

Trabajo Práctico Unidad 2: Modelado y análisis en el espacio de estado

Preparó: Verónica Vallejos / Revisó: Ing. Gabriel Julián

Ejercicios: Espacio de Estados $\leftrightarrow$ Función de Transferencia

1. Circuito LR:

Representar en el espacio de estados y obtener la matriz de transferencia.

Considerar $e_i \rightarrow i$ vs $e_i \rightarrow e_o$.

2. Circuito RC:

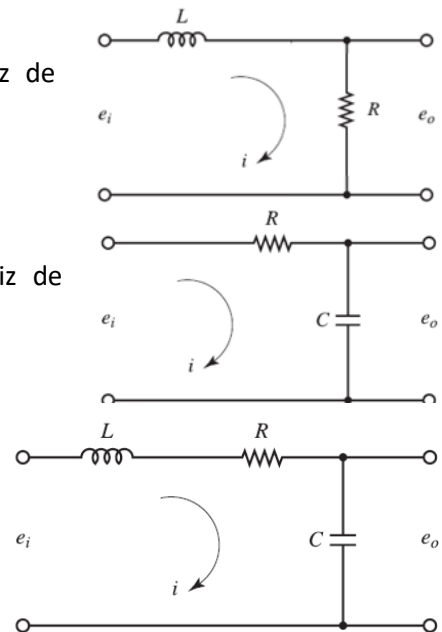
Representar en el espacio de estados y obtener la matriz de transferencia.

Considerar $e_i \rightarrow i$ vs $e_i \rightarrow e_o$.

Circuito LRC:

Representar en el espacio de estados y obtener la matriz de transferencia.

Considerar $e_i \rightarrow i$ vs $e_i \rightarrow e_o$.



3. Representar en el espacio de estados el sistema de orden n expresado mediante una ecuación diferencial lineal (E.D.O. orden n) donde la función de excitación no contiene términos derivados.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

4. Transformación de modelos matemáticos con MATLAB: función tf2ss

Obtener con la función $[A, B, C, D]=tf2ss(num,den)$ la representación en el espacio de estado de la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 5s + 160}$$

5. Transformación de modelos matemáticos con MATLAB: función ss2tf

Obtener la función de transferencia a partir de las siguientes ecuaciones en el espacio de estados, con la función $[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu)$, donde iu se debe especificar para sistemas con más de una entrada.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -120 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

6. Demostrar que, para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2\dot{u} + b_3u$$

las ecuaciones de estado y de salida son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

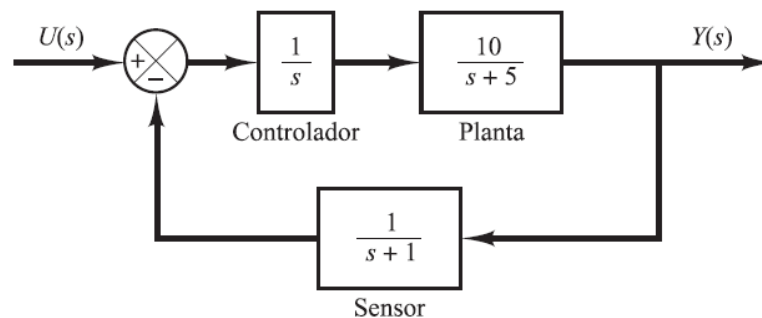
Donde las variables de estado se definen mediante:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u & \beta_0 &= b_0 \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u & \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u & \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ & & \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \end{aligned}$$

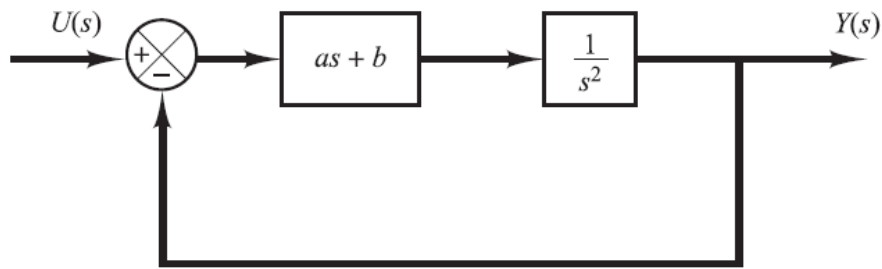
7. Obtener la ecuación en el espacio de estados y la ecuación de salida definida por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 + s^2 + s + 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

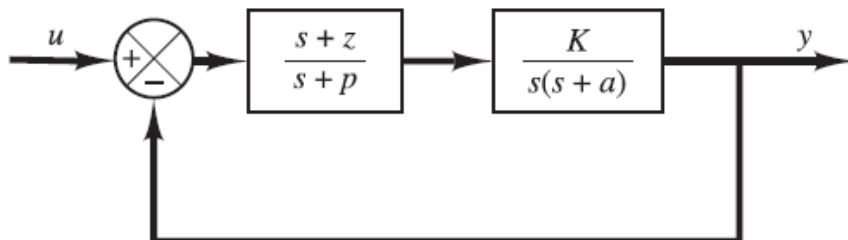
8. Obtener la función de transferencia y el modelo en el espacio de estados del sistema de control que aparece en la siguiente figura.



9. Obtener la función de transferencia y el modelo en el espacio de estados para el sistema que aparece en la siguiente figura.



10. Obtener la función de transferencia y el modelo en el espacio de estados para el sistema que aparece en la siguiente figura.

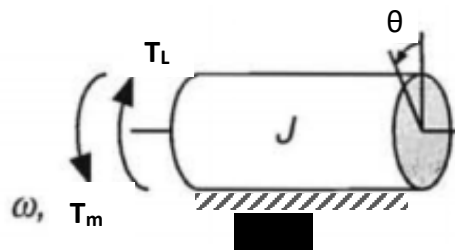


11. Obtener la función de transferencia del sistema definido por:

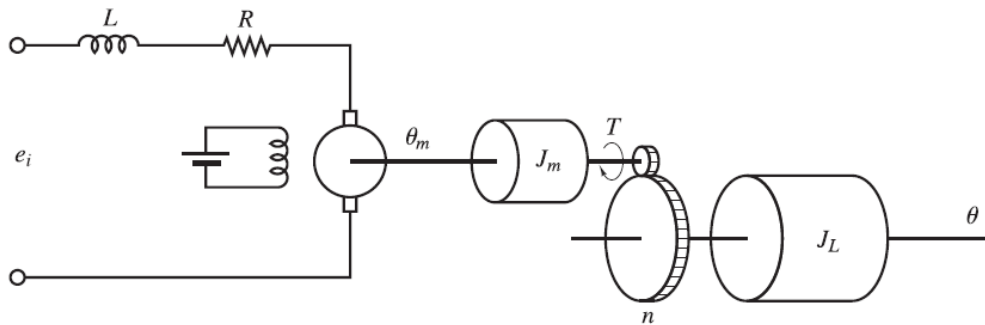
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12. Obtener las ecuaciones en el espacio de estado y la función de transferencia del siguiente sistema: Inercia rotacional con fricción (modelo mecánico 1 g.d.l. de accionamiento).



13. Obtener las ecuaciones en el espacio de estado y la función de transferencia del siguiente sistema: Un servomotor cc controlado por inducido mueve una carga con un momento de inercia J_L . El par desarrollado por el motor es T . El momento de inercia del rotor del motor es J_m . Los desplazamientos angulares del rotor del motor y del elemento de carga son θ_m y θ , respectivamente. La razón de engranaje es $n = \theta/\theta_m$.



14. Obtener el modelo en el espacio de estados del siguiente sistema: Filtro cuña ("notch") de 2° orden:

$$H(s) \equiv \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2}$$

Ejercicios: Análisis de Estabilidad → Rta. Dinámica (Simulación)

15. Simular el Circuito LR (ejercicio 1) en Simulink con los siguientes parámetros.

$$L = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$R = 2,3 \text{ } \Omega$$

Considerar distintos valores iniciales de las variables de estado y distintos valores de entrada escalón.

16. Simular el Circuito RC (ejercicio 2) en Simulink con los siguientes parámetros.

$$C = 22 \text{ } \mu\text{F}$$

$$R = 2,3 \text{ } \Omega$$

Considerar distintos valores iniciales de las variables de estado y distintos valores de entrada escalón.

17. Simular el Circuito LRC (ejercicio 3) en Simulink con los siguientes parámetros.

$$L = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$C = 22 \text{ } \mu\text{F}$$

$$R = 2,3 \text{ } \Omega$$

Considerar distintos valores iniciales de las variables de estado y distintos valores de entrada escalón.

18. Simular la Inercia rotacional con fricción (ejercicio 13) en Simulink con los siguientes parámetros.

$$J = 0,0005 \text{ kg m}^2$$

$$b = 0.0003 \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}}$$

Considerar distintos valores iniciales de las variables de estado y distintos valores de torque de entrada y torque de carga.

19. Simular el servomotor cc controlado por inducido (ejercicio 14) en Simulink con los siguientes parámetros.

$$J_m = 49 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

$$b_m = 1,347 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}}$$

$$L = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$R = 3,2 \text{ } \Omega$$

Considerar distintos valores iniciales de las variables de estado y distintos valores de tensión de entrada y de inercia de carga.

Ejercicios: Formas o Realizaciones Canónicas

20. Sistema de orden 2 con 1 cero.

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la forma canónica observable y en la forma canónica diagonal, del sistema definido por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

21. Obtenga la forma canónica controlable de la representación en el espacio de estados para el sistema representado mediante la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

22. Obtenga la forma canónica observable de la representación en el espacio de estados para el sistema representado mediante la siguiente función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

23. Obtenga la representación en el espacio de estados en la forma canónica diagonal del sistema representado por la siguiente función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

Donde $p_i \neq p_j$.

24. Obtenga la forma canónica de Jordan de la representación en el espacio de estados del sistema representado por la siguiente función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4)(s + p_5) \dots (s + p_n)}$$

Que contiene un polo triple en $s = p_1$. (Se supone que, a excepción de las tres primeras p , que son iguales, las p_i son diferentes entre sí.)

25. Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados del siguiente sistema.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25.04s + 5.008}{s^3 + 5.03247s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

26. Obtener las formas canónicas diagonal, controlable y observable del siguiente sistema: Filtro cuña ("notch") de 2° orden:

$$H(s) \equiv \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

27. Diagonalizar el siguiente sistema en el espacio de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

28. Obtener la representación en el espacio de estado de la siguiente función de transferencia mediante MATLAB

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10}$$

29. Obtenga la función de transferencia del sistema definido mediante las ecuaciones en el espacio de estados siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5.008 & -25.1026 & -5.03247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25.04 \\ -121.005 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

30. Calcular las 4 funciones de transferencia ($Y1(s)/U1(s)$, $Y2(s)/U1(s)$, $Y1(s)/U2(s)$ y $Y2(s)/U2(s)$) del siguiente sistema mediante Matlab.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios: Controlabilidad y Observabilidad

31. Evaluar la controlabilidad del siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

32. Evaluar la controlabilidad del siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

33. Evaluar la controlabilidad y observabilidad del siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

34. Demostrar que el siguiente sistema no es completamente observable.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Siendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [4 \quad 5 \quad 1]$$

35. Analice la controlabilidad del sistema siguiente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

36. Un mismo sistema se puede representar en el espacio de estado de las siguientes dos formas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1) \text{ Forma canónica controlable}$$

$$y = [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(2) Forma canónica observable

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que la representación en el espacio de estados de la forma (1) produce un sistema que es controlable pero no observable.

Demostrar que la representación en el espacio de estados de la forma (2) da un sistema que no es completamente controlable pero sí observable.

Explicar qué provoca las diferencias en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema.