

2.5 Linealización de sistemas dinámicos no lineales

En las secciones anteriores hemos visto como representar los sistemas lineales. En esta sección se estudia una manera de obtener una aproximación lineal de un sistema no lineal. La primera pregunta que uno se debe hacer es ¿cómo se representa un sistema no lineal?

Los objetivos son 1) obtener representaciones o soluciones lineales aproximadas de las funciones o sistemas no lineales, 2) entender el comportamiento de un sistema no lineal al ser perturbado alrededor de una solución o punto de operación nominal.

2.5.1 Representación de sistemas no lineales

Se considera un sistema dinámico no-lineal se puede representar por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma general en donde f y h son funciones que representan la dinámica del sistema y la salida de este dados en términos de la variable de estado x y la entrada u .

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.68)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (2.69)$$

donde f es una función vectorial de $n \times 1$ elementos, expresada en términos de un *vector de estado* lo cual es una variable de estado de dimensión $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. El número de estados n es conocido como el *orden* del sistema. La solución $x(t)$ de la ecuación (2.68) corresponde a una curva en el espacio de estado donde t varía de cero hasta infinito. Esta curva es conocida como la *trayectoria de estado*.

2.5.2 Interpretación gráfica

Analogía entre una función no lineal de cierta curvatura cuya representación lineal es la línea recta que pasa tangente en uno de sus puntos y las ecuaciones que describen un sistema dinámico no lineal cuya representación lineal se obtiene a partir de las derivadas parciales de la misma función con respecto a sus variables.

Considere que una determinada función $f(t)$ es no lineal. Por lo tanto, esta se representa como una gráfica con ciertas curvaturas dependiendo de los términos que contenga.

El comportamiento no lineal de esta curva obedece a cada uno de los términos que contiene. Suponiendo que se desea analizar la forma lineal en que se comporta esta curva, entonces se deberá realizar un análisis en un solo punto del espacio. Esto se puede describir gráficamente por medio de una línea tangente a ese punto, la cual describirá linealmente a la función. La línea representa la derivada de la función analizada en cierto punto específico, lo cual es la representación lineal de la curva en un punto específico.

El análisis en un sistema dinámico no lineal se realiza de manera similar. Las ecuaciones de los sistemas no lineales se pueden entender de la misma forma que se describe este comportamiento gráfico de una curva. La interpretación gráfica de una linealización es encontrar la forma de la línea tangente en un punto de la función de una curva. Este punto se tomará en cuenta como el punto de operación o el punto de equilibrio.

curva $x(t)$ entonces la tangente en el punto de linealización $t = t_1$ es $x(t_1)$, y la línea que describe el comportamiento del sistema en dicho punto es la tangente a dicho punto. En una

vecindad alrededor de este punto se dice que la tangente no cambia, de igual manera sucederá alrededor del punto de operación para el cual se encuentra la linealización del sistema dinámico.

Poner una grafica describiendo esta interpretación usando matlab.

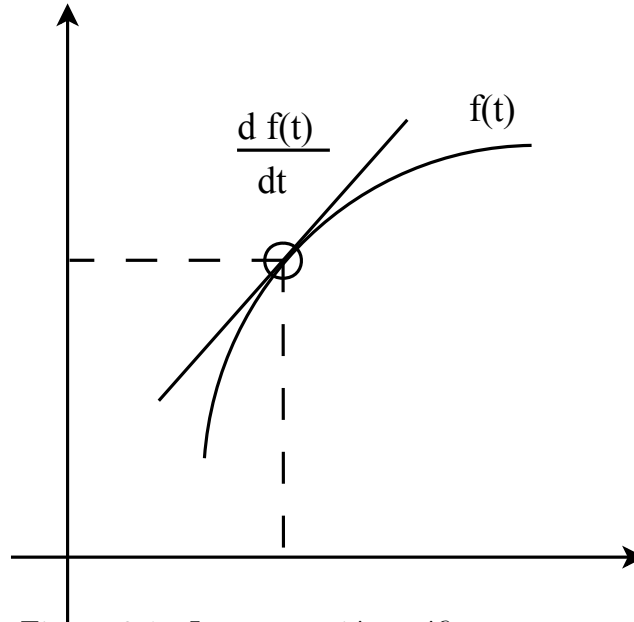


Figura 2.1. Interpretación gráfica

2.5.3 Representación aproximada de una función no lineal

Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función no lineal escalar de n variables de estado x .

En forma general, esta función no lineal se puede expresar como una representación aproximada lineal alrededor de un punto establecido mediante una expansión en series de Taylor de la siguiente manera. Suponiendo que la función se quiere linealizar alrededor del punto x_0 , su expansión en series de Taylor es:

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_0 \delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_0 \delta x^2 + \dots \quad (2.70)$$

Algunas funciones no lineales típicas son por ejemplo:

1. cuando una ecuación contiene un término *bilineal*, el cual se define como aquel en donde aparecen multiplicándose el vector de la variable de estado y el control $x^T Nu$.
2. cuando aparece un término *cuadrático*, expresado como $x^T Ax$ el cual describe una representación de elevar al cuadrado una variable de estado vectorial, $x \in \mathbb{R}^n$ y donde la ganancia esta dada por la matriz A .

Asimismo, otras funciones no lineales pueden ser, términos donde aparezcan funciones trigonométricas, exponenciales, productos de más de una variable de estado, entre otras muchas.

2.5.4 Sistemas no lineales, puntos de equilibrio y **puntos de operación**

Un punto de equilibrio del sistema dinámico representa las condiciones de las variables del sistema, en donde este se encuentra estático. Por ejemplo, en el caso de una partícula si se encuentra en reposo sin alguna fuerza externa que representa una entrada, entonces se dice que se encuentra en un punto de equilibrio. Entonces, un punto de equilibrio está dado en $\dot{x} = f(x^0, u^0) \equiv 0$.

2.5.5 **Linealización aproximada** de un sistema no lineal

Mediante una expansión en series de Taylor se obtendrá un modelo aproximado lineal del sistema no lineal que se considera.

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.71)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (2.72)$$

en el cual los puntos de equilibrio dados por (X, U, Y) son constantes.

A continuación, se integra (2.71)-(2.72), y representa como una ecuación integral en función de $x(t)$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (2.73)$$

$$y(t) = h\left(x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau\right) \quad (2.74)$$

Asumiendo que el sistema opera en su punto de equilibrio, tenemos que $x(t) = x(t_0) = X$, $u(t) = U$, $y(t) = h(X) = Y$. El estado del sistema es constante ya que se encuentra en equilibrio.

Considerense ciertas perturbaciones en el estado de equilibrio del sistema de la siguiente manera

$$x(t_0) = x_0 + \delta x_0 = X + \delta x_0 \quad , \quad u(t) = U + \delta u(t) \quad (2.75)$$

Estas perturbaciones hacen que tanto el estado del sistema $x(t)$ como la salida $y(t)$ tengan cambios con respecto a los valores de equilibrio en que anteriormente operaban,

$$x(t) = X + \delta x_0 + \int_{t_0}^t f(X + \delta x_0(\tau), U + \delta u(\tau)) d\tau \quad (2.76)$$

$$y(t) = h(X + \delta x_0(\tau)) \quad (2.77)$$

A partir de lo que se definió en (2.75), y de los puntos de equilibrio (operación) del sistema se puede obtener el valor del estado perturbado de las ecuaciones anteriores como $\delta x(t) = x(t) - X$

y en la salida obtenemos de manera similar $\delta y(t) = y(t) - Y$, lo que resulta en

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t f(X + \delta x_0(\tau), U + \delta u(\tau)) d\tau \quad (2.78)$$

$$\delta y(t) = h(X + \delta x_0(\tau)) - h(X) \quad (2.79)$$

De ahí se realiza una aproximación lineal de estas ecuaciones por medio del teorema de expansión en series de Taylor para cada función $f(\cdot, \cdot)$ en el punto de operación o equilibrio (X, U)

$$f(X + \delta x(t), U + \delta u(t)) = f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} \delta u(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \quad (2.80)$$

$$h(X + \delta x(t)) = h(X) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \delta x(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \quad (2.81)$$

en donde los términos de las derivadas parciales deben ser evaluados en el punto de equilibrio (operación) (X, U) y $\mathcal{O}(n \geq 2)$ son términos de orden superior $n \geq 2$. Por lo tanto, realizando esto obtenemos los valores de los estados perturbados en las ecuaciones (2.78)-(2.79).

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} \delta u(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \right) d\tau \quad (2.82)$$

$$\delta y(t) = \left(\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \delta x(t) + \mathcal{O}(n \geq 2) \right) \quad (2.83)$$

Los términos de orden superior de la serie de Taylor se truncan de lo cual se obtiene una aproximación lineal de los valores de $\delta x(t)$ y $\delta y(t)$.

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} \delta u(t) \right) d\tau \quad (2.84)$$

$$\delta y(t) = \left(\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \delta x(t) \right) \quad (2.85)$$

Una vez que se realiza este procedimiento,

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t \left(A\delta x(t) + B\delta u(t) \right) d\tau \quad (2.86)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) \quad (2.87)$$

El sistema se puede representar en forma de ecuaciones de estado como era su forma original derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad , \quad x(t_0) = \delta x_0 \quad (2.88)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) \quad (2.89)$$

de donde las matrices son

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)}, \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \quad (2.90)$$

y la dimensión de cada matriz o vector de derivadas parciales que se requiera en cada caso depende de las dimensiones de la variable x y de la variable u .

Otra forma:

Específicamente, si la dinámica de la planta está dada por

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t), t); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.91)$$

Si aplicamos cierto control que llamaremos *control nominal*, el sistema dinámico se moverá y generará una trayectoria de estado x_n . El funcionamiento para este control u_n será en un llamado *punto nominal*, el cual también se conoce como su *punto de operación*.

Suponga que el término $f(x, u)$ es una función no lineal, a partir de este modelo no lineal normalmente no es posible obtener una representación de las matrices $\{A, B, C, D\}$. A pesar de esto, es posible obtener una representación equivalente a partir de este sistema no lineal, el cual será linealizado en el punto nominal o en algún punto de equilibrio establecido para el sistema. También se hace esta linealización para por ejemplo, poder representar el modelo como una función de transferencia.

Un *punto de equilibrio* del sistema dinámico representa las condiciones de las variables del sistema, en donde este se encuentra estático. Por ejemplo, en el caso de una partícula si se encuentra en reposo sin alguna fuerza externa que representa una entrada, entonces se dice que se encuentra en un punto de equilibrio. Entonces, un punto de equilibrio está dado en $\dot{x} = f(x^0, u^0) \equiv 0$.

Si queremos linealizar el sistema en la ecuación (2.91) en algún punto nominal dado como (u_n, x_n) . Tenemos el sistema expresado como $\dot{x}_i = f_i(x, u, t)$. Supongamos que inicialmente el sistema está en el punto nominal y ante ciertas perturbaciones pequeñas estas variables se expresan como

$$x(t) = x^0(t) + \delta x(t) \quad (2.92)$$

$$u(t) = u^0(t) + \delta u(t) \quad (2.93)$$

Por lo tanto, substituyendo en (2.91), tenemos que la ecuación se puede escribir como

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(x_i^0 + \delta x_i) = f_i(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u) \quad (2.94)$$

Para realizar la linealización analíticamente en este sistema expresado de forma general, debemos realizar una expansión en series de Taylor de $f(\cdot, \cdot)$ para expresar los términos que tienen las perturbaciones de manera separada. La serie de Taylor se representa como la serie infinita expresada a continuación

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!} (x - a) \quad (2.95)$$

Una expansión en series de Taylor representa este mismo concepto, aunque para el caso que se hace la expansión los términos de orden superior se consideran despreciables por ser muy pequeños.

Entonces, la expansión en serie de Taylor de $f(\cdot, \cdot)$ en el punto de operación o nominal $x^0(t), u^0(t)$

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(x_i^0 + \delta x_i) \approx f_i(x^0, u^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \delta u + \mathcal{O}(n > 2) \quad (2.96)$$

en donde los términos de las derivadas parciales deben ser evaluados en el punto nominal (u_0, x_0) . Por lo tanto, realizando esto obtenemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Como sabemos que

$$\frac{d}{dt}x_i^0 = f_i(x^0, u^0) \quad (2.98)$$

por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) \approx \left. \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|_0 \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \delta u \quad (2.99)$$

Entonces para expresar el **sistema linealizado** podemos escribir lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\delta x = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u} \right|_0 \end{bmatrix} \delta u = A(t)\delta x + B(t)\delta u \quad (2.100)$$

Las matrices A y B serán por lo tanto matrices de dimensión $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Expandiendo los términos de las ecuaciones anteriores tenemos que

$$A(t) \equiv \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 \end{bmatrix}, \quad B(t) \equiv \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right|_0 & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right|_0 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Si la **ecuación de salida** $y = g(x, u)$ es no-lineal también y $y(t) = y^0 + \delta y$, entonces

$$\frac{d}{dt}\delta x = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial x} \right|_0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial u} \right|_0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial u} \right|_0 \end{bmatrix} \delta u = C(t)\delta x + D(t)\delta u \quad (2.102)$$

Por lo tanto, el sistema no-lineal (2.91) se puede expresar como un **modelo linealizado** de la forma

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (2.103)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se representa como

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \Big|_{x_n, u_n} ; \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^T \Big|_{x_n, u_n} \quad (2.104)$$

Si el punto de operación o nominal es un punto de **equilibrio** del sistema $x^0(t)$, $u^0(t)$ son cero, entonces las matrices de las ecuaciones diferenciales para obtener el grupo de matrices $\{A, B, C, D\}$ será constante. (sistema lineal e invariante en el tiempo).

2.5.6 Ejemplos

Ejemplo 2.5.1. El modelo de un sistema dinámico no lineal se describe por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{x_2^2} \quad (2.105)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 u \quad (2.106)$$

Encuentre el sistema linealizado asumiendo que el punto de equilibrio está dado cuando $u = u_n = 0$, y las condiciones iniciales son $x_{1n}(0) = x_{2n}(0) = 1$.

El sistema agrupado en la forma matricial es escrito como sigue

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2^2} \\ x_1 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = f(x, u) \quad (2.107)$$

donde las funciones f_1 y f_2 describen cada una de los argumentos de las ecuaciones del modelo.

Primero obtendremos los valores de equilibrio (operación) del sistema en los que posteriormente evaluaremos la linealización para obtener la aproximación lineal del sistema.

Assumiendo el valor de equilibrio que se proporciona como información $u = u_n = 0$, podemos obtener el punto de equilibrio de cada variable de estado como sigue:

Aplicando la forma de linealizar el sistema mediante la linealización aproximada, obtenemos lo siguiente:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_n, u_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x_n, u_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_n, u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x_n, u_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{x_n, u_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{x_2^3} \\ u & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x_n, u_n} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_n, u_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{x_n, u_n} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{x_n, u_n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \end{bmatrix}^T \Big|_{x_n, u_n} = \begin{bmatrix} 0 & (-t + 1) \end{bmatrix}^T \quad (2.109)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_n, u_n} z + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_n, u_n} u = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ -t + 1 \end{bmatrix} v \quad (2.110)$$

Ejemplo 2.5.2. Considere el sistema dinámico no lineal que describe un péndulo simple

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0 \quad (2.111)$$

1. Asigne $q_1 = \theta$ y $q_2 = \dot{\theta}$. Encuentre la ecuación $\dot{q} = f(q)$.
2. Encuentre un modelo lineal en el punto nominal $\theta = \theta_n = 0$.
3. Verifique (b) usando la igualdad $\sin\theta \approx \theta$.

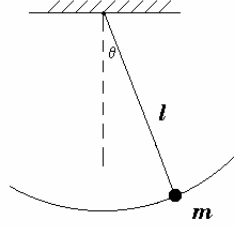


Figura 2.2. Péndulo simple

Si sabemos que las variables del modelo dado son θ y $\dot{\theta}$ podemos definir las variables de estado de nuestro modelo como $q_1 = \theta$, y $q_2 = \dot{\theta}$.

Pero lo más importante en este sistema no lineal es cómo escribimos la relación $\dot{q} = f(q)$?

Primero, definimos el vector como es dado

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

de la definición anterior, sabemos que $\dot{q}_1 = \dot{\theta}$, y por lo tanto $\dot{q}_1 = q_2$.

Entonces si $q_2 = \dot{\theta}$, $\dot{q}_2$ está definido por $\dot{q}_2 = \ddot{\theta}$. De esta manera, de la ecuación (2.111) despejamos

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (2.113)$$

de esta forma, substituyendo las variables en las ecuaciones tenemos que

$$f(q) = \dot{q} = \begin{bmatrix} q_2 \\ -\frac{g}{l}\sin q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

esta es la función no lineal por lo tanto debemos linealizarlo ya que se nos pide encontrar un modelo lineal para $\theta = 0$.

De acuerdo al método de linealización, debemos derivar parcialmente con respecto a cada una de las variables usadas para encontrar la matriz A linealizada

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_0 = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \bigg|_0 \quad (2.115)$$

Para obtener finalmente la linealización debemos evaluar esta matriz en los valores nominales de las variables de nuestro sistema dinámico. Sabemos que estas son θ y $\dot{\theta}$. Recordemos que al evaluar en un punto nominal, este puede representar ya sea algún punto de equilibrio o un punto de operación del sistema dinámico que estamos considerando.

Pero para entender a qué nos referimos es importante saber qué representan esta variable físicamente. La variable θ representa el ángulo con respecto a la posición vertical del péndulo colgado. Por lo tanto, si $\theta = 0$, esto representa que el péndulo está en una posición estática. Debemos evaluar esta matriz en los valores de $\theta = 0$ y como $\dot{\theta}$ representa la derivada de esto, asimismo es $\dot{\theta} = 0$.

Al evaluar (2.115) en estos valores nominales, tenemos que el modelo es

$$\dot{z} = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_0 z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} z \quad (2.116)$$

Podemos verificar lo anterior directamente del modelo del sistema usando la igualdad $\sin\theta \approx \theta$. Por lo tanto, considerando esto la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2.117)$$

Además, si $q_1 = \theta$, y $q_2 = \dot{\theta}$ tenemos que esto es equivalente a lo que se hizo antes

$$\dot{q}_2 + \frac{g}{l}q_1 = 0 \quad ; \quad \dot{q} = f(q) = \begin{bmatrix} q_2 \\ -\frac{g}{l}q_1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} z \quad (2.118)$$

2.6 Transformaciones de la representación del sistema dinámico

Las representaciones de espacio de estado no son únicas ya que hay libertad para escoger cuál es el vector de variables de estado que estamos tomando en cuenta. Por lo regular, la selección de las variables de estado se hace en forma arbitraria, y no es tan importante el orden.

En realidad, es posible de un modelo dado poder hacer una transformación a otro modelo equivalente en función de sus propiedades de entrada-salida.

2.6.1 Transformación entre una función de transferencia y la ecuación de estado

Supongamos que inicialmente tenemos una función de transferencia dada por la expresión general

$$(2.119)$$

La expresión anterior está en el dominio de Laplace. Dicha representación puede ser escrita como una ecuación en función de las variables de entrada $U(s)$ y las variables de salida del sistema $Y(s)$ de la siguiente manera.

Ésta a su vez, puede ser transformada al dominio del tiempo

Esta ecuación diferencial es la que representa la dinámica del sistema.