

Respuesta Dinámica Exacta de Modelo LTI en DT Continuo $t[s] \in \mathbb{R}$: Solución Analítica de la Ecuación Diferencial de Estado LTI

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \text{Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R}$$

A) Respuesta **Natural** (causada solo por **Estado Inicial** NO Nulo, SIN Excitación posterior):

Solución de la Ecuación Diferencial de Estado **Autónoma u Homogénea**

$$u(t) \equiv 0 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{x}(t) = A \cdot x(t)}; \quad \boxed{x(t_0) = x_0}; \quad y(t) = C \cdot x(t)$$

1. **Solución en DT**: Proponemos solución general $x(t) =$ serie de potencias de $(t - t_0)$:

$$x(t) = b_0 + b_1 \cdot (t - t_0) + b_2 \cdot (t - t_0)^2 + b_3 \cdot (t - t_0)^3 + \dots + b_k \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (t - t_0)^k$$

Evaluamos $x(t)$ en instante inicial $t = t_0$: $x(t_0) = b_0 = x_0 = I \cdot x_0$

a) Derivamos $x(t)$ con respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot (t - t_0) + 3 \cdot b_3 \cdot (t - t_0)^2 + \dots + k \cdot b_k \cdot (t - t_0)^{k-1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b_k \cdot (t - t_0)^{k-1}$$

b) Reemplazamos $x(t)$ propuesta en la Ecuación Diferencial de Estado Autónoma original:

$$\dot{x}(t) = A \cdot b_0 + A \cdot b_1 \cdot (t - t_0) + A \cdot b_2 \cdot (t - t_0)^2 + \dots + A \cdot b_k \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A \cdot b_k \cdot (t - t_0)^k$$

Comparamos a) y b) $\rightarrow$ igualamos coeficientes de cada término de igual potencia de $(t - t_0)$:

$$b_1 = A \cdot b_0 \quad \therefore \quad \boxed{b_1 = A \cdot x_0}; \quad 2 \cdot b_2 = A \cdot b_1 \quad \therefore \quad \boxed{b_2 = \frac{A^2 \cdot x_0}{2!}}; \quad 3 \cdot b_3 = A \cdot b_2 \quad \therefore \quad \boxed{b_3 = \frac{A^3 \cdot x_0}{3!}}; \quad \dots$$

$$k \cdot b_k = A \cdot b_{k-1} \quad \therefore \quad \boxed{b_k = \frac{A^k \cdot x_0}{k!}}$$

Reemplazamos coeficientes en la solución general $x(t)$ propuesta originalmente:

$$x(t) = I \cdot x_0 + A \cdot x_0 \cdot (t - t_0) + \frac{A^2 \cdot x_0}{2!} \cdot (t - t_0)^2 + \dots + \frac{A^k \cdot x_0}{k!} \cdot (t - t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot x_0}{k!} \cdot (t - t_0)^k$$

$$x(t) = \left[I + A \cdot (t - t_0) + \frac{A^2 \cdot (t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot (t - t_0)^k}{k!} + \dots \right] \cdot x_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot (t - t_0)^k}{k!} \right] \cdot x_0$$

Función exponencial natural *escalar*: $e^{a \cdot t} = 1 + a \cdot t + \frac{a^2 \cdot t^2}{2!} + \dots + \frac{a^k \cdot t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \cdot t^k}{k!}$

$$\text{Función Exponencial Matricial: } \boxed{\Phi_A(t) = e^{A \cdot t} \equiv I + A \cdot t + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}}$$

$$\text{Respuesta Natural: } \boxed{x(t) = e^{A \cdot (t - t_0)} \cdot x(t_0) = \Phi_A(t - t_0) \cdot x(t_0)}$$

$\Phi_A(t - t_0)$: **Matriz de Transición de Estado**, evolución de Estado inicial $x_0 = x(t_0) \rightarrow$ Estado actual $x(t)$.

2. **Solución en DF**: aplicando Transformada de Laplace $\mathcal{L}$

DT: $t[s] \in \mathbb{R} \rightarrow$ **DF** $s[\text{rad/s}] = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t) = A \cdot x(t)\}$$

$$s \cdot X(s) - x(0) = A \cdot X(s)$$

$$[s \cdot I - A] \cdot X(s) = x(0)$$

$$\boxed{X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0)}, \quad [s \cdot I - A]^{-1} = \mathcal{L}\{e^{A \cdot t}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0)\}$$

$$\text{Respuesta Natural: } \boxed{x(t) = e^{A \cdot (t - 0)} \cdot x(0) = \Phi_A(t - 0) \cdot x(0)}$$

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \text{Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R}$$

B) Respuesta **Forzada** (causada por **Excitación**) + Respuesta **Natural** (causada por Estado Inicial):

Solución de la Ecuación Diferencial de Estado Completa, **Forzada o No Homogénea**

$$u(t) \neq 0 \therefore \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

1. **Solución en DT**: Reordenamos y pre-multiplicamos por exponencial $e^{-A \cdot t}$:

$$e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Por otro lado:

- $\frac{d}{dt} [e^{A \cdot t}] = A \cdot e^{A \cdot t} = e^{A \cdot t} \cdot A$ (Producto sí es Conmutativo, Propiedad de **Exponencial Matricial**)
- $\frac{d}{dt} [e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot \dot{x}(t) - A \cdot e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)]$

Reemplazamos en ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt} [e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Integramos la ecuación con respecto a t en ambos miembros:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} [e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)] \cdot d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$[e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)] \Big|_{t_0}^t = e^{-A \cdot t} \cdot x(t) - e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + e^{A \cdot t} \cdot \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada: Integral de Convolución de Duhamel

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + e^{A \cdot (t-t_0)} * B \cdot u(t-t_0)$$

2. **Solución en DF**: aplicando Transformada de Laplace $\mathcal{L}$

$$\text{DT: } t[s] \in \mathbb{R} \rightarrow \text{DF } s[\text{rad/s}] = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\}$$

$$s \cdot X(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$[s \cdot I - A] \cdot X(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0) + [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B \cdot U(s), \quad [s \cdot I - A]^{-1} = \mathcal{L}\{e^{A \cdot t}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) = [s \cdot I - A]^{-1} \cdot x(0) + [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B \cdot U(s)\}$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada:

$$x(t) = e^{A \cdot (t-0)} \cdot x(0) + e^{A \cdot (t-0)} * B \cdot u(t-0)$$

Respuesta Dinámica Aproximada de Modelo LTI en DT Discretizado con MUESTREO Periódico $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ y excitación c/ ZOH

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x(t_0) = x_0; \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \text{Tiempo Continuo } t[s] \in \mathbb{R}$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada: Integral de Convolución de Duhamel

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Muestreo Periódico: $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$
($T_s[s] \in \mathbb{R}$: Periodo de Muestreo)

Evalúamos Respuesta exacta entre instantes correspondientes a dos muestras consecutivas de tiempo:

$$t_0 \equiv t_k \equiv k \cdot T_s; \quad t \equiv t_{k+1} \equiv (k+1) \cdot T_s \rightarrow t - t_0 = T_s$$

$$x((k+1) \cdot T_s) = e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Aproximamos $u(\tau) \cong u(k \cdot T_s)$ "Constante" en intervalo: $\forall \tau \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s] \rightarrow$ fuera de la integral:

Nota: esto equivale a considerar la salida de un **retenedor de orden 0 (ZOH, Zero-Order Hold)** como entrada $u(t)$, válido para la acción de control desde un controlador digital a través de un Convertidor D/A (retardo $\sim T_s/2$).

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot d\tau \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$

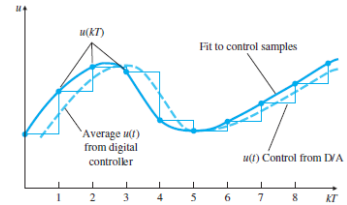
Resolvemos la integral definida del 2º término por **sustitución de variables**:

$$\eta \equiv (k+1) \cdot T_s - \tau \therefore \tau = (k+1) \cdot T_s - \eta; \quad d\tau = -d\eta;$$

$$\tau = k \cdot T_s \Rightarrow \eta = T_s;$$

$$\tau = (k+1) \cdot T_s \Rightarrow \eta = 0$$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$



Ecuación en Diferencias de Estado en DT Discretizado $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong \Phi_A(T_s) \cdot x(k \cdot T_s) + \Gamma_{A,B}(T_s) \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación en Diferencias de Estado}$$

$$y(k \cdot T_s) = C \cdot x(k \cdot T_s) + D \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación Algebraica de Salida}$$

Cálculo de Matrices de Sistema (o de Transición) $\Phi_A(T_s)$ y de Entrada $\Gamma_{A,B}(T_s)$ en DT Discretizado:

$$\Phi_A(T_s) \equiv e^{A \cdot T_s} = I + A \cdot T_s + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{2!} + \dots + \frac{A^k \cdot T_s^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{k!}$$

$$= I + A \cdot T_s \cdot \left[I + \frac{A \cdot T_s}{2!} + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{3!} + \dots + \frac{A^{k-1} \cdot T_s^{k-1}}{k!} + \dots \right] = I + A \cdot T_s \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right]$$

$$\Phi_A(T_s) \equiv e^{A \cdot T_s} = I + A \cdot T_s \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] = I + A \cdot T_s \cdot \Psi_A(T_s)$$

$$\Gamma_{A,B}(T_s) \equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\int_0^{T_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot \eta^k}{k!} \right) \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \int_0^{T_s} \eta^k \cdot d\eta \right] \cdot B$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \left(\frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_0^{T_s} \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{T_s^{k+1}}{k+1} \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \cdot T_s \cdot B$$

$$\Gamma_{A,B}(T_s) \equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right] \cdot T_s \cdot B = \Psi_A(T_s) \cdot T_s \cdot B$$

Caso **particular**: $\exists A^{-1}$, A no singular o invertible:

$$\Gamma_{A,B}(T_s) \equiv \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B = \left[A^{-1} \cdot e^{A \cdot \eta} \Big|_0^{T_s} \right] \cdot B = A^{-1} \cdot (e^{A \cdot T_s} - I) \cdot B = \left[A^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} \cdot T_s^{k+1}}{(k+1)!} \right] \cdot B$$

Definimos $\Psi_A(T_s)$ como:

$$\Psi_A(T_s) \equiv \left[I + \frac{A \cdot T_s}{2!} + \frac{A^2 \cdot T_s^2}{3!} + \dots + \frac{A^{k-1} \cdot T_s^{k-1}}{k!} + \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} + \dots \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot T_s^k}{(k+1)!} \right]$$

$$\cong I + \frac{A \cdot T_s}{2} \cdot \left\{ I + \frac{A \cdot T_s}{3} \cdot \left[I + \frac{A \cdot T_s}{4} \cdot \left(I + \dots \frac{A \cdot T_s}{N-1} \cdot \left(I + \frac{A \cdot T_s}{N} \right) \right) \right] \right\}$$

Aproximación recursiva hasta factor N , tiene **mejores propiedades numéricas** [ver Papers Moler and van Loan, 1978, 2003].

→ Calculamos:

$$\Phi_A(T_s) = I + A \cdot T_s \cdot \Psi_A(T_s)$$

$$\Gamma_{A,B}(T_s) = \Psi_A(T_s) \cdot T_s \cdot B$$

IMPORTANTE: Función **c2d** en Matlab, Control Systems Toolbox

En la práctica, la evaluación de estas matrices $\Phi_A(T_s)$ y $\Gamma_{A,B}(T_s)$ se puede realizar **numéricamente** a partir de las matrices A, B y el Periodo de Muestreo T_s mediante la **función c2d** en Matlab, Control Systems Toolbox: `sysd = c2d(sysc, Ts)`.