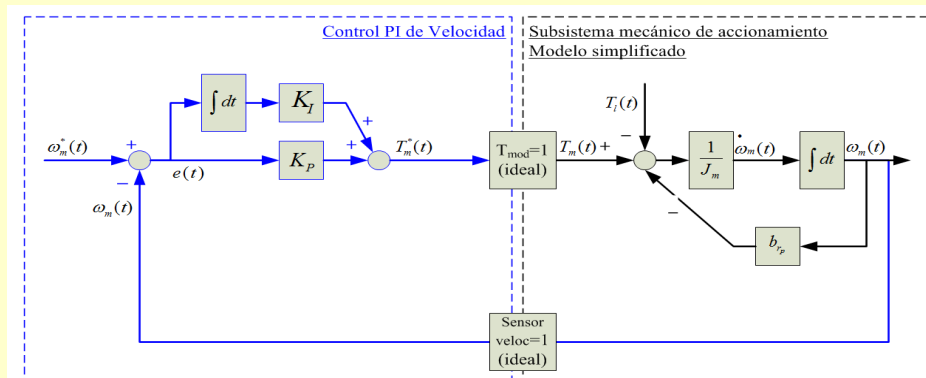
$$\rightarrow (A_1 = 0; B_1 = 1; C_1 = K_I; D_1 = K_P)$$

$$\rightarrow (A_2 = -\frac{b}{J_m}; B_2 = \frac{1}{J_m}; C_2 = 1; D_2 = 0)$$

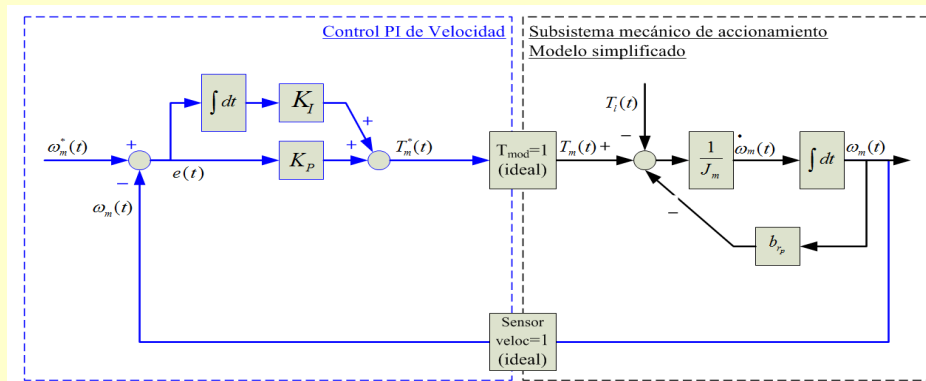
- **Ecuación de Estado completo S en lazo cerrado:** interconexión de subsistemas **(HACER!)**
- **Análisis de Estabilidad** (Subsistema mecánico $S_2 \rightarrow$ Sistema S completo de control retroalimentado): condiciones: **(HACER!)**
- **S SIMULACIÓN (Simulink) (HACER!)**
- **Diseño:** Asignación de autovalores en lazo cerrado para rta. Dinámica definida $(\omega_n, \zeta) \rightarrow (K_I, K_P)$ **(HACER!)**

Control de velocidad en accionamiento

Modelo en Simulink:



Control de velocidad en accionamiento

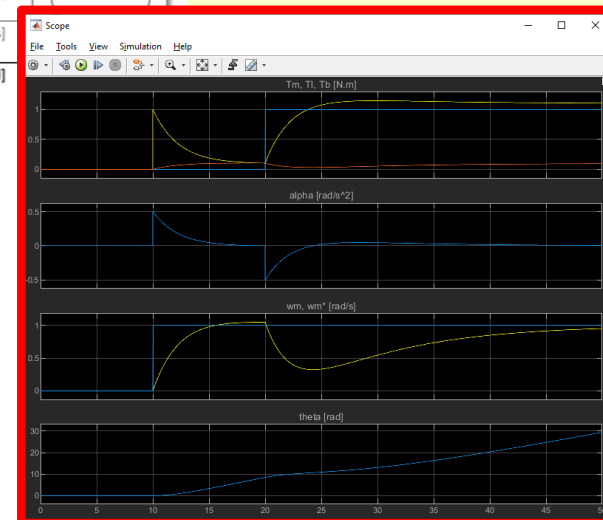
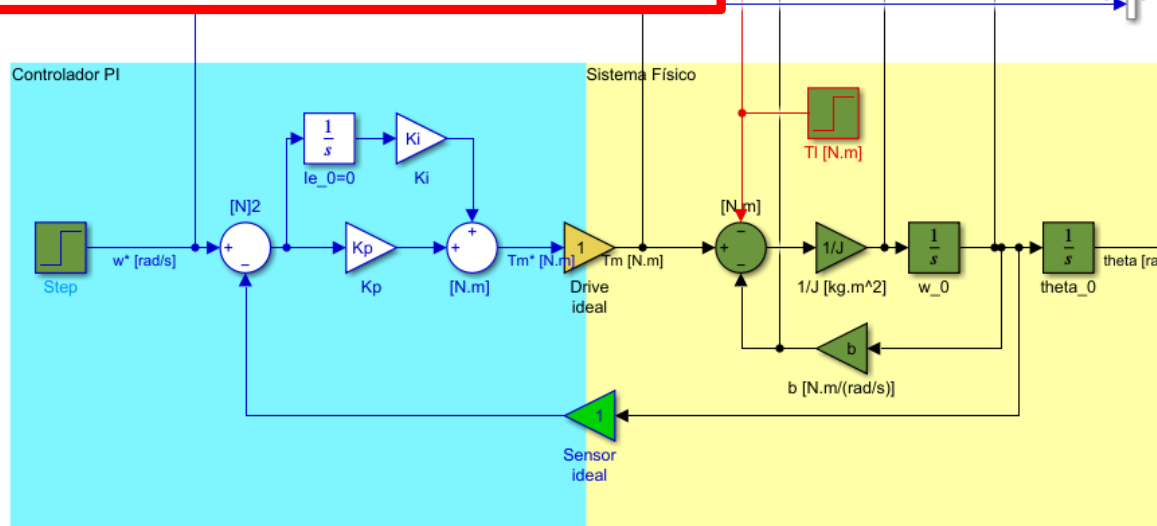


Modelo en Simulink → **SIMULACIÓN**

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

% Parámetros de Control (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1; % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1; % [N.m/rad] Ganancia Integral
```



Representación de Sistemas **No** Lineales

Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \rightarrow \text{SIMULACIÓN Numérica}$$

Donde:

$$u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$$

$$f(x, u, t)_{n \times 1}, h(x, u, t)_{p \times 1}: \text{Campos Vectoriales (NL)}$$

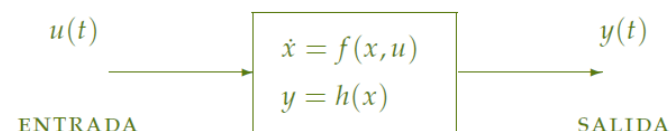


Diagrama de Bloques de Estado Vectorial: ? (hacer)

$$\text{Equilibrios: } \dot{x}(t) \equiv \boxed{0 = f(x(t), u(t)) = f(x_e, u_e)} \rightarrow \text{Puntos de Operación } \{X_o, U_o\}$$

Aproximación LINEAL: para toda variable $z(t)$, asumir $z(t) \equiv Z_o + \Delta z(t)$

PEQUEÑAS DESVIACIONES alrededor de **PUNTOS de OPERACIÓN**

→ expansión en serie de Taylor truncada a 1° orden (despreciar términos de orden superior)

Modelo dinámico Global **NL** → ~ **Espacio de Operación NL (cuasi-estacionario)**
+ **Modelo dinámico Local LTI / Global LTV/LPV**

Representación de Sistemas **No** Lineales

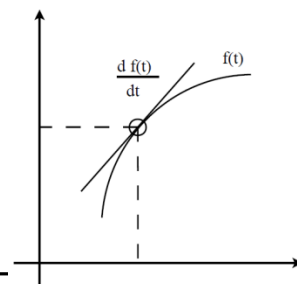
Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \rightarrow \text{SIMULACIÓN Numérica}$$

Aprox. LINEAL: PEQUEÑAS DESVIACIONES en PUNTOS de OPERACIÓN

Asumiendo variables $\mathbf{z}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}_o(t) + \Delta \mathbf{z}(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} + \frac{d\Delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t) + \Delta \mathbf{x}(t), \mathbf{U}_o(t) + \Delta \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{X}_o(t_0) + \Delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rightarrow \boxed{\mathbf{X}_o(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_0; \Delta \mathbf{x}(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}} \\ \mathbf{Y}_o(t) + \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{X}_o(t) + \Delta \mathbf{x}(t)) \rightarrow \boxed{\mathbf{Y}_o(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_o(t); \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{x}(t)} \end{cases}$$



→ **expansión en serie de Taylor truncada a 1° orden** (despreciar términos orden superior)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t) + \Delta \mathbf{x}(t), \mathbf{U}_o(t) + \Delta \mathbf{u}(t)) &\approx \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_o(t) \cdot \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_o(t) \cdot \Delta \mathbf{u}(t) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] \bigg|_o(t) \cdot \Delta \mathbf{x}(t) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_m} \right] \bigg|_o(t) \cdot \Delta \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

→ **separación de modelos**

Representación de Sistemas **No** Lineales

Espacio de ESTADO (Dominio del Tiempo)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \rightarrow \text{SIMULACIÓN Numérica}$$

Aprox. LINEAL: PEQUEÑAS DESVIACIONES en **PUNTOS de OPERACIÓN**

→ separación de modelos: (aproximación)

a) **Espacio Global de Puntos de Operación** $\mathbf{X}_o(t)$:
(Modelo **NL** cuasi-estacionario) ≈ “Equilibrio” Dinámico

$$\frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} = \boxed{\mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \approx \mathbf{0}/const}; \quad \boxed{\mathbf{X}_o(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_0}; \quad \boxed{\mathbf{Y}_o(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_o(t)}$$

($\approx \mathbf{0}/const$: **0** para **estados** que almacenan energía / **const** para integrador puro)

+

b) **Modelo Dinámico Local de Pequeñas Desviaciones** $\Delta\mathbf{x}(t)$ [alrededor de **puntos de Operación** $\mathbf{X}_o(t)$] (Modelo dinámico **LINEAL**: LTV/LPV → **LTI** si Punto Operación FIJO $\mathbf{X}_o$):

$$\boxed{\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} \approx \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_o(t) \cdot \Delta\mathbf{x}(t) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_o(t) \cdot \Delta\mathbf{u}(t)}; \quad \boxed{\Delta\mathbf{x}(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}}; \quad \boxed{\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \Delta\mathbf{x}(t)}$$

Sistemas NO Lineales (NLDS): Ejemplo

Péndulo rígido actuado = 1 Articulación robótica rotativa

Base Inercial y estructura rígida, sometida a perturbación externa g : Gravedad

1 g.d.l. en coord. generalizada $\theta(t) \rightarrow$ ODE NL

Modelo dinámico Global NL:

Modelo: 2° Ley de Newton rotacional, torque recuperador gravitatorio:

$$(m \cdot l^2) \cdot \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = T_{acel}(t) = T_m(t) - (m \cdot g) \cdot \sin \theta(t) \cdot l - b \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Estado: $\left\{ \theta(t) \equiv x_1(t); \frac{d\theta(t)}{dt} \equiv \omega(t) \equiv x_2(t) \right\} \rightarrow x(t) \equiv \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$

Ecuación Diferencial de Estado:

$$\begin{cases} (m \cdot l^2) \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = -(m \cdot g \cdot l) \cdot \sin \theta(t) - b \cdot \omega(t) + T_m(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \equiv \omega(t) \end{cases}$$

Forma Vectorial (NL):

$$\dot{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \sin \theta(t) - \frac{b}{m \cdot l^2} \cdot \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot T_m(t)$$



Modelo Físico Idealizado

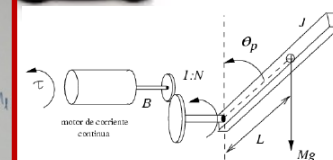
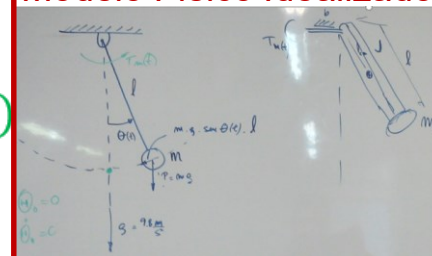
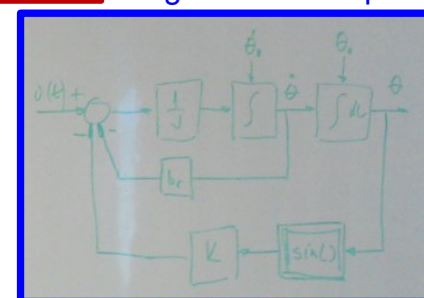


Diagrama de Bloques



Sistemas NO Lineales (NLDS): Ejemplo

Péndulo rígido actuado = 1 Articulación robótica rotativa

Base Inercial y estructura rígida, sometida a perturbación externa g : Gravedad

1 g.d.l. en coord. generalizada $\theta(t) \rightarrow$ ODE NL

Modelo dinámico Global NL:

$$\downarrow \quad \dot{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \sin \theta(t) - \frac{b}{m \cdot l^2} \cdot \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot T_m(t)$$

Puntos de **Equilibrio** Estacionario:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \sin \theta(t) - \frac{b}{m \cdot l^2} \cdot \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot T_m(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_e(t) \equiv 0 \\ (m \cdot g \cdot l) \cdot \sin \theta_e(t) \equiv T_{m_e}(t) \end{cases}$$

Equilibrios Naturales: SIN excitación, $T_{m_e}(t) \equiv 0 \Rightarrow \theta_e(t) = 0$ (Estable); ó $\theta_e(t) = \pi$ (Inestable)

Espacio de Puntos de Operación $\Theta_{O.P.}(t)$ Cuasi-Estacionarios (Modelo NL Algebraico):

$$\begin{cases} \Omega_{O.P.}(t) \approx 0 \\ (m \cdot g \cdot l) \cdot \sin \Theta_{O.P.}(t) \approx T_{m_{O.P.}}(t) \end{cases}$$

Modelo Dinámico Global LPV (Local LTI) para Perturbaciones pequeñas

alrededor de Puntos de Operación: depende de **Parámetro Variable** $\Theta_{O.P.}(t)$

$$\Delta \dot{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \cos \Theta_{O.P.}(t) & -\frac{b}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot \Delta T_m(t)$$

Análisis Lineal: auto valores, estabilidad, función de transferencia, etc. depende de $\Theta_{O.P.}(t)$

$$\text{Polinomio Característico: } p(s) = \left| \begin{matrix} s & -1 \\ \frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \cos \Theta_{O.P.} & s + \frac{b}{m \cdot l^2} \end{matrix} \right| = s^2 + \frac{b}{m \cdot l^2} \cdot s + \frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \cos \Theta_{O.P.}$$

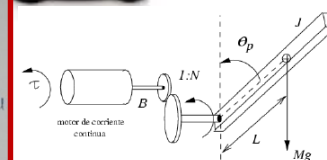
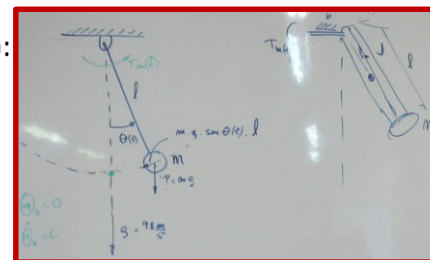
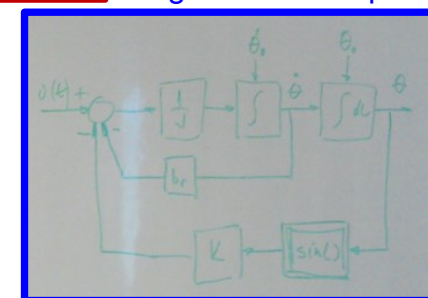


Diagrama de Bloques



Sistemas NO Lineales (NLDS): Ejemplo

Péndulo rígido actuado = 1 Articulación robótica rotativa

Base Inercial y estructura rígida, sometida a perturbación externa g: Gravedad

1 g.d.l. en coord. generalizada $\theta(t) \rightarrow$ ODE NL

Modelo dinámico Global **NL**:

$$\dot{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\frac{(m \cdot g \cdot l)}{m \cdot l^2} \cdot \sin \theta(t) - \frac{b}{m \cdot l^2} \cdot \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot T_m(t)$$



HACER !! (adaptar modelos anteriores para este caso!)

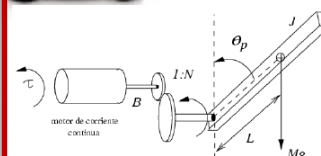
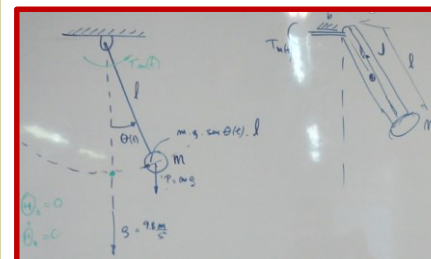
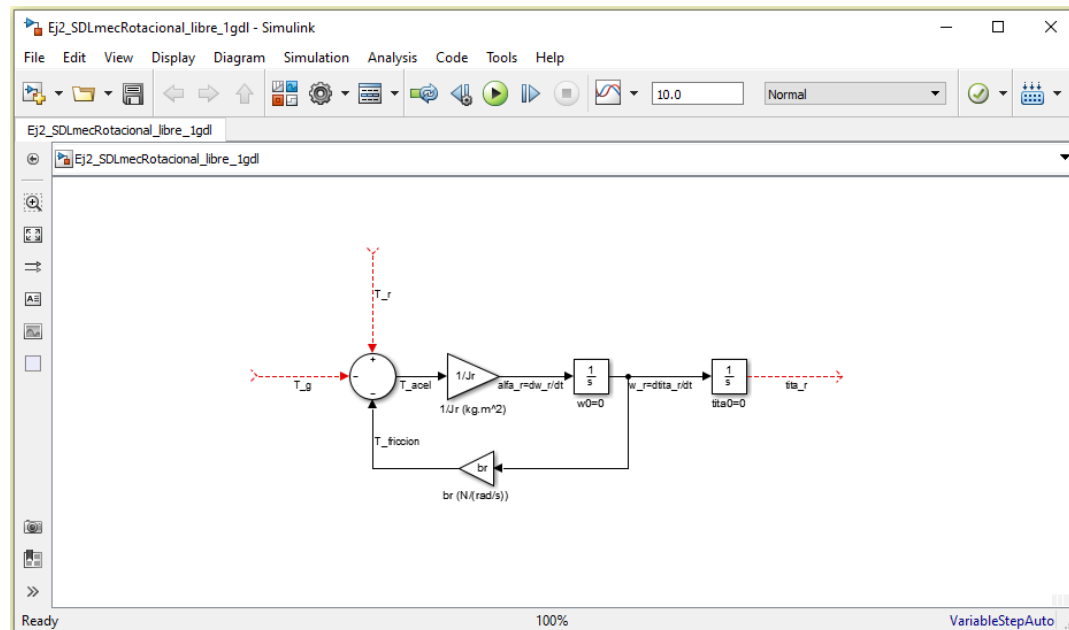
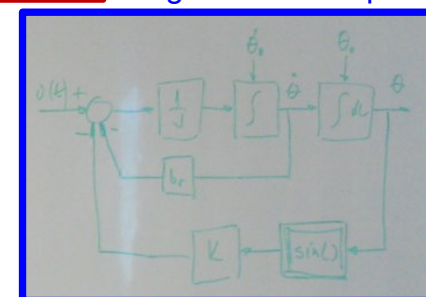
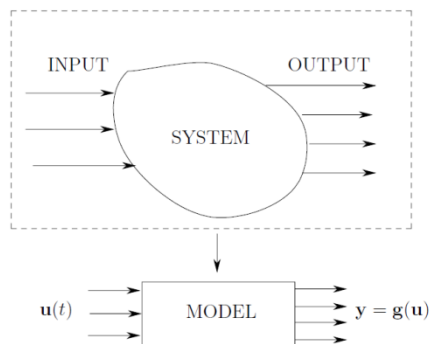
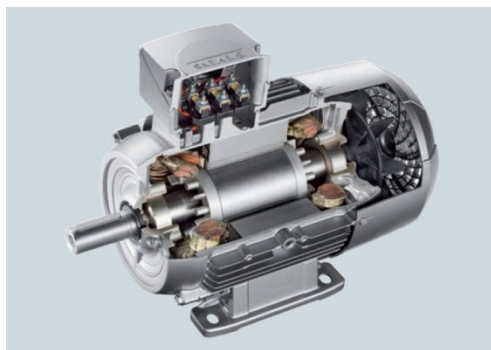


Diagrama de Bloques

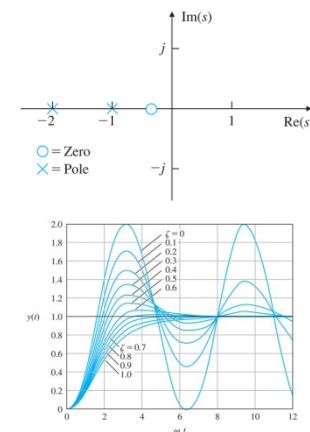
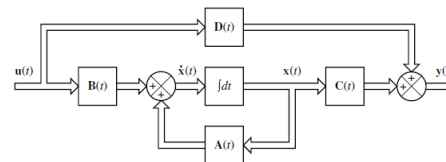


Unidad 2:

Modelado y Análisis en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 2:

A. Sistemas Dinámicos Físicos continuos (SD). Variables de Estado

- Concepto. Entradas y salidas. Sistemas SISO vs. MIMO (MV). Estado interno. Orden de Sistema.
- Representación en Espacio de Estados (SS). Ecuación de Estado, diagrama de bloques de estado.

B. Modelos Lineales Invariantes (LTI). Aplicación. Interconexión

- Propiedades. Función de transferencia. Sistemas eléctricos y mecánicos de 1° y 2° orden.
- Modelos para sistemas interconectados: serie, paralelo, retroalimentación de salida / estado.

C. Respuesta Dinámica. Estabilidad. Discretización. Linealización.

- Respuesta natural y forzada. Discretización. Simulación numérica. Análisis de Estabilidad en SS.
- Sistemas Lineales vs. NO Lineales. Linealización Jacobiana, modelos LPV.

D. Realizaciones Canónicas. Controlabilidad y Observabilidad

- Transformación de cambio de base en SS. Formas o Realizaciones diagonal, controlable, observable.
- Controlabilidad y Observabilidad. Criterios: Gilbert, Kalman. Subsistemas Controlable y Observable.
- Resumen y Consultas.
- Próximos Pasos...

Cambio de variables de estado

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 & u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \quad A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$

Transformación Lineal de Cambio de Base en Espacio de Estado:

$$\boxed{x(t) \equiv P \cdot z(t), \quad \exists P^{-1}} \Leftrightarrow z(t) = P^{-1} \cdot x(t)$$

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{z}(t) = [P^{-1} \cdot A \cdot P] \cdot z(t) + [P^{-1} \cdot B] \cdot u(t); & P \cdot z(t_0) = P \cdot z_0 = x_0 \\ y(t) = [C \cdot P] \cdot z(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A} \cdot z(t) + \tilde{B} \cdot u(t); & z(t_0) = z_0 \\ y(t) = \tilde{C} \cdot z(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Matrices Similares o Semejantes

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= [P^{-1} \cdot A \cdot P]; & \tilde{B} &= [P^{-1} \cdot B] \\ \tilde{C} &= [C \cdot P]; & z_0 &= P^{-1} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Invariancia de Matriz de Transferencia y de Autovalores ante Cambio de Base

$$\begin{aligned} x(t) &\Rightarrow G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D; & (M \cdot N)^{-1} &= N^{-1} \cdot M^{-1}; \det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N) \\ z(t) &\Rightarrow \tilde{G}(s) = \tilde{C} \cdot [s \cdot I - \tilde{A}]^{-1} \cdot \tilde{B} + D = [C \cdot P] \cdot [s \cdot [P^{-1} \cdot P] - [P^{-1} \cdot A \cdot P]]^{-1} \cdot [P^{-1} \cdot B] + D \\ &\quad \therefore \boxed{\tilde{G}(s) = G(s)} \end{aligned}$$

$$\det(\lambda \cdot I - \tilde{A}) = \det(\lambda \cdot [P^{-1} \cdot P] - [P^{-1} \cdot A \cdot P]) = \det(\lambda \cdot I - A)$$

Cambio de variables de estado

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 & u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \quad A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$$

Transformación Lineal de Cambio de Base en Espacio de Estado:

$$\boxed{x(t) \equiv P \cdot z(t), \quad \exists P^{-1}} \Leftrightarrow z(t) = P^{-1} \cdot x(t)$$

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{z}(t) = [P^{-1} \cdot A \cdot P] \cdot z(t) + [P^{-1} \cdot B] \cdot u(t); & P \cdot z(t_0) = P \cdot z_0 = x_0 \\ y(t) = [C \cdot P] \cdot z(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A} \cdot z(t) + \tilde{B} \cdot u(t); & z(t_0) = z_0 \\ y(t) = \tilde{C} \cdot z(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Matrices Similares o Semejantes

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= [P^{-1} \cdot A \cdot P]; & \tilde{B} &= [P^{-1} \cdot B] \\ \tilde{C} &= [C \cdot P]; & z_0 &= P^{-1} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Formas o Realizaciones Canónicas:

- **Diagonal** (o Normal de Jordan si hay autovalores repetidos)
- **Controlable**
- **Observable** (DUALIDAD)

Forma canónica CONTROLABLE

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n)

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) + a_3 y(t) = b_0 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_2 \dot{u}(t) + b_3 u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) s^2 + (b_2 - a_2 b_0) s + (b_3 - a_3 b_0)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} U(s) \rightarrow \text{Facilidad p/ CONTROL (Asignación de Polos):}$$

Var.Aux.: **estado controlable** $\xi(s) \equiv \frac{1}{a(s)} U(s) \rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + b(s) \xi(s)$

$$\ddot{\xi}(t) + a_1 \dot{\xi}(t) + a_2 \xi(t) + a_3 \xi(t) = u(t) \rightarrow A_c: \text{M. Compañera (inferior)}$$

$$y(t) = b_0 u(t) + (b_1 - a_1 b_0) \dot{\xi}(t) + (b_2 - a_2 b_0) \xi(t) + (b_3 - a_3 b_0) \xi(t)$$

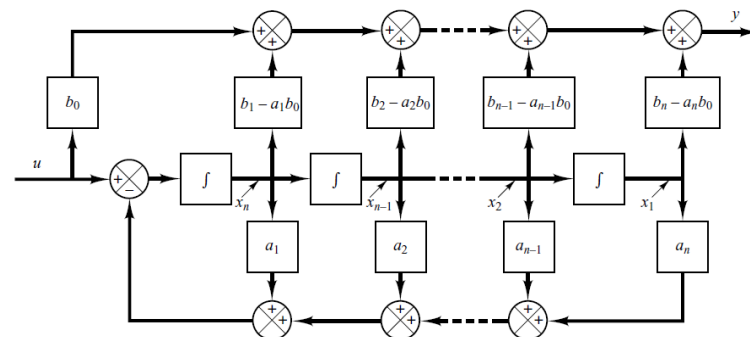
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \quad & \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = b_0; \\ & \mathbf{C}_c = [(b_3 - a_3 b_0) \quad (b_2 - a_2 b_0) \quad (b_1 - a_1 b_0)] \end{aligned}}$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c u(t); \mathbf{x}_c(t_0) = \mathbf{x}_{c0} \\ y(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + b_0 u(t) \end{cases} \rightarrow \text{diagrama de bloques (HACER!)}$$

Forma canónica CONTROLABLE

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n)

→ Diagrama de bloques



$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U(s) \rightarrow \text{Facilidad p/ CONTROL (Asignación de Polos):}$$

Var.Aux.: **estado controlable** $\xi(s) \equiv \frac{1}{a(s)} \cdot U(s) \rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b(s) \cdot \xi(s)$

$$\ddot{\xi}(t) + a_1 \cdot \dot{\xi}(t) + a_2 \cdot \xi(t) + a_3 \cdot \xi(t) = u(t) \rightarrow A_c: \text{M. Compañera (inferior)}$$

$$y(t) = b_0 \cdot u(t) + (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot \dot{\xi}(t) + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot \dot{\xi}(t) + (b_3 - a_3 \cdot b_0) \cdot \xi(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \quad & A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = b_0; \\ & C_c = [(b_3 - a_3 \cdot b_0) \quad (b_2 - a_2 \cdot b_0) \quad (b_1 - a_1 \cdot b_0)] \end{aligned}}$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c \cdot x_c(t) + B_c \cdot u(t); & x_c(t_0) = x_{c0} \\ y(t) = C_c \cdot x_c(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases} \rightarrow \text{Invertir orden } x_c(t) \text{ (HACER!)}$$

Forma canónica **DIAGONAL** (o Modal)

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n , **Polos o Autovalores NO REPETIDOS**)
= SOBREAMORTIGUAMIENTO

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_2 u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) s^2 + (b_2 - a_2 b_0) s + (b_3 - a_3 b_0)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + \left[\frac{r_1}{(s-p_1)} + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_3}{(s-p_3)} \right] \cdot U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL}$$

(expansión en Fracciones Parciales: ver Ogata, Apéndice B)

+Interconex. PARALELO

Definir: $\underline{r_i \equiv c_{di} \cdot b_{di}} \Rightarrow \underline{\dot{x}_{di}(t) = p_i \cdot x_{di}(t) + b_{di} \cdot u(t)}$; $y(t) = \sum_1^3 c_{di} \cdot x_{di}(t) + b_0 \cdot u(t)$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} b_{d1} \\ b_{d2} \\ b_{d3} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_d = [c_{d1} \quad c_{d2} \quad c_{d3}]; \quad D = b_0; \end{aligned}}$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}_d \cdot u(t); \mathbf{x}_d(t_0) = \mathbf{x}_{d0} \\ y(t) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}_d(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases} \rightarrow \text{diagrama de bloques HACER!}$$

Casos Particulares: 1) $c_{di} \equiv 1 \therefore \underline{r_i \equiv b_{di}} \Rightarrow \mathbf{C}_d = [1 \quad 1 \quad 1]; \mathbf{B}_d = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]^T$

2) $b_{di} \equiv 1 \therefore \underline{r_i \equiv c_{di}} \Rightarrow \mathbf{C}_d = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]; \mathbf{B}_d = [1 \quad 1 \quad 1]^T$

Forma canónica JORDAN (gralización.)

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n , **Polos o Autovalores REPETIDOS o múltiples**) ej. $p_1=p_2$ = AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^3 + b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot s^2 + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot s + (b_3 - a_3 \cdot b_0)}{(s - p_1)^2 \cdot (s - p_3)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \left[\frac{r_1}{(s - p_1)^2} + \frac{r_2}{(s - p_1)} + \frac{r_3}{(s - p_3)} \right] \cdot U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL (Bloques de Jordan)}$$

(expansión en Fracciones Parciales: ver Ogata, Apéndice B)

Definir: $x_{d1}(t), \dot{x}_{d1}(t) = p_1 \cdot x_{d1}(t) + x_{d2}(t) \leftarrow \text{"Cascada": } x_{d2}(t) \rightarrow x_{d1}(t)$
 $x_{d2}(t), \dot{x}_{d2}(t) = p_1 \cdot x_{d2}(t) + u(t)$

$$\mathbf{x}_d(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_d = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]; \quad D = b_0;$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}_d \cdot u(t); & \mathbf{x}_d(t_0) = \mathbf{x}_{d0} \\ y(t) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}_d(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases} \rightarrow \text{diagrama de bloques (HACER!)}$$

Forma canónica «DIAGONAL» Conjugad.

Ejemplo: $S_{LT13}(SISO)$: (vale para Orden n , Polos o Autovalores COMPLEJOS (o imaginarios: $\zeta=0$) CONJUGADOS) ej. $p_1=p_2^* \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2$

$$\ddot{y}(t) + a_1.\dot{y}(t) + a_2.y(t) + a_3.y(t) = b_0.\ddot{u}(t) + b_1.\dot{u}(t) + b_2.\dot{u}(t) + b_3.u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0.s^3 + b_1.s^2 + b_2.s + b_3}{s^3 + a_1.s^2 + a_2.s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1.b_0).s^2 + (b_2 - a_2.b_0).s + (b_3 - a_3.b_0)}{(s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2).(s - p_3)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0.U(s) + \left[\frac{r_1.s + r_2}{(s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2)} + \frac{r_3}{(s - p_3)} \right].U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL}$$

Conviente Bloque CONJUGADO parcial 2x2 en f. canónica «Controlable»

$$\boxed{\begin{aligned} x_d(t) \equiv \begin{bmatrix} x_\theta(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C_d &= [r_2 \quad r_1 \quad r_3]; D = b_0; \end{aligned} \end{aligned}}$$

$$S_{LT13}: \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d.x_d(t) + B_d.u(t); & x_d(t_0) = x_{d0} \\ y(t) = C_d.x_d(t) + b_0.u(t) \end{cases} \rightarrow \text{diagrama de bloques (HACER!)}$$

ej. Mecánica Vibratoria/Oscilaciones $\rightarrow$ conviene bloque 2x2 «controlable» en diag. en general (caso contrario: modos y coef. complejos!)

Forma canónica OBSERVABLE

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n)

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_2 \dot{u}(t) + b_3 u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) s^2 + (b_2 - a_2 b_0) s + (b_3 - a_3 b_0)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} U(s) \rightarrow \text{Facilidad p/ Diseño OBSERVADOR:}$$

Var.Aux.: «estado observable $\xi(s) \equiv b(s) \cdot U(s) \rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + \frac{1}{a(s)} \cdot \xi(s)$

$$\dot{x}_{o1}(t) = (b_3 - a_3 b_0) u(t) - a_3 \tilde{y}(t) = \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) - (b_1 - a_1 b_0) \ddot{u}(t) - (b_2 - a_2 b_0) \dot{u}(t) \rightarrow \text{Integrar: } x_{o1}(t) \rightarrow \text{reordenar / despejar} \rightarrow \dot{x}_{o2}(t) = \dots$$

$$\mathbf{x}_o(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \equiv \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} (b_3 - a_3 b_0) \\ (b_2 - a_2 b_0) \\ (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_o = [0 \quad 0 \quad 1]; \quad D = b_0$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_o u(t); \mathbf{x}_o(t_0) = \mathbf{x}_{o0} \\ y(t) = \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) + b_0 u(t) \end{cases} \rightarrow \text{diagrama de bloques (HACER!)}$$

Forma canónica OBSERVABLE

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_2 u(t)$$

$$[s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3] Y(s) = [b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3] U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b'(s)}{a(s)}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \left[b_0 + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \right] U(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \cdot U(s)$$

$$(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) Y(s) - (b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3) U(s) = 0$$

$$s^3 [Y(s) - b_0 U(s)] + s^2 [a_1 Y(s) - b_1 U(s)] + s [a_2 Y(s) - b_2 U(s)] + [a_3 Y(s) - b_3 U(s)] = 0$$

$$Y(s) = b_0 U(s) - \frac{1}{s} [a_1 Y(s) - b_1 U(s)] - \frac{1}{s^2} [a_2 Y(s) - b_2 U(s)] - \frac{1}{s^3} [a_3 Y(s) - b_3 U(s)]$$

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{1}{s} \left[b_1 U(s) - a_1 Y(s) \right] + \frac{1}{s} \left\{ \underbrace{b_2 U(s) - a_2 Y(s)}_{x_{10}} + \frac{1}{s} \underbrace{[b_3 U(s) - a_3 Y(s)]}_{x_{20}} \right\}$$

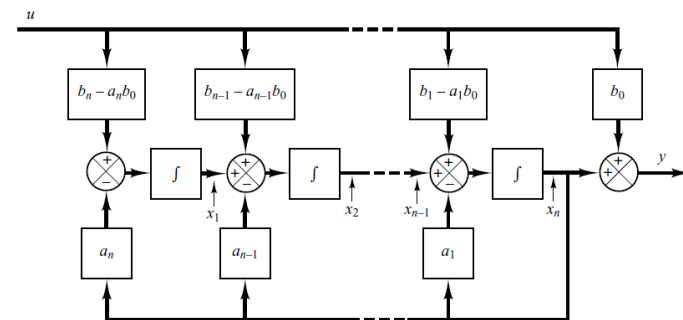
$$y(t) = b_0 u(t) + x_{30}(t) + x_{20}(t) + x_{10}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{30}(t) = b_1 u(t) - a_1 y(t) + x_{20}(t) = (b_1 - a_1 b_0) u(t) - a_1 x_{30}(t) + x_{20}(t) \\ \dot{x}_{20}(t) = b_2 u(t) - a_2 y(t) + x_{10}(t) = (b_2 - a_2 b_0) u(t) - a_2 x_{30}(t) + x_{10}(t) \\ \dot{x}_{10}(t) = b_3 u(t) - a_3 y(t) = (b_3 - a_3 b_0) u(t) - a_3 x_{30}(t) \end{cases}$$

Forma canónica OBSERVABLE

Ejemplo: $S_{LTI3}(SISO)$: (vale para Orden n)

→ Diagrama de bloques



$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U(s) \rightarrow \text{Facilidad p/ Diseño OBSERVADOR:}$$

Var.Aux.: «estado observable $\xi(s) \equiv b(s) \cdot U(s) \rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{1}{a(s)} \cdot \xi(s)$

$$\dot{x}_{o1}(t) = (b_3 - a_3 \cdot b_0) \cdot u(t) - a_3 \cdot \tilde{y}(t) = \ddot{\tilde{y}}(t) + a_1 \cdot \ddot{\tilde{y}}(t) + a_2 \cdot \dot{\tilde{y}}(t) - (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot \ddot{u}(t) + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot \dot{u}(t) \rightarrow \text{Integrar: } x_{o1}(t) \rightarrow \text{reordenar / despejar} \rightarrow \dot{x}_{o2}(t) = \dots$$

$$\mathbf{x}_o(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \equiv \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} (b_3 - a_3 \cdot b_0) \\ (b_2 - a_2 \cdot b_0) \\ (b_1 - a_1 \cdot b_0) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_o = [0 \quad 0 \quad 1]; \quad D = b_0$$

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \cdot \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_o \cdot u(t); \mathbf{x}_o(t_0) = \mathbf{x}_{o0} \\ y(t) = \mathbf{C}_o \cdot \mathbf{x}_o(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases} \rightarrow \text{Invertir orden } \mathbf{x}_o(t) \text{ (HACER!)}$$

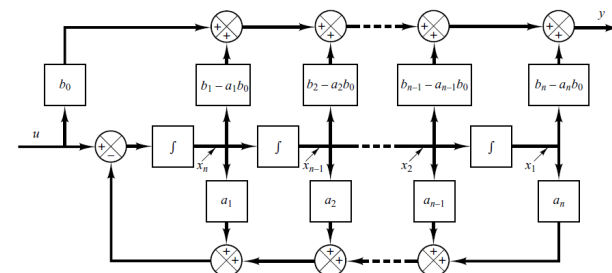
DUALIDAD: F. Controlable / Observable

Forma canónica **CONTROLABLE**

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \cdot u(t); & \mathbf{x}_c(t_0) = \mathbf{x}_{c0} \\ y(t) = \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{x}_c(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = b_0;$$

$$\mathbf{C}_c = [(b_3 - a_3 \cdot b_0) \quad (b_2 - a_2 \cdot b_0) \quad (b_1 - a_1 \cdot b_0)]$$

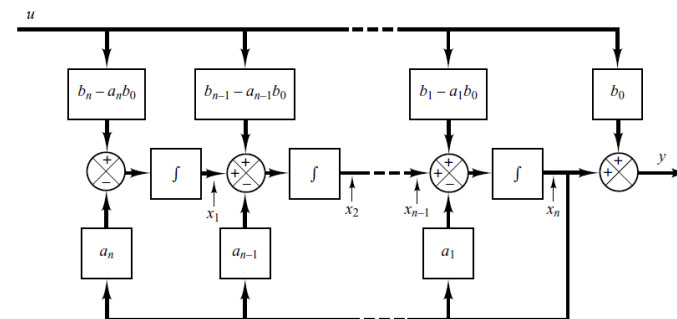


Forma canónica **OBSERVABLE**

$$S_{LTI3}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \cdot \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_o \cdot u(t); & \mathbf{x}_o(t_0) = \mathbf{x}_{o0} \\ y(t) = \mathbf{C}_o \cdot \mathbf{x}_o(t) + b_0 \cdot u(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_o(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \equiv \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} (b_3 - a_3 \cdot b_0) \\ (b_2 - a_2 \cdot b_0) \\ (b_1 - a_1 \cdot b_0) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_o = [0 \quad 0 \quad 1]; \quad D = b_0$$



$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T; \quad \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_c^T; \quad \mathbf{C}_o = \mathbf{B}_c^T;$$

Formas o Realizaciones Canónicas / TF

Ejercicios:

Obtener las formas canónicas diagonal, controlable y observable

1. Ogata 5th Ed., Section 9-2 Ejemplo 9-1 (pág. 652) [**Sist. orden 2 c/1 cero**]
2. Ogata 5th Ed., Ej. A-9-1 (pág. 688) hasta A-9-5 (pág. 699)
3. Filtro cuña 2° orden: $H(s) \equiv \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2}$

Diagonalizar:

1. Ogata 5th Ed., Section 9-2 Ejemplo 9-2 (pág. 654-655) [**Sist. orden 3**]

Transformar: SS $\leftrightarrow$ TF (c/Matlab)

1. Ogata 5th Ed., Section 9-3 Ejemplo Progr. 9-1 (pág. 656-657) [**Sist. orden 3**]
2. Ogata 5th Ed., Section 9-3 Ejemplo 9-3 (pág. 658) y 9-4 (pág. 659)

Controlabilidad

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 & u(t)_{m \times 1}, & x(t)_{n \times 1}, & y(t)_{p \times 1} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) & & A_{n \times n}, & B_{n \times m}, & C_{p \times n}, & D_{p \times m} \end{cases}$$

Sist. CONTROLABLE (controlabilidad completa de estado)

S_{LTIn} CONTROLABLE en t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito.

Criterio de Controlabilidad Completa de Estado en el Espacio de Estado (Kalman)

S_{LTIn} CONTROLABLE

$\Leftrightarrow$ vectores $B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B$ Linealmente Independientes

$\Leftrightarrow$ Rango de $C = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B] = n$ (Matriz de Controlabilidad)

$\rightarrow$ Existe alguna Ley de Control que permite ubicar TODOS los Polos (Modos)

Criterio de Controlabilidad de Salida

S_{LTIn} CONTROLABLE en la salida

$\Leftrightarrow$ vectores $C \cdot B \quad C \cdot A \cdot B \quad \dots \quad C \cdot A^{n-1} \cdot B \quad D$ Linealmente Independientes

$\Leftrightarrow$ Rango de $C = [C \cdot B \quad C \cdot A \cdot B \quad \dots \quad C \cdot A^{n-1} \cdot B \quad D] = m$ (Matriz de Controlab. Salida)

Observabilidad

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0 & u(t)_{m \times 1}, & x(t)_{n \times 1}, & y(t)_{p \times 1} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) & & A_{n \times n}, & B_{n \times m}, & C_{p \times n}, & D_{p \times m} \end{cases}$$

Sist. OBSERVABLE (consid. Sist. NO Forzado: $u(t)=0$)

S_{LTIn} OBSERVABLE en t_0 si, con el sistema en el estado inicial $x(t_0)$, es posible **determinar este estado** a partir de la observación de la salida durante un intervalo de **tiempo finito**.

$\leftrightarrow$ cada transición de estado afecta a cada elem. del vector de salida

Criterio de Observabilidad en el Espacio de Estado (Kalman)

S_{LTIn} Completamente OBSERVABLE

$\Leftrightarrow$ **vectores** $C \quad C.A \quad \dots \quad C.A^{n-1}$ Linealmente Independientes

$\Leftrightarrow$ Rango de $O = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix} = n$ (**Matriz de Observabilidad**)

$\rightarrow$ Existe observador que permite reconstruir TODO el Estado a partir de salida

Controlabilidad y Observabilidad

Ejercicios: *Evaluar la controlabilidad y observabilidad de los sigs. Sistemas:*

1. Ogata 5th Ed., Section 9-6 Ejemplo 9-10 y 9-11 (pág. 677-678)
2. Ogata 5th Ed., Section 9-7 Ejemplo 9-14 y 9-15 (pág. 684-685)
3. Ogata 5th Ed., Ej. A-9-16 (pág. 716) hasta A-9-17 (pág. 717)