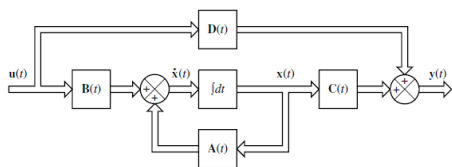


Unidad 3:

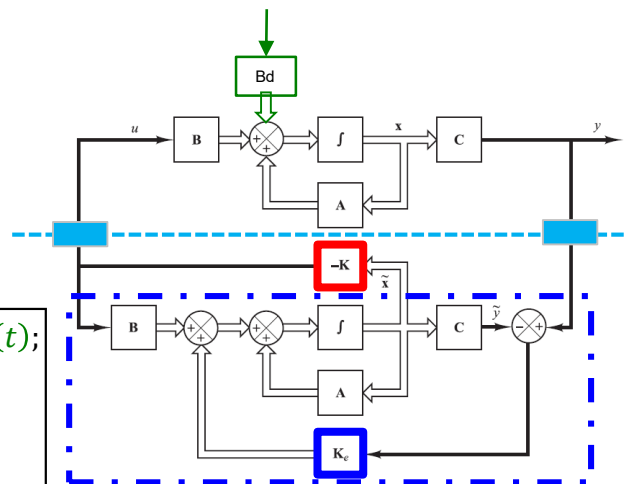
Control en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot K_c \cdot e(t) + B_c \cdot k_{c1} \cdot y^*(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ \dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0; \\ e(t_0) \equiv x_0 \end{matrix}$$



Control de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan General:

1. Accionamientos: Conversión de energía y Control

- Aplicaciones y Fundamentos. Conversión de energía eléctrica y eléctrica-mecánica.

2. Modelado y Análisis de SD en Espacio de Estado

- Modelos lineales. Respuesta dinámica. Estabilidad. Controlabilidad y Observabilidad.

3. Control de SD en Espacio de Estado

- Retroalimentación de Estado. Observadores. Control discreto.

4. Control de Accionamientos de CC

- Modelado, simulación. Control de velocidad / posición, control de corriente / torque.

5. Control de Accionamientos de CA

- Modelado, simulación. Control de velocidad / posición, control escalar / vectorial de corriente / torque.

Control de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 3:

A. Objetivos de Control y Especificaciones

- Estabilidad. Seguimiento de consignas. Rechazo de perturbaciones. Robustez.

B. Retroalimentación de Estado

- Asignación de polos de lazo cerrado.
- Selección de polos: criterios y esfuerzo de control asociado.
- Ejemplos

C. Estimación y Observadores

- Observadores asintóticos de estado.

D. Diseño. Implementación Discreta: Controlador Digital

- Ejercicios.

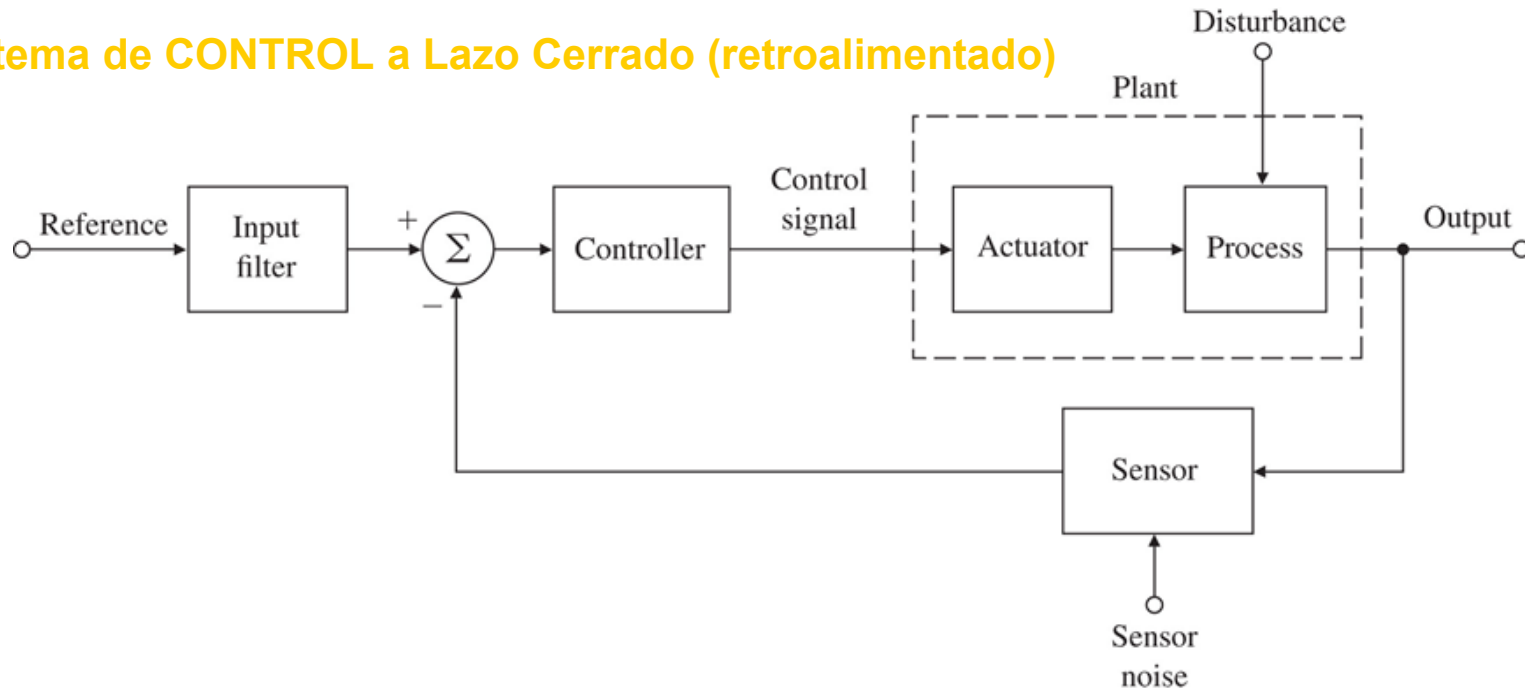
E. Aplicaciones

- Subsistemas eléctricos y mecánicos de accionamientos. Simulación numérica.

CONTROL: Objetivos y Especificaciones

1. **ESTABILIDAD** → Seguridad y Disponibilidad para operación.
2. **ROBUSTEZ** frente a **Incertidumbre de Modelo** o Perturbaciones externas.
3. **DESEMPEÑO (Performance)** → Optimización (índices o especificaciones)
 - Rechazo a Perturbaciones o Cargas (desensibilización de su influencia en la salida)
 - Seguimiento de Consignas o Comandos de Referencia
 - Esfuerzos o acciones de Control “razonables” (→ “costo” a pagar por desempeño)

Sistema de CONTROL a Lazo Cerrado (retroalimentado)



CONTROL: Objetivos y Especificaciones

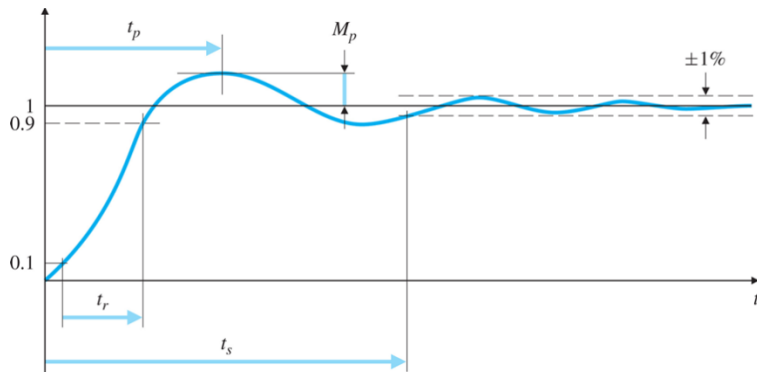
OBJETIVOS: del Sistema de CONTROL a Lazo Cerrado (retroalimentado)

1. **ESTABILIDAD**
2. **ROBUSTEZ.**
3. **DESEMPEÑO (Performance) → Optimización (índices o especificaciones)**

ESPECIFICACIONES en DT ↔ Espacio de Estado:

DT: Rta. a Escalón de Referencia
(requerimientos transitorios)

UBICACIÓN DE POLOS O VALORES PROPIOS de LAZO CERRADO (Lugar PERMITIDO en Plano s vs. Restricción)



Rta. Dominante 2° orden sin ceros
(aproximación)

Análisis:

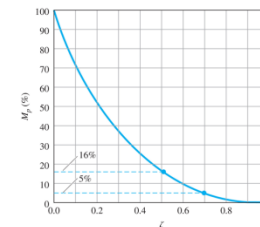
Diseño = síntesis:

rise time

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$

+ overshoot



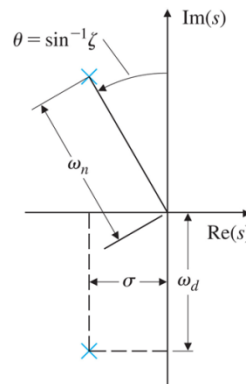
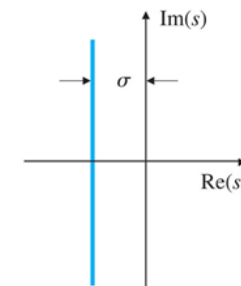
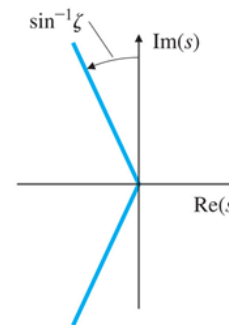
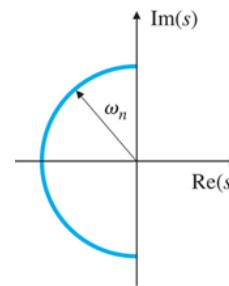
+

settling time = **Ubicación**

$$t_s \approx \frac{4.6}{\sigma}$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s}$$

$$\zeta \geq \zeta(M_p)$$



RETROALIMENTACIÓN de Estado (SISO)

$$S_{LTIn} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 & x(t)_{n \times 1}, u_c(t)_{1 \times 1}, y(t)_{1 \times 1} \\ y(t) = C \cdot x(t) + D_c \cdot u_c(t) \end{cases}, \quad A_{n \times n}, B_{c_{n \times 1}}, C_{1 \times n}, D_{1 \times 1}$$

Ley de Control: Retroalim. de ES

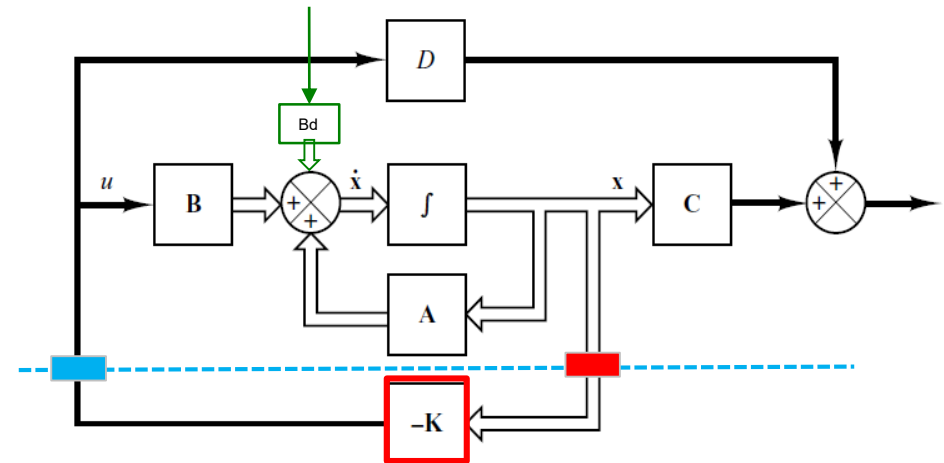
$$u_c(t) \equiv -K_c \cdot x(t); \quad y^*(t) \equiv 0$$

$$K_{c_{1 \times n}} = [k_{c1} \quad k_{c2} \quad \dots \quad k_{cn}]$$

Asumiendo: $x(t)$ “accesible”

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot (-K_c \cdot x(t)) + B_d \cdot u_d(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D_c \cdot (-K_c \cdot x(t)) \end{cases}$$



$$S_{LTIn\ cl} \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = [C - D_c \cdot K_c] \cdot x(t) \end{cases}$$

RETROALIMENTACIÓN de Estado (SISO)

Método: POLE PLACEMENT = UBICACIÓN o ASIGNACIÓN DE POLOS

ASIGNACIÓN o UBICACIÓN arbitraria de TODOS los n POLOS de Lazo Cerrado

a) Método intuitivo: **Sustitución Directa**

polinomio característico a lazo cerrado (polos especificados vs. ganancias),
igualar coeficientes (forma analítica) → Sistema Ecuaciones →
→ **Determinar matriz de ganancias de retroalimentación de estado K**

b) Método sistemático: **Fórmula de Ackermann**

Ref.: Ogata, Modern Control Systems Ed.5, Sect. 10,2 p. 730;

Matlab Control System Toolbox, función **acker** (SISO) → **place** (MIMO).

Condición necesaria y suficiente: Planta c/Estado Completamente CONTROLABLE

↔ **Esfuerzo de Control asociado: evaluar !**

(ver ejercicios diseño servosistemas tipo 1 a continuación)

RETROALIMENTACIÓN de Estado (SISO)

Método: POLE PLACEMENT = UBICACIÓN o ASIGNACIÓN DE POLOS

ASIGNACIÓN o UBICACIÓN arbitraria de TODOS los n POLOS de Lazo Cerrado

a) Método intuitivo: **Sustitución Directa**

polinomio característico a lazo cerrado (polos especificados vs. ganancias),
igualar coeficientes (forma analítica) → Sistema Ecuaciones →
→ **Determinar matriz de ganancias de retroalimentación de estado K**

Condición necesaria y suficiente: **Planta c/Estado Completamente CONTROLABLE**

↔ **Esfuerzo de Control asociado: evaluar !**

Ejercicios – Retroalimentación de Estado:

1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Retroalimentación de Estado y Simulación.
2. Ogata 5th Ed., Section 10-2 Ejemplo 10-1 (pág. 732) [**Sist. orden 3 F. Controlable**]
3. Ogata 5th Ed., Section 10-3 Ejemplo 10-2 (pág. 736) [**Matlab: acker vs. place**]
4. Ogata 5th Ed., Section 10-3 Ejemplo 10-3 (pág. 737) [**Matlab: Rta. natural**]

Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

- a) **Planta tipo 1** (1 integrador puro $\rightarrow$ sigue escalón) / $y(t) \equiv x_1(t)$
 $\dot{x}_1(t) \equiv x_2(t)$

Retroalimentación de ESTADO:

$$u_c(t) \equiv -K_c \cdot x(t) + k_{c1} \cdot y^*(t)$$

$$y^*(t) \neq 0$$

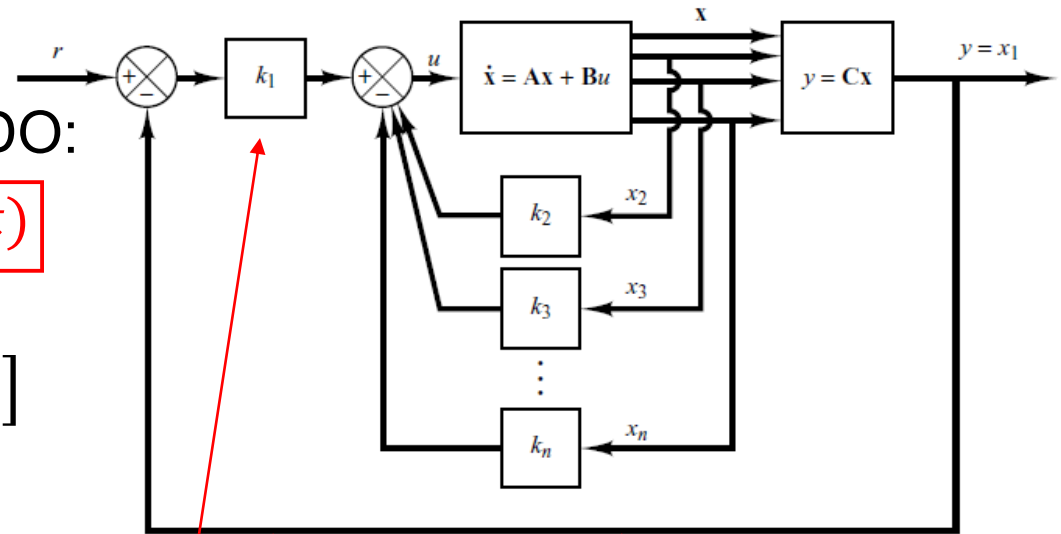
$$K_{c1 \times n} = [k_{c1} \quad k_{c2} \quad \dots \quad k_{cn}]$$

Operando:

$$u_c(t) = -[0 \quad k_{c2} \quad \dots \quad k_{cn}] \cdot x(t) + k_{c1} \cdot (y^*(t) - x_1(t))$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot (-K_c \cdot x(t) + k_{c1} \cdot y^*(t)) + B_d \cdot u_d(t); \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot k_{c1} \cdot y^*(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$



Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

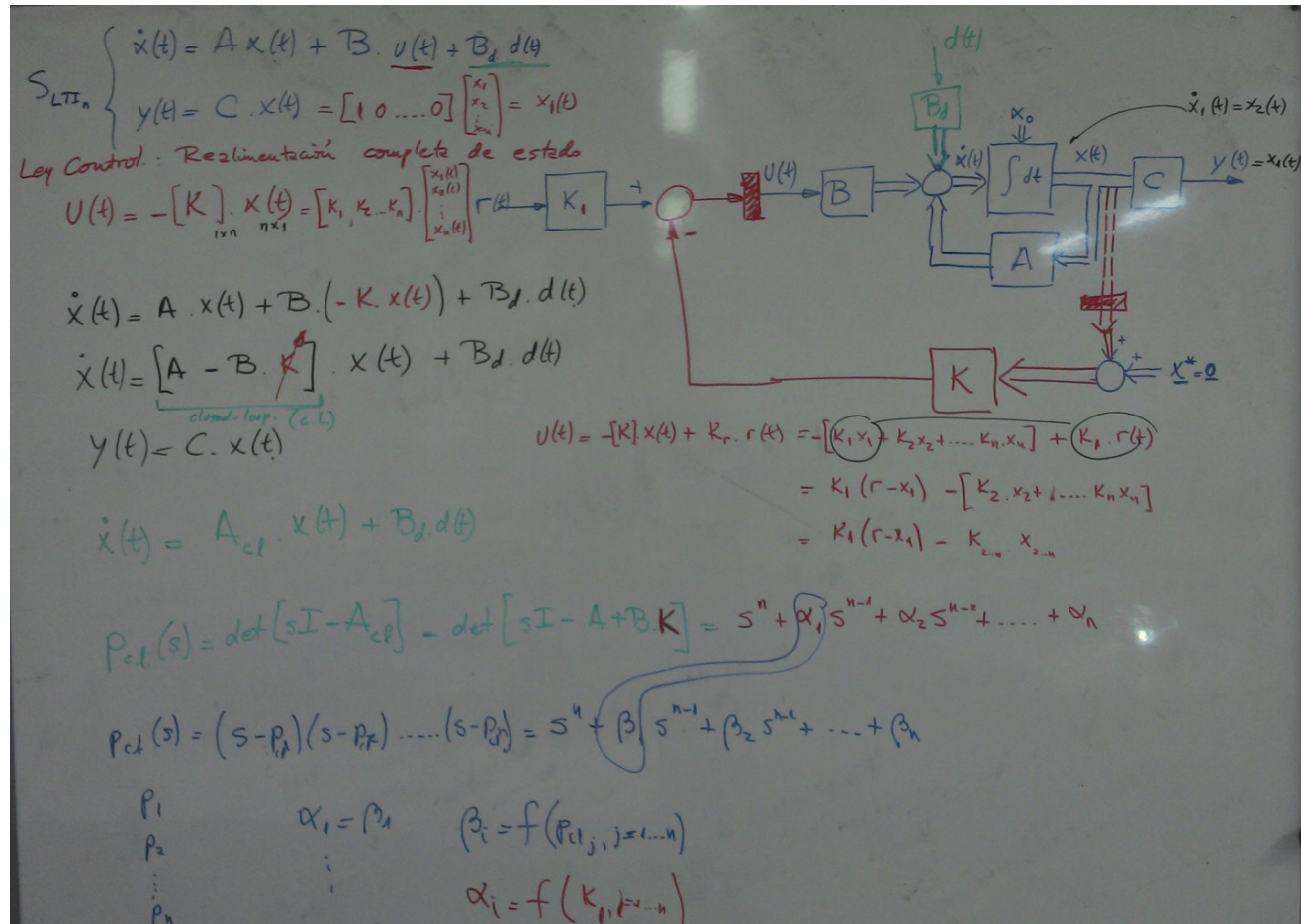
Método: Asignación o ubicación arbitraria de todos los Polos lazo de cerrado por Sustitución directa → Determinar matriz de ganancias de retroalim. estado K

↔ Condición (necesaria y suficiente): Planta c/Estado Completam. **CONTROLABLE**

→ Esfuerzo de Control asociado: evaluar !

a) Planta tipo 1

Planteo general



Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

Ejercicios – Servosistemas:

1. Sistema 1 g.d.l. de **Traslación** / estado: velocidad y posición (**planta tipo 1**); acción ctrl: fuerza. **Diseño** de Servosistema tipo 1 (**ver a continuación**) → **Simulación: HACER!**
2. Sistema 1 g.d.l. de **Rotación** / estado: velocidad y posición (**planta tipo 1**); acción ctrl: torque. **Diseño** de Servosistema tipo 1 → **Simulación**. (**ver a continuación**)
3. Ogata 5th Ed., Section 10-4 Ejemplo 10-4 (pág. 741) [**Sist. orden 3 F. Controlable** → **Rta. a escalón**]

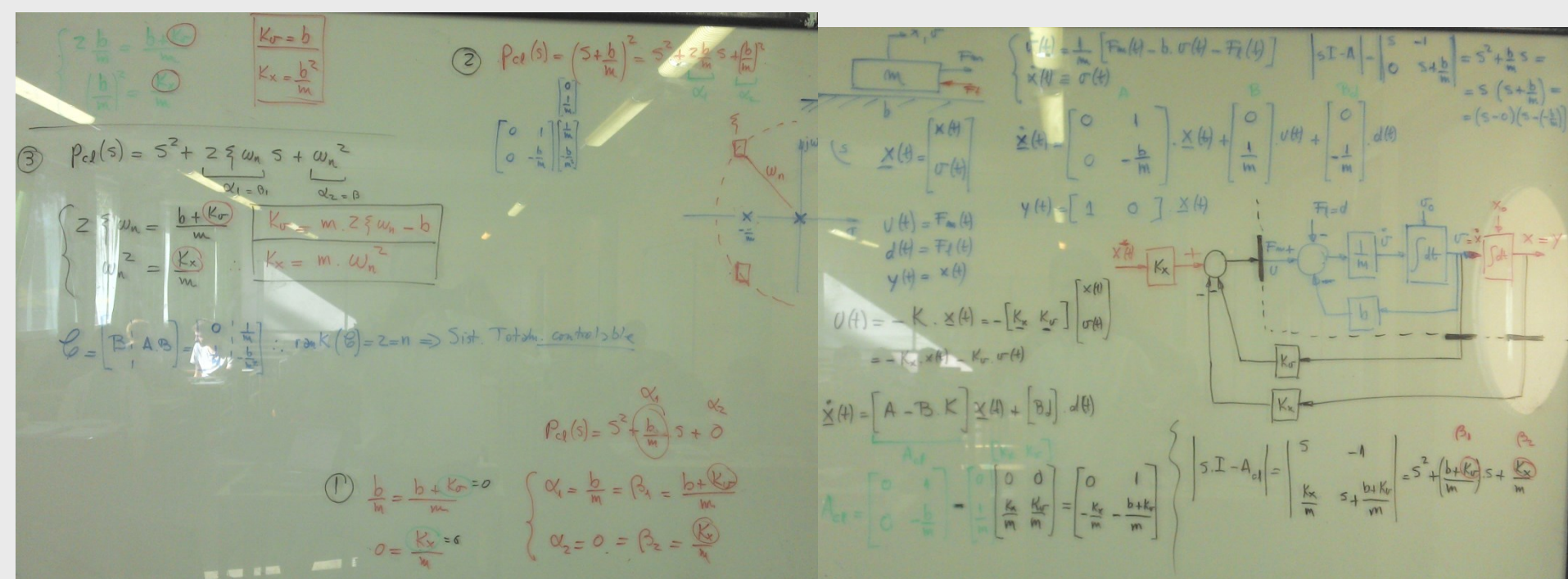
Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

Método: Asignación o ubicación arbitraria de todos los Polos lazo de cerrado por **Sustitución directa** → Determinar matriz de ganancias de retroalim. estado **K**

Condición (necesaria y suficiente): Planta c/Estado Completamente **CONTROLABLE**

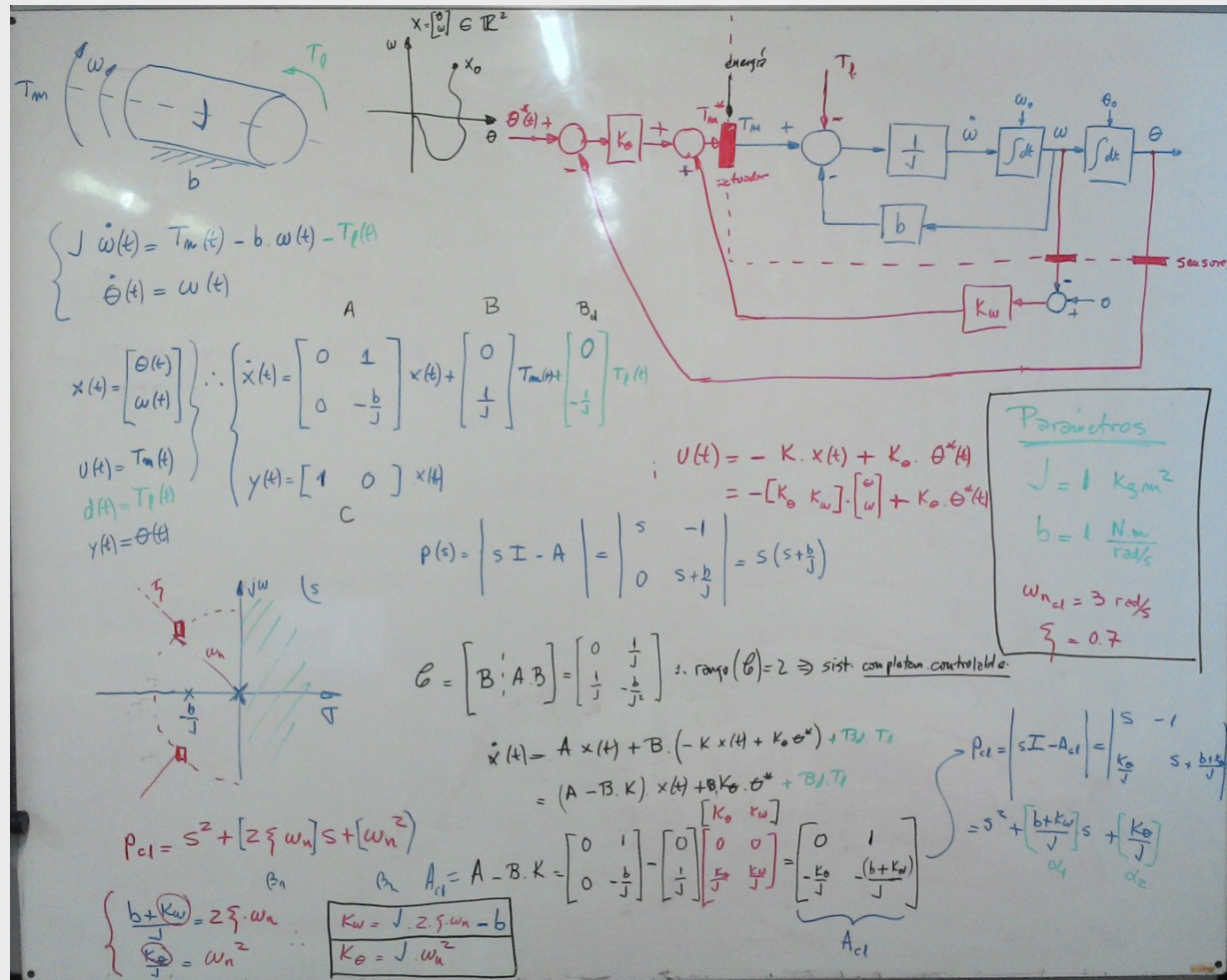
↔ **Esfuerzo de Control** asociado: evaluar !

a) **Planta tipo 1: Ejemplo** Sist. 1 g.d.l. Traslación → Control de **POSICIÓN**
estado: velocidad y posición; acción ctrl: fuerza → Diseño de Servosistema tipo 1



Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

- a) **Planta tipo 1: Ejemplo** Sist. 1 g.d.l. Rotación → Control de **POSICIÓN**
 estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque → **Diseño** de Servosistema tipo 1



→ Evaluar Rta. a
Escalón de Carga TI
[Rechazo a Perturb.]

(Hacer!)

Simulación de Servosistemas tipo 1

a) **Planta tipo 1: Ejemplo** Sist. 1 g.d.l. Rotación → Control de **POSICIÓN**

estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque → **Diseño** de Servosistema tipo 1
→ **Simulación** (Matlab / Simulink):

Parámetros, estado inicial, especificaciones, ganancias → Modelo → Simulación

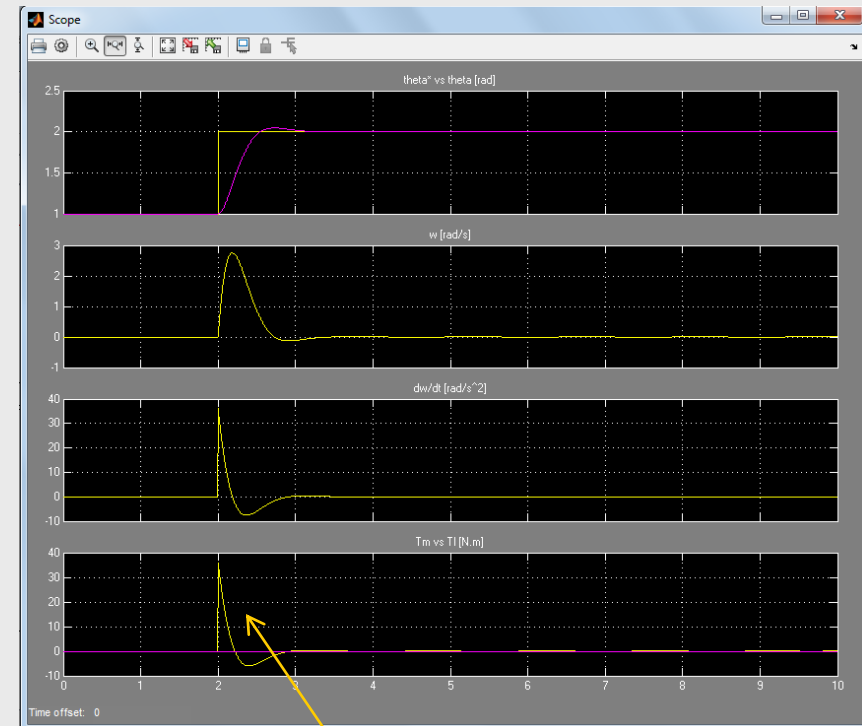
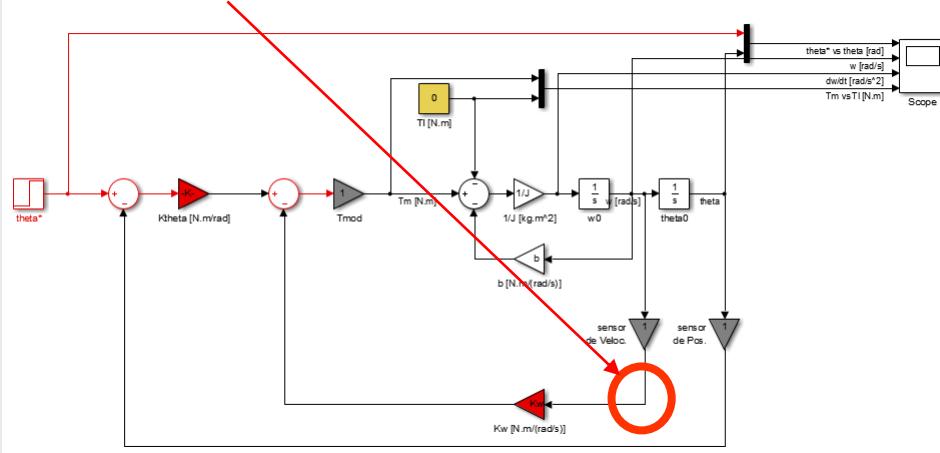
Rta. a
Escalón de
Consigna
[Seguim. de
Comandos]
(Sin carga)

```

1  % Control de Accionamiento 1 g.d.l.
2
3  % Planta física
4  J = 1.0; % [kg.m^2]
5  b = 1.0; % [N.m/(rad/s)]
6  % Estado inicial
7  w0 = 0.0; % [rad/s]
8  theta0 = 1.0; % [rad]
9
10 % Especificaciones de Control
11 wn = 6.0; % [rad/s]
12 zeta = 0.7; % [-]
13
14 % Cálculo de Ganancias de Realimentación de Estado
15 Ktheta = J*wn^2 % [N.m/rad]
16 Kw = J*(2*zeta*wn) - b % [N.m/(rad/s)]
17
18

```

Ref. cero virtual



ESFUERZO DE CONTROL !

→ Evaluar Rta. a **Escalón de Carga**
[Rechazo a Perturb.] (Hacer!)

Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

b) **Planta tipo 0** (no tiene integrador → **control integral**) / $y(t) \equiv x_1(t)$

Retroalim. ESTADO **aumentado**:

$$u_c(t) \equiv -K_c \cdot x(t) + k_{cI} \cdot \xi(t)$$

$$\dot{\xi}(t) = y^*(t) - y(t)$$

$$y^*(t) \neq 0$$

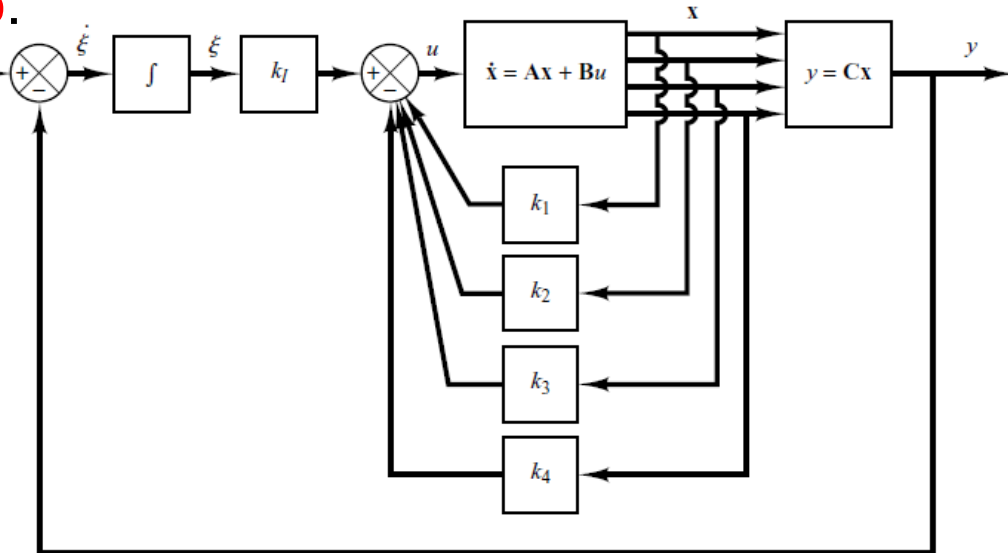
$$K_{c1 \times n} = [k_{c1} \quad k_{c2} \quad \dots \quad k_{cn}]$$

Se agrega **nuevo estado** $\xi(t)$

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot (-K_c \cdot x(t) + k_{cI} \cdot \xi(t)) + B_d \cdot u_d(t) \\ \dot{\xi}(t) = -C \cdot x(t) + y^*(t) = -x_1(t) + y^*(t) \end{cases}$$

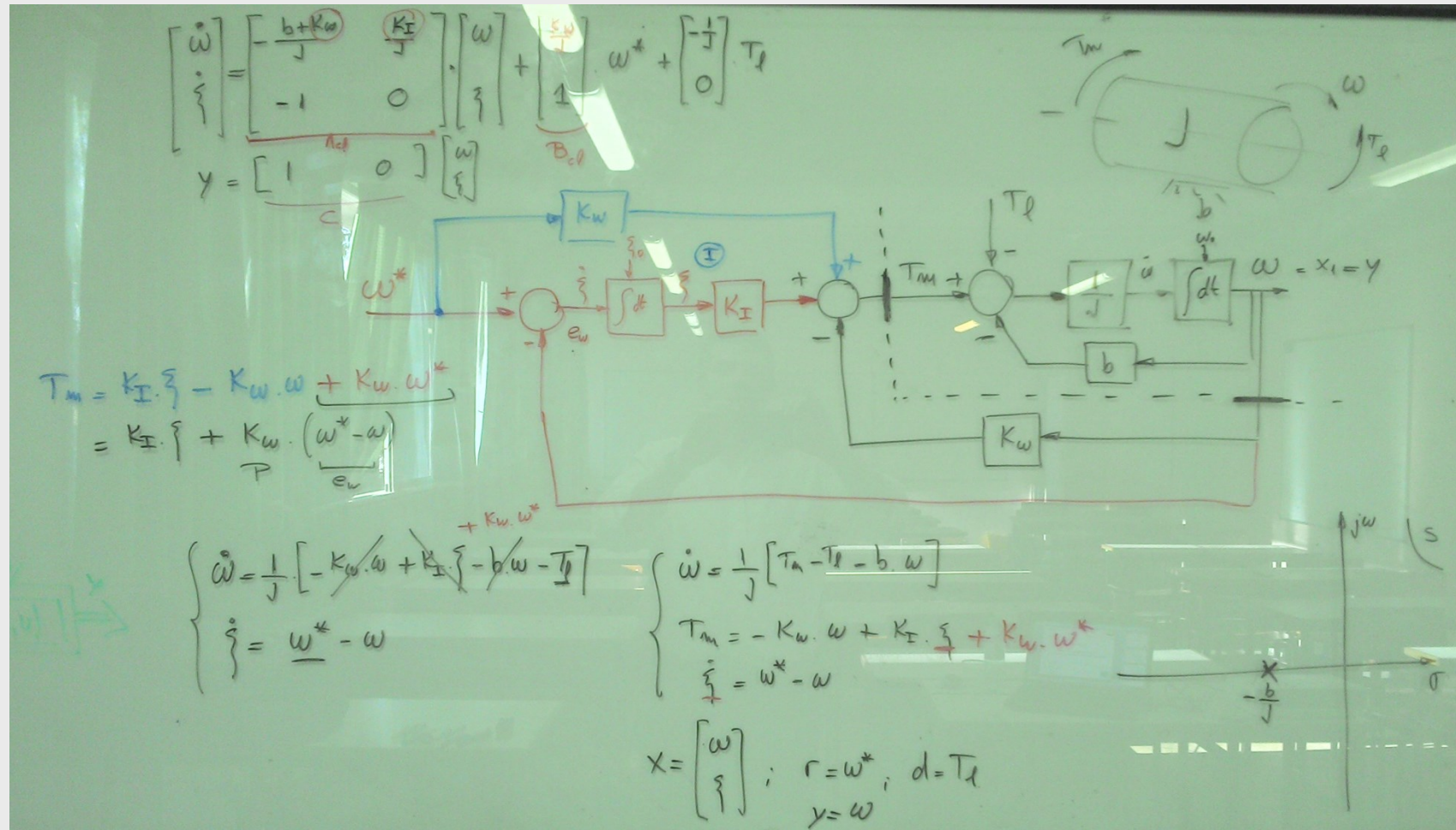
$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot k_{cI} \cdot \xi(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\xi}(t) = -x_1(t) + y^*(t) & ; \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}$$



Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

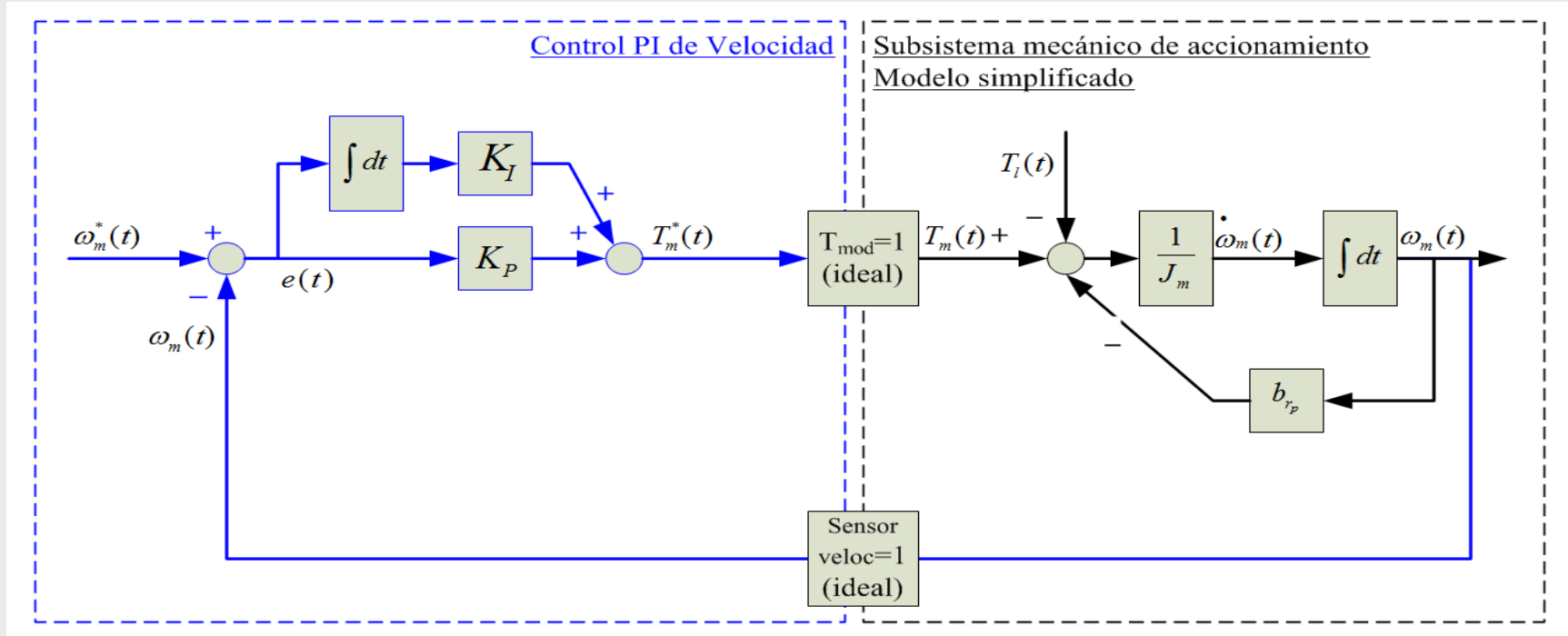
b) **Planta tipo 0: Ejemplo** Sist. 1 g.d.l. Rotación → Control de **VELOCIDAD**

estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque → **Diseño** de Servosistema tipo 1



Diseño de Servosistemas tipo 1 (SISO)

b) **Planta tipo 0: Ejemplo** Sist. 1 g.d.l. Rotación → Control de **VELOCIDAD**
 COMPARAR con **CONTROL PI** de velocidad en accionamiento !!

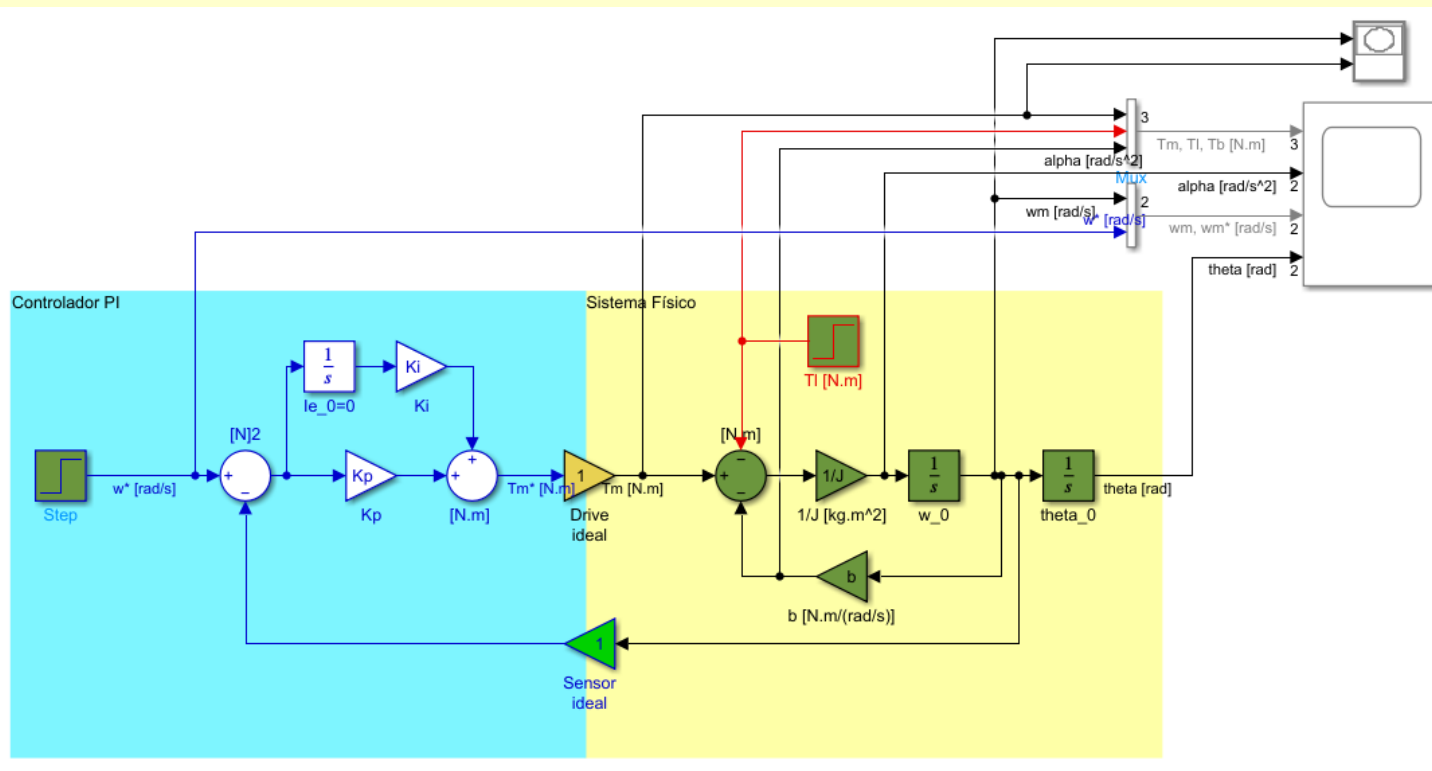
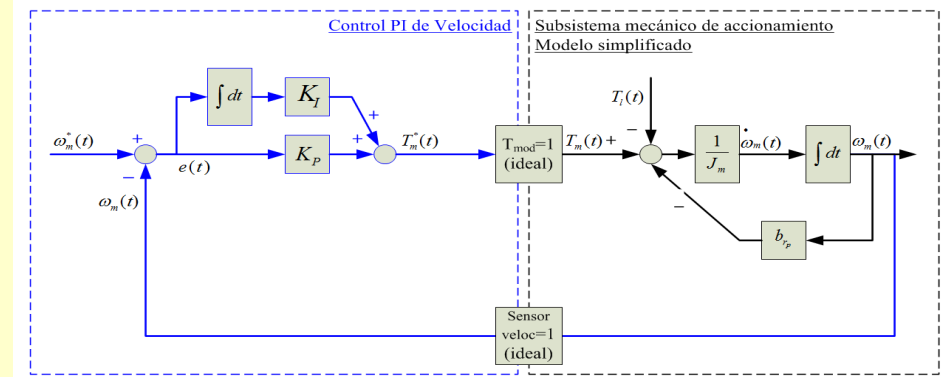


Diseño: Asignación de autovalores en lazo cerrado para rta. Dinámica definida (ω_n, ζ) → (K_I, K_P) **(HACER!)** → **SIMULACIÓN (Simulink) (HACER!)**

Comparar con ejemplo anterior: diseño Servo tipo 1 a partir de planta tipo 0 con retroalim. Estado + control integral

Control de velocidad en accionamiento

Modelo en Simulink:



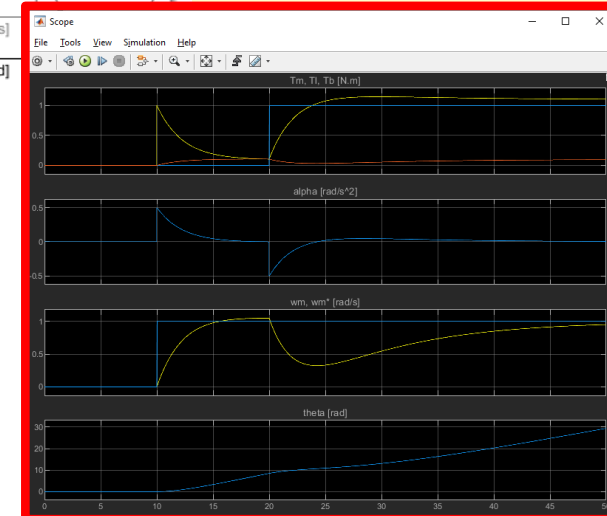
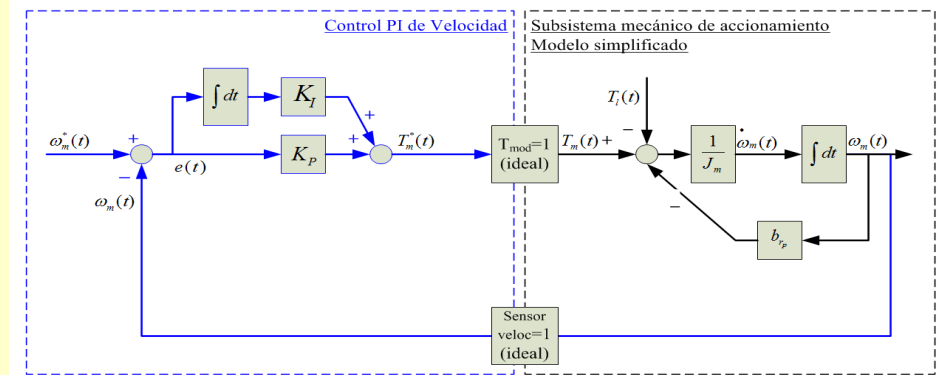
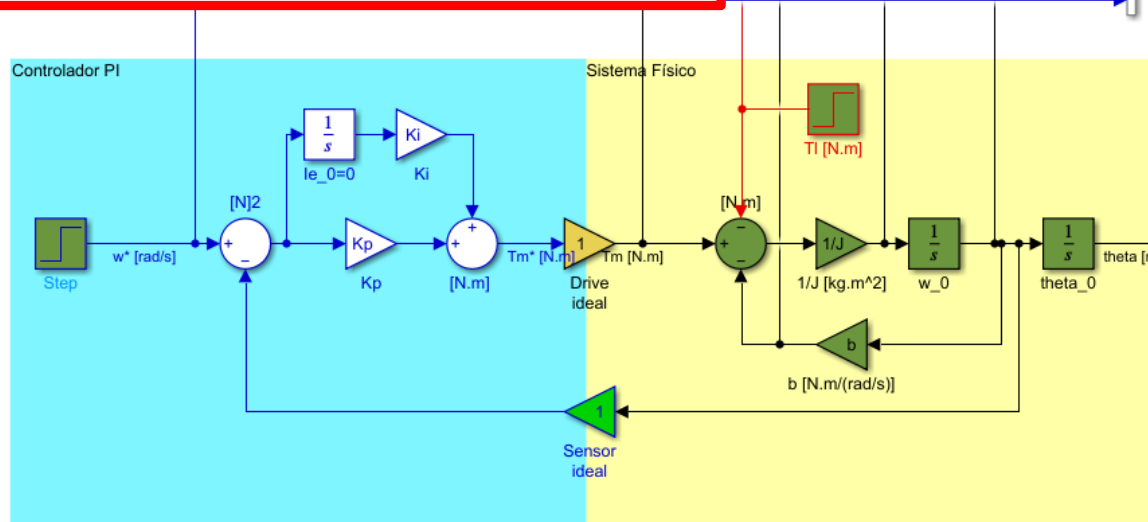
Control de velocidad en accionamiento

Modelo en Simulink → **SIMULACIÓN**

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

% Parámetros de Control (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1; % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1; % [N.m/rad] Ganancia Integral
```



Control de velocidad en accionamiento

Calcular: (para control a lazo cerrado)

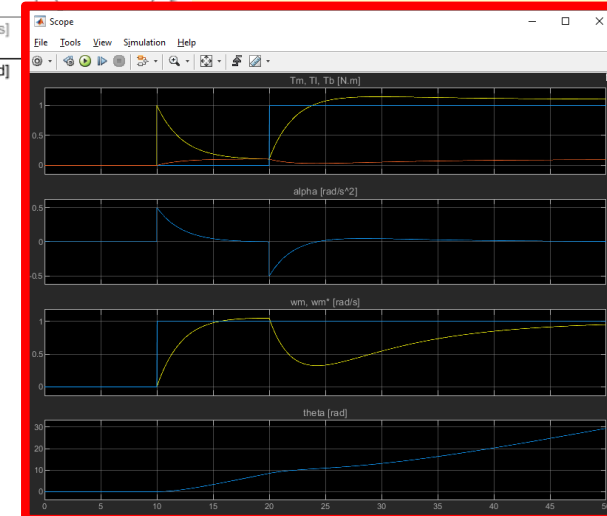
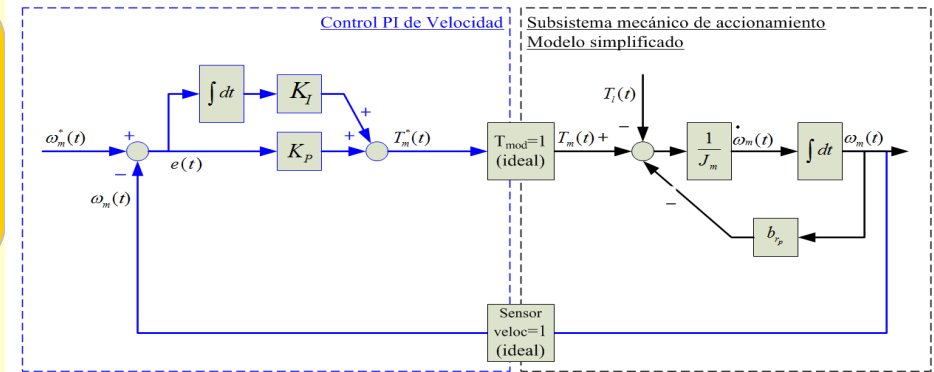
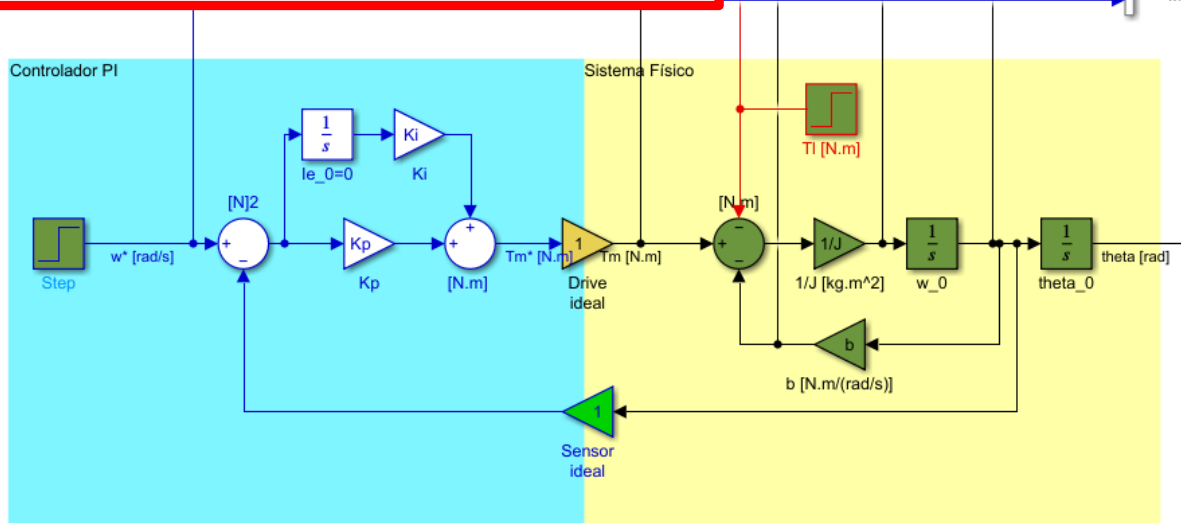
- Matriz de Transferencia → **polinomio característico**
- Polos de lazo cerrado originales** con $K_p=1.0$; $K_i=0.1$
- K_p y K_i mejorados** para polos con $\omega_n=6$ rad/s; $\xi=0,7$
- SIMULAR** Respuesta mejorada → **COMPARAR** con Simulación original

Modelo en Simulink → SIMULACIÓN

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

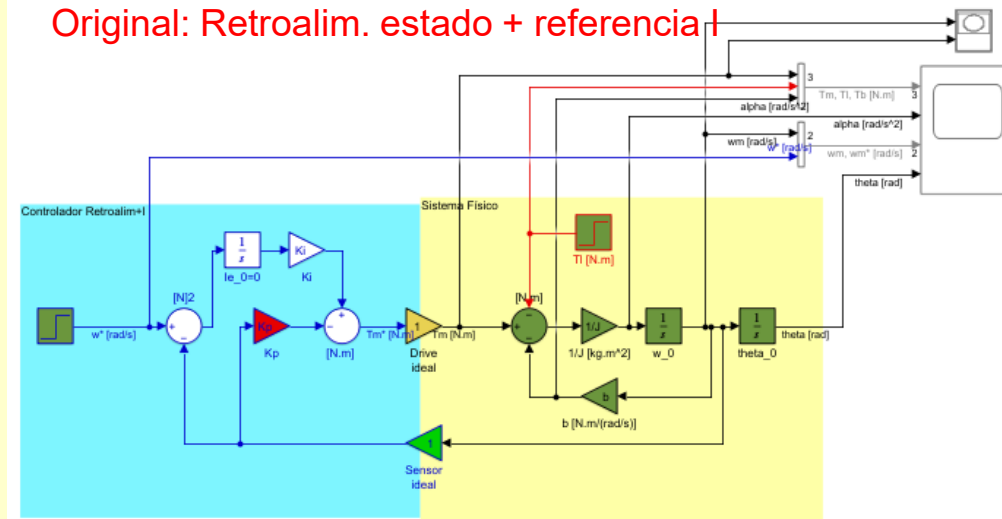
% Parámetros de Control (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1; % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1; % [N.m/rad] Ganancia Integral
```



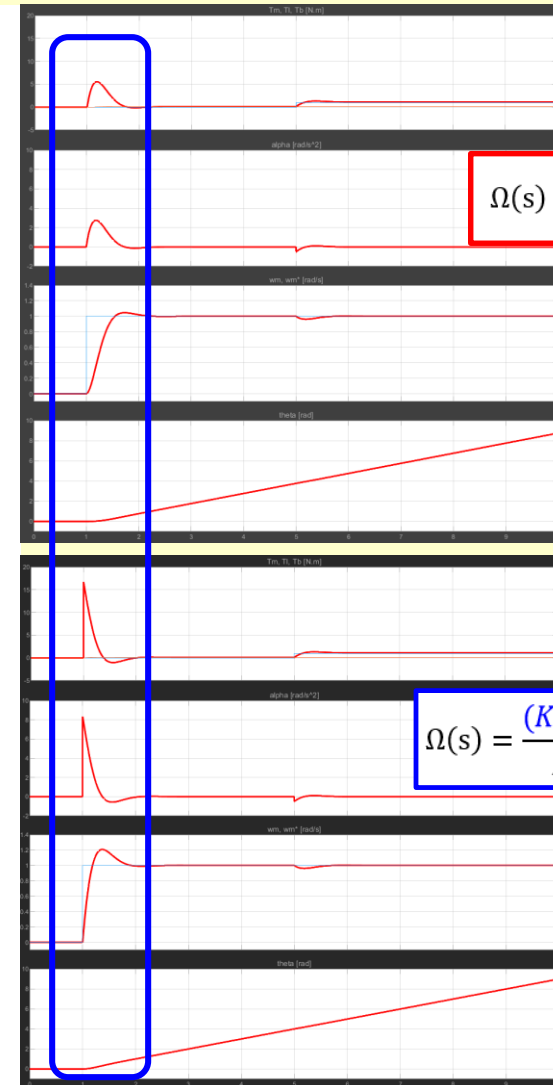
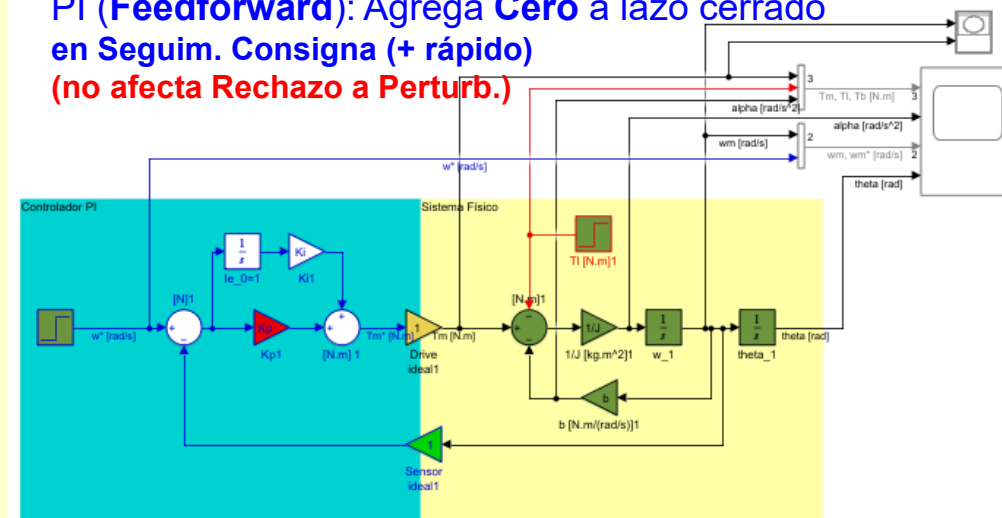
Control de velocidad en accionamiento

COMPARACIÓN Retroalim.+ I vs. PI

Original: Retroalim. estado + referencia I



PI (Feedforward): Agrega **Cero** a lazo cerrado en Seguim. Consigna (+ rápido)
(no afecta Rechazo a Perturb.)

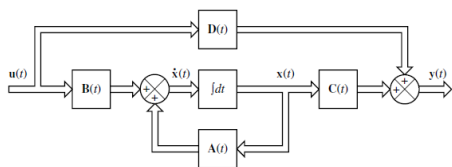


$$\Omega(s) = \frac{K_I \cdot \Omega^*(s) - s \cdot T_l(s)}{J \cdot s^2 + (b + K_\omega) \cdot s + K_I}$$

$$\Omega(s) = \frac{(K_\omega \cdot s + K_I) \cdot \Omega^*(s) - s \cdot T_l(s)}{J \cdot s^2 + (b + K_\omega) \cdot s + K_I}$$

Unidad 3:

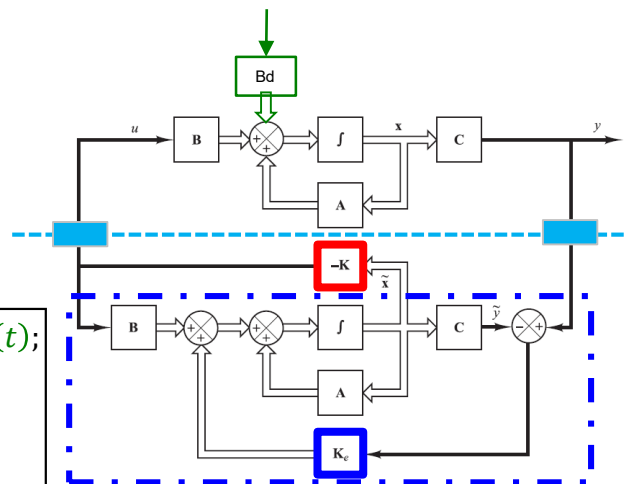
Control en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot K_c \cdot e(t) + B_c \cdot k_{c1} \cdot y^*(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ \dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0; \\ e(t_0) \equiv x_0 \end{matrix}$$



Control de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 3:

A. Objetivos de Control y Especificaciones

- Estabilidad. Seguimiento de consignas. Rechazo de perturbaciones. Robustez.

B. Retroalimentación de Estado

- Asignación de polos de lazo cerrado.
- Selección de polos: criterios y esfuerzo de control asociado.
- Ejemplos

C. Estimación y Observadores

- Observadores asintóticos de estado.

D. Diseño. Implementación Discreta: Controlador Digital

- Ejercicios.

E. Aplicaciones

- Subsistemas eléctricos y mecánicos de accionamientos. Simulación numérica.

OBSERVADORES de Estado (SISO)

$$S_{LTIn} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

Observador: “Modelo” de la Planta en **Control** Tiempo Real (Real Time, RT)

- **inexactitud** en **A** y **B**;
- **desconocimiento de x_0** $\rightarrow K_e$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A \cdot \tilde{x}(t) + B_c \cdot u_c(t) + \\ &+ K_e \cdot (y(t) - \tilde{y}(t)); \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \equiv 0 \\ \tilde{y}(t) &= C \cdot \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

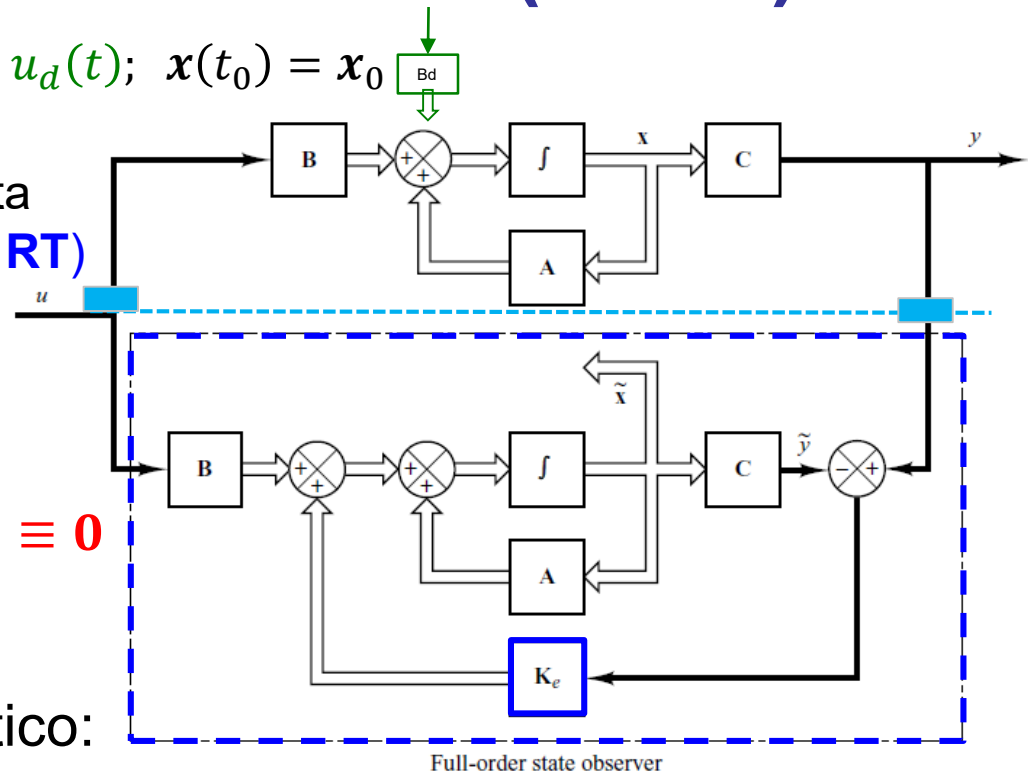
Modelo de Observador Asintótico:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B_c \cdot u_c(t) + K_e \cdot y(t); \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \equiv 0$$

$\exists K_e \Leftrightarrow S_{LTIn}$ es de Estado completamente **OBSERVABLE**

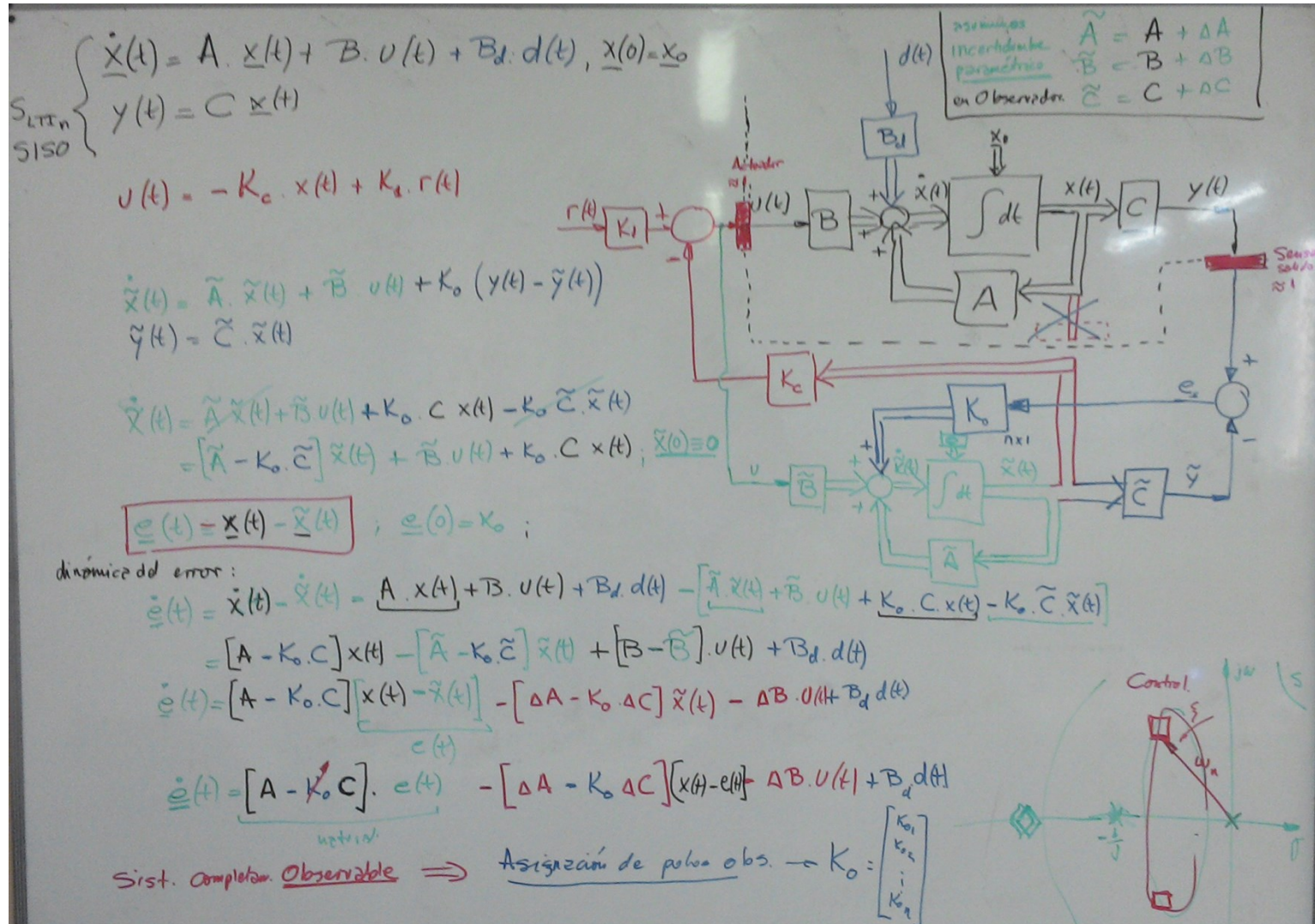
Dinámica del Error de observación: $e(t) \equiv x(t) - \tilde{x}(t)$, $e(t_0) = x_0 \rightarrow$

$$\dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot u_d(t); \quad e(t_0) = x_0 \rightarrow \text{hacer } [A - K_e \cdot C] \text{ estable y rápida}$$



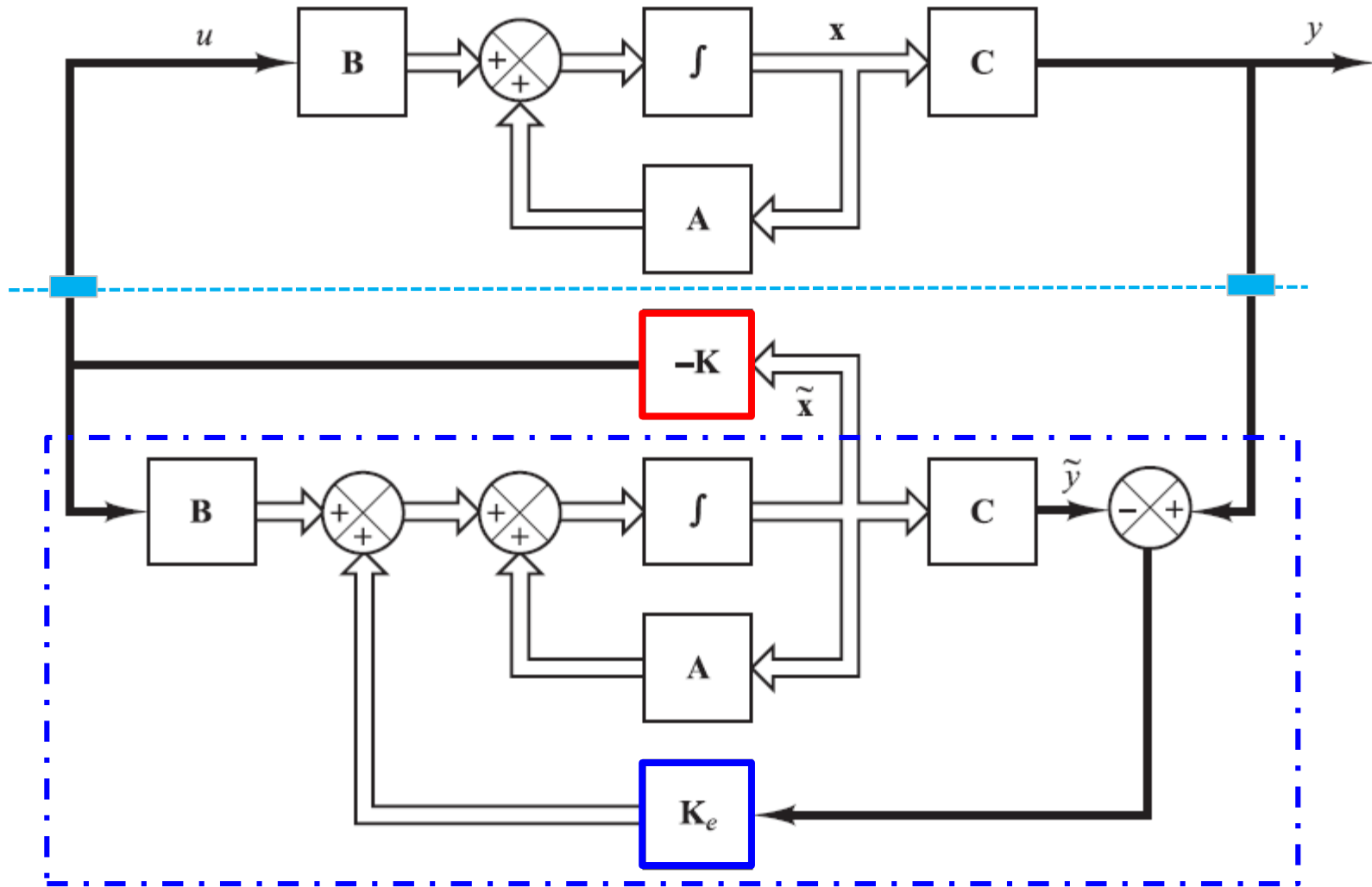
OBSERVADORES de Estado (SISO)

Considerando **incertidumbre o errores en parámetros** de modelo de Observador:



Observador $\rightarrow$ Realim. Estado Estimado

Integración: Observador y Ley de Control



Observador → Realim. Estado Estimado

$$S_{LTIn} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

Observador asintótico:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B_c \cdot u_c(t) + K_e \cdot y(t); \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \equiv \mathbf{0}$$

Retroalim. ESTADO Estimado: ej. integrador de salida e $y(t) = x_1(t)$

$$u_c(t) \equiv -K_c \cdot \tilde{x}(t) + k_{c1} \cdot y^*(t) = -K_c \cdot (x(t) - e(t)) + k_{c1} \cdot y^*(t)$$

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot (-K_c \cdot (x(t) - e(t)) + k_{c1} \cdot y^*(t)) + B_d \cdot u_d(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot K_c \cdot e(t) + B_c \cdot k_{c1} \cdot y^*(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ \quad \dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ \quad x(t_0) = x_0; \quad e(t_0) \equiv x_0 \\ \quad y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

OBSERVADORES de Estado (SISO)

Método: Asignación de Polos del Observador por Sustitución directa

Condición: Planta OBSERVABLE

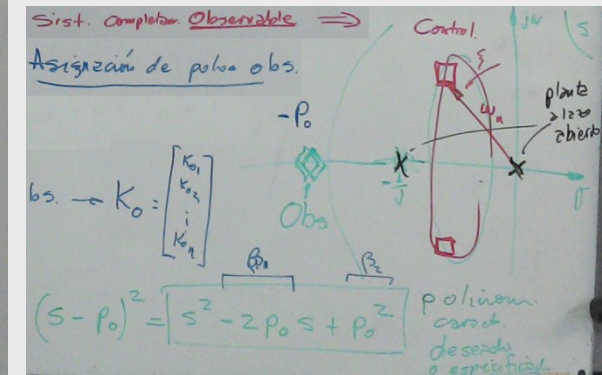
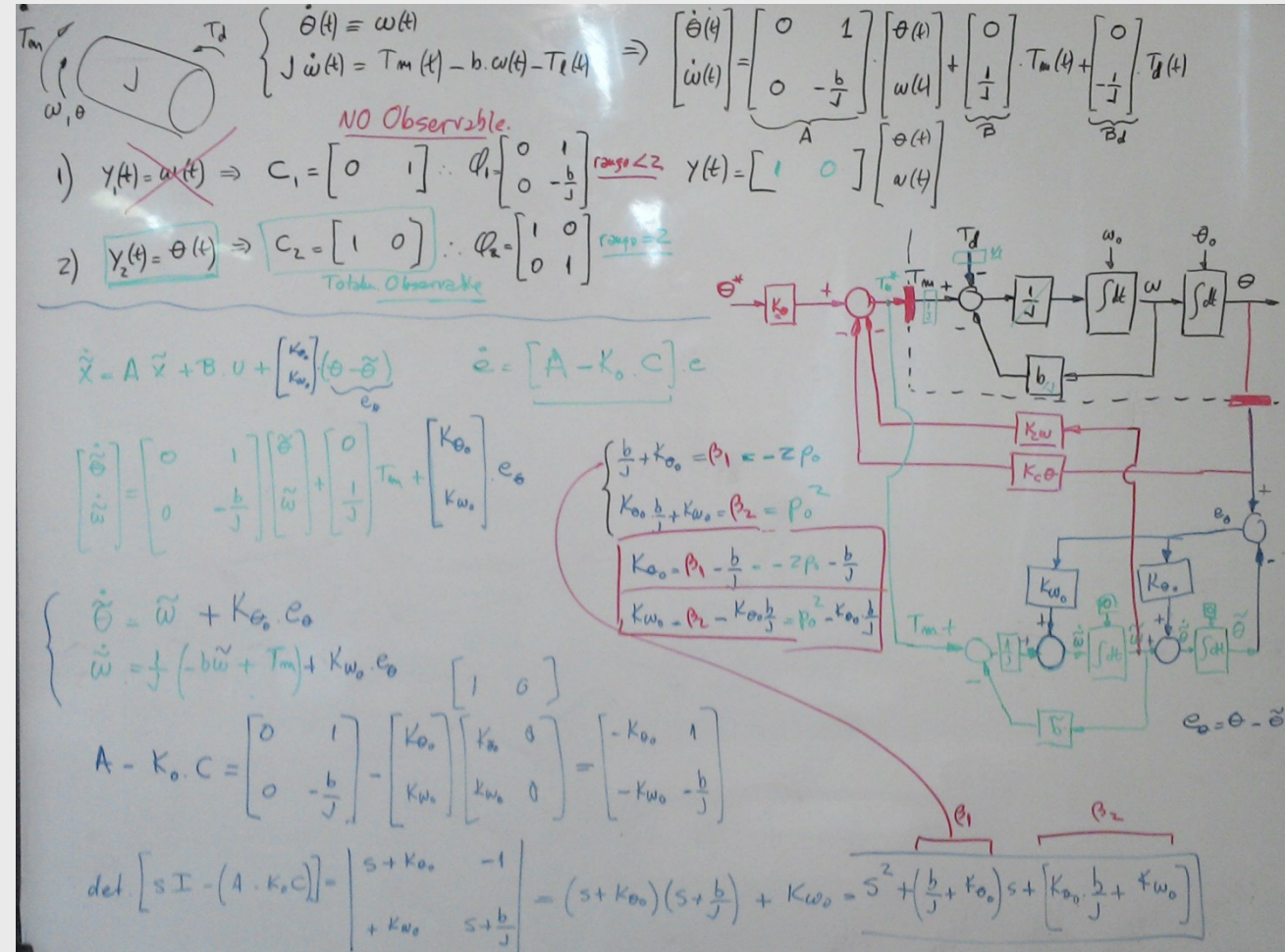
Ejercicios – Observador de orden completo:

1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Servosistema tipo 1 y Simulación.
2. Ogata 5th Ed., Section 10-5 Ejemplo 10-6 (pág. 757) [**Sist. orden 2 F. Observable → Diseñar Observador**]
3. Ogata 5th Ed., Section 10-5 Ejemplo 10-7 (pág. 762) [**Sist. orden 2 F. Observable → Diseñar Control por Retroalimentación de Estado**]

OBSERVADORES de Estado (SISO)

Ejercicios – Observador de orden completo:

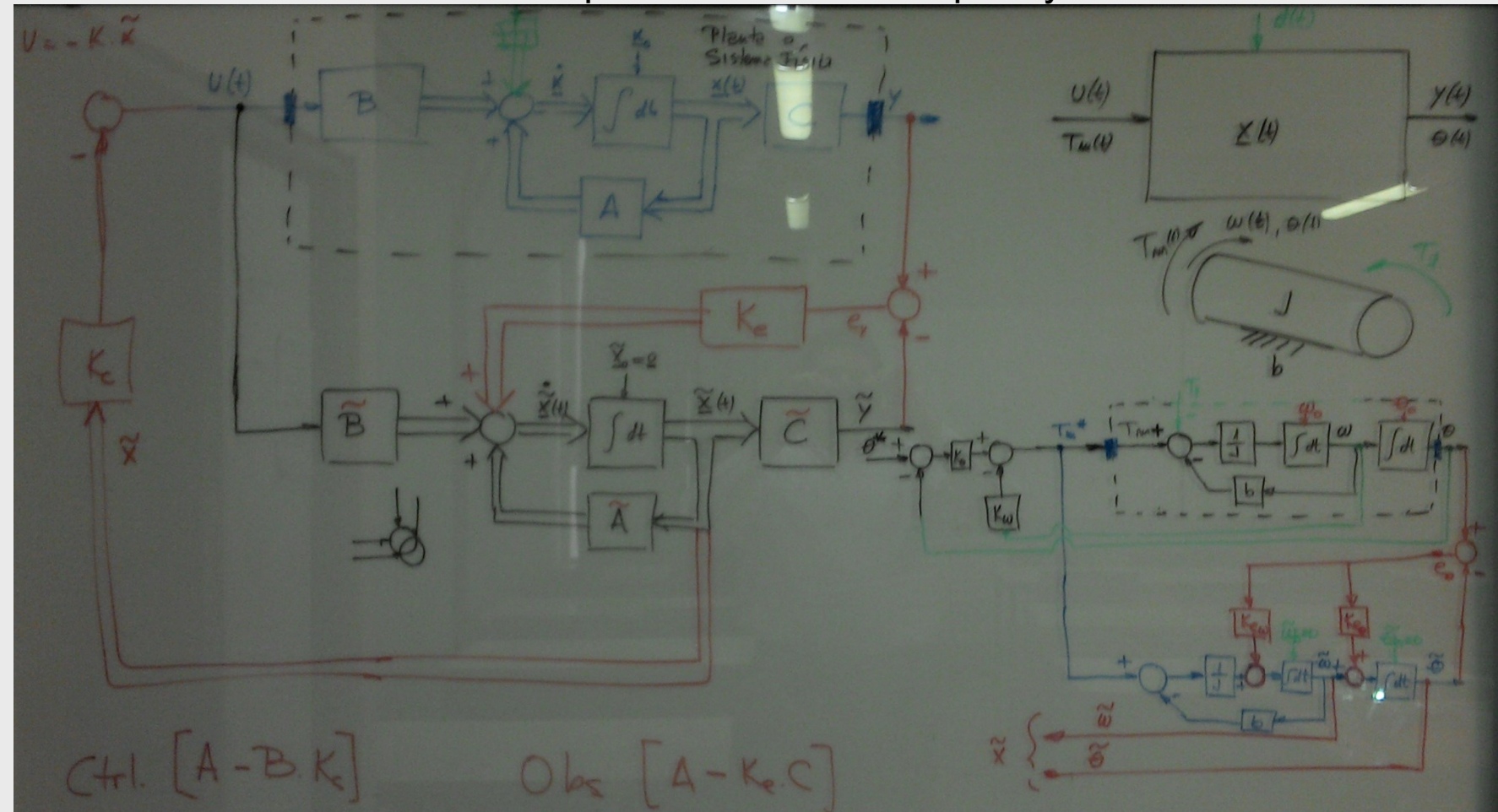
1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque.
Diseño de **Observador** para Servosistema tipo 1 y Simulación.



OBSERVADORES de Estado (SISO)

Ejercicios – Observador de orden completo:

1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque.
Diseño de **Observador** para Servosistema tipo 1 y **Simulación** → **Hacer !**



Simulación de Servosistemas tipo 1+Obs

Ejercicios – Servosistemas + Observador de orden completo :

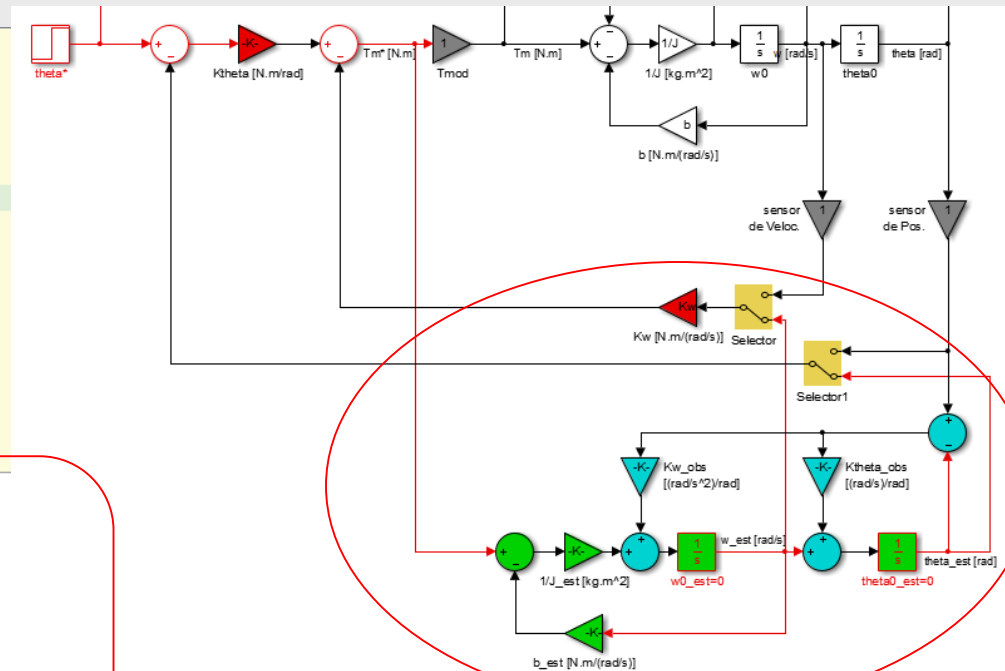
1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque.
Diseño de **Observador** p/ Servosistema tipo 1 y **Simulación** (Matlab/ Simulink):

Parámetros, estado inicial, especificaciones, ganancias $\rightarrow$ Modelo $\rightarrow$ Simulación

```

1  % Control de Accionamiento 1 g.d.l.
2
3  % Planta fisica
4  J= 1.0; % [kg.m^2]
5  b= 1.0; % [N.m/(rad/s)]
6  % Estado inicial
7  w0= 0.0; % [rad/s]
8  theta0= 1.0; % [rad]
9
10 % Especificaciones de Control
11 wn= 6.0; %3.0 [rad/s]
12 zeta= 0.7; % [-]
13
14 % Cálculo de Ganancias de Realimentación de Estado
15 Ktheta= J*wn^2 % [N.m/rad]
16 Kw= J*(2*zeta*wn) - b % [N.m/(rad/s)]
17
18 %% OBSERVADOR
19 % Parámetros estimados (modelo)
20 % Asumiendo valor EXACTO --> (** Puede agregarse INCERTIDUMBRE **)
21 J_est= J; % [kg.m^2]
22 b_est= b; % [N.m/(rad/s)]
23 % Estado inicial NULO
24
25 % Especificaciones de Observador
26 p_obs= - (5*wn); % [rad/s] (Recomendación 2 a 5 veces más rápido que control)
27
28 % Cálculo de Ganancias de Observador (realim. de error de Salida)
29 Ktheta_obs= - 2*p_obs - b_est/J_est % [(rad/s)/rad]
30 Kw_obs= p_obs^2 - b_est/J_est*Ktheta_obs % [N.m/(rad/s)]
31
32

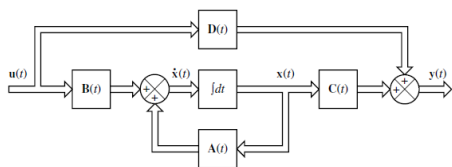
```



Error de Estimación de estado
 $\rightarrow$ Evaluar Rta. a **Escalón de Carga**
[Rechazo a Perturb.] (Hacer!)

Unidad 3:

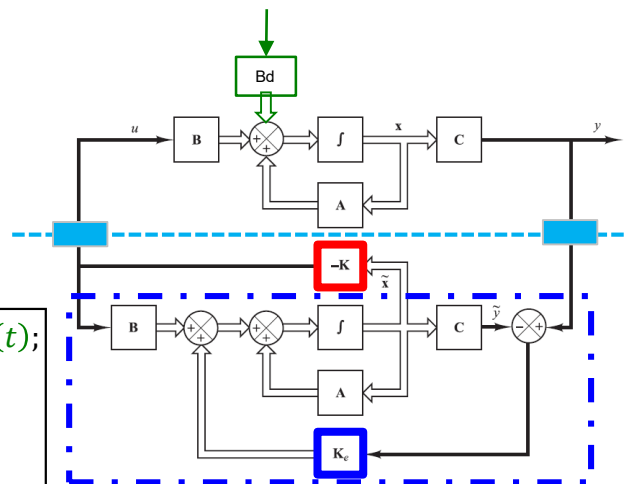
Control en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B_c \cdot K_c] \cdot x(t) + B_c \cdot K_c \cdot e(t) + B_c \cdot k_{c1} \cdot y^*(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ \dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot u_d(t); \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0; \\ e(t_0) \equiv x_0 \end{matrix}$$



Control de SD en Espacio de Estado (SS)

Plan de la Unidad 3:

A. Objetivos de Control y Especificaciones

- Estabilidad. Seguimiento de consignas. Rechazo de perturbaciones. Robustez.

B. Retroalimentación de Estado

- Asignación de polos de lazo cerrado.
- Selección de polos: criterios y esfuerzo de control asociado.
- Ejemplos

C. Estimación y Observadores

- Observadores asintóticos de estado.

D. Diseño. Implementación Discreta: Controlador Digital

- Ejercicios.

E. Aplicaciones

- Subsistemas eléctricos y mecánicos de accionamientos. Simulación numérica.

SD LTI: Tiempo Continuo → T. Discreto

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x_0 = x(t_0) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \text{ donde: } \begin{matrix} u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m} \end{matrix}$$

Solución de Ec.Estado (TC) → Aplicación **entre 2 instantes T_s (TD)**

1. **Solución en DT:** Reordenamos y pre-multiplicamos por exponencial $e^{-A \cdot t}$:

$$e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Por otro lado:

$$\bullet \frac{d}{dt}[e^{-A \cdot t}] = -A \cdot e^{-A \cdot t} = e^{-A \cdot t} \cdot (-A) \text{ (Producto si es Conmutativo, Propiedad de Exponencial Matricial)}$$

$$\bullet \frac{d}{dt}[e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot \dot{x}(t) - A \cdot e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t} \cdot [\dot{x}(t) - A \cdot x(t)]$$

Reemplazamos en ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt}[e^{-A \cdot t} \cdot x(t)] = e^{-A \cdot t} \cdot B \cdot u(t)$$

Integramos la ecuación con respecto a t en ambos miembros:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}[e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)] \cdot d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$[e^{-A \cdot \tau} \cdot x(\tau)]_{t_0}^t = e^{-A \cdot t} \cdot x(t) - e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 = \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$e^{-A \cdot t} \cdot x(t) = e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot e^{-A \cdot t_0} \cdot x_0 + e^{A \cdot t} \cdot \int_{t_0}^t e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Respuesta Natural + Respuesta Forzada: Integral de Convolución de Duhamel

$$x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + e^{A \cdot (t-t_0)} * B \cdot u(t-t_0)$$

Muestreo Periódico: $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$(T_s[s] \in \mathbb{R}: \text{Periodo de Muestreo})$

Evaluamos Respuesta exacta entre instantes correspondientes a dos muestras consecutivas de tiempo:

$$t_0 \equiv t_k \equiv k \cdot T_s; t \equiv t_{k+1} \equiv (k+1) \cdot T_s \rightarrow t - t_0 = T_s$$

$$x((k+1) \cdot T_s) = e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Aproximamos $u(\tau) \cong u(k \cdot T_s)$ "Constante" en intervalo: $\forall \tau \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s] \rightarrow$ fuera de la integral:

Nota: esto equivale a considerar la salida de un **retenedor de orden 0 (ZOH, Zero-Order Hold)** como entrada $u(t)$, válido para la acción de control desde un controlador digital a través de un Convertidor D/A (retardo $\sim T_s/2$).

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_{k \cdot T_s}^{(k+1) \cdot T_s} e^{A \cdot ((k+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot d\tau \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$

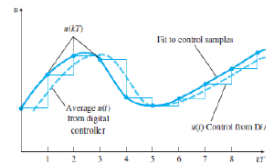
Resolvemos la integral definida del 2º término por **sustitución de variables**:

$$\eta \equiv (k+1) \cdot T_s - \tau \therefore \tau = (k+1) \cdot T_s - \eta; d\tau = -d\eta;$$

$$\tau = k \cdot T_s \Rightarrow \eta = T_s;$$

$$\tau = (k+1) \cdot T_s \Rightarrow \eta = 0$$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong e^{A \cdot T_s} \cdot x(k \cdot T_s) + \left[\int_0^{T_s} e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \right] \cdot B \cdot u(k \cdot T_s)$$



Ecuación en Diferencias de Estado en DT Discretizado $t_k[s] \equiv k \cdot T_s \in \mathbb{R} \rightarrow$ DT Discreto $k \in \mathbb{Z}$

$$x((k+1) \cdot T_s) \cong \Phi_A(T_s) \cdot x(k \cdot T_s) + \Gamma_{A,B}(T_s) \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación en Diferencias de Estado}$$

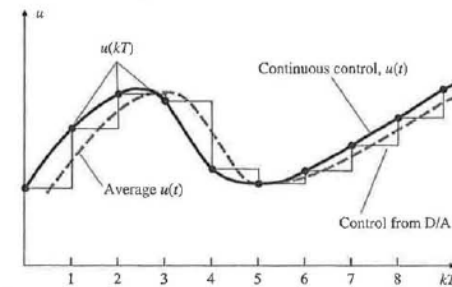
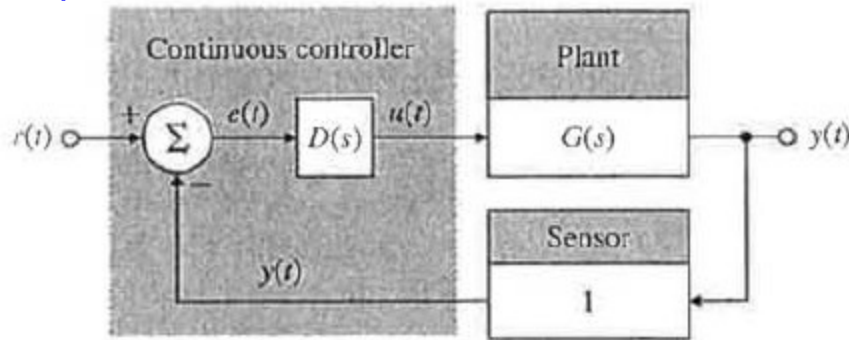
$$y(k \cdot T_s) = C \cdot x(k \cdot T_s) + D \cdot u(k \cdot T_s) : \text{Ecuación Algebraica de Salida}$$

$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1) \cdot T) = [\Phi \equiv e^{A \cdot T}] \cdot x(k \cdot T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \cdot B] \cdot u(k \cdot T); & x_0 = x(0) \\ y(k \cdot T) = C \cdot x(k \cdot T) + D \cdot u(k \cdot T) \end{cases}$$

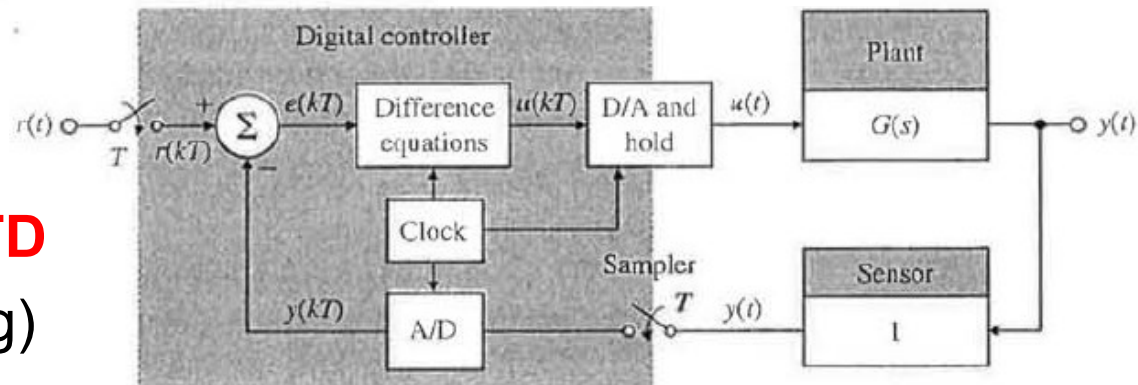
SD LTI: Tiempo Continuo → T. Discreto

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x_0 = x(t_0) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \text{ donde: } \begin{matrix} u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m} \end{matrix}$$

a) Controlador básico “Continuo” o Analógico en TC



b) Controlador básico de “Datos Muestreados” o Controlador “Digital” en TD (retardo prom. $T/2$ + aliasing)



$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1) \cdot T) = [\Phi \equiv e^{A \cdot T}] \cdot x(k \cdot T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \cdot B] \cdot u(k \cdot T); & x_0 = x(0) \\ y(k \cdot T) = C \cdot x(k \cdot T) + D \cdot u(k \cdot T) \end{cases}$$

Controlador “Digital” en TD:

2 técnicas básicas p/definir las **ecuaciones en diferencias** del **controlador digital**:

1) Emulación o Equivalente Discreto

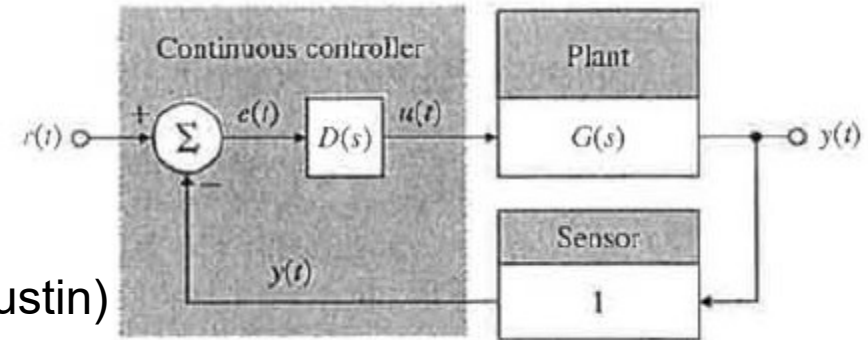
Diseño Controlador “continuo” en TC →

→ realizar **Aproximación Discreta**

ej. Integración/deriv. Numérica en DT:

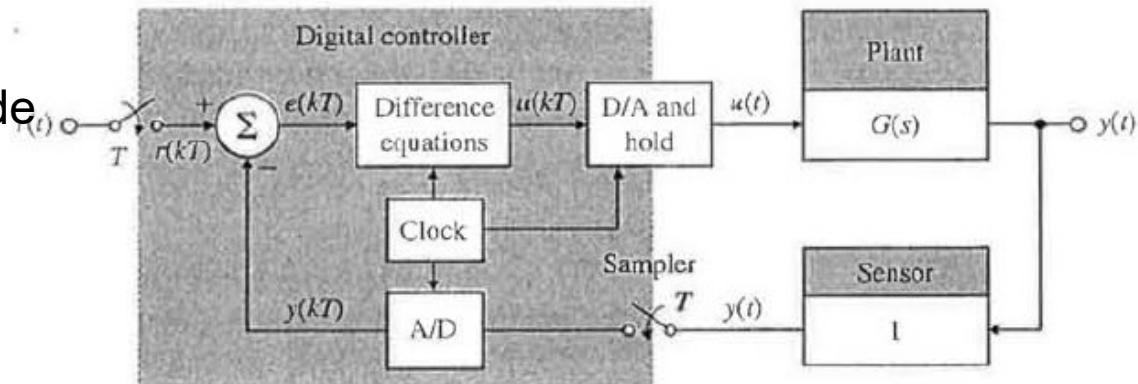
Euler (rectáng.), Trapecios=Aprox. Bilineal (Tustin)

(válido si **$f_s = 1/T_s \gg BW_{\text{control}}$** : 20-25 veces)



2) Diseño Discreto Directo

a partir de **modelo discretizado** de Planta.



$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1).T) = [\Phi \equiv e^{A.T}] \cdot x(k.T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A.\eta} . d\eta . B] \cdot u(k.T); & x_0 = x(0) \\ y(k.T) = C \cdot x(k.T) + D \cdot u(k.T) \end{cases}$$

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ej. Controlador PID en tiempo continuo (Analógico):

$$u(t) = Kp \cdot e(t) + Ki \cdot \int_{-\infty}^t e(t) \cdot dt + Kd \cdot \frac{de(t)}{dt} = Kp \cdot \left[e(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_{-\infty}^t e(t) \cdot dt + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

→ PID equiv. en tiempo discreto (Digital): Método de Emulación discr.

a) Acción I → **INTEGRACIÓN DISCRETA (Euler / Mét. Rectángulos):**

$$u_i(t_k) = K_i \cdot I_e(t_k) = K_i \cdot \left[\int_0^{t_k} e(t) \cdot dt + I_{e0} \right] = K_i \cdot \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} e(t) \cdot dt + \int_0^{t_{k-1}} e(t) \cdot dt + I_{e0} \right] =$$

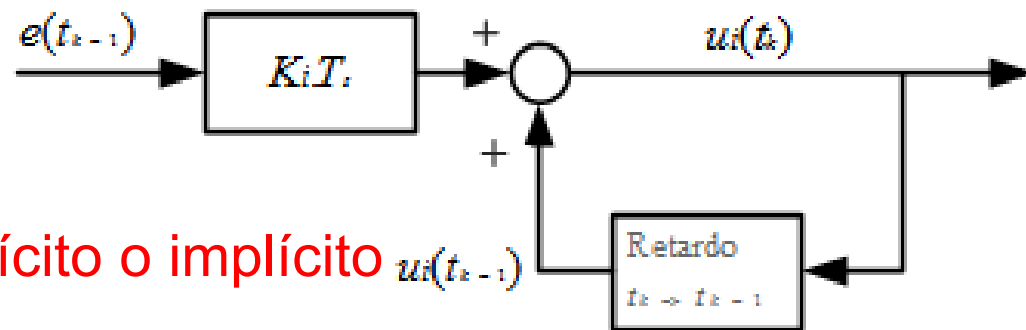
$$\approx K_i \cdot [T_s \cdot e(t_{k-1}) + I_e(t_{k-1})] \quad \therefore$$

$$u_i(t_k) = K_i \cdot I_e(t_k)$$

$$I_e(t_k) \approx I_e(t_{k-1}) + T_s \cdot e(t_{k-1})$$

Opciones: **Rectáng.=Euler explícito o implícito**

Trapecios = Tustin



CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ej. Controlador **PID** en tiempo continuo (Analógico):

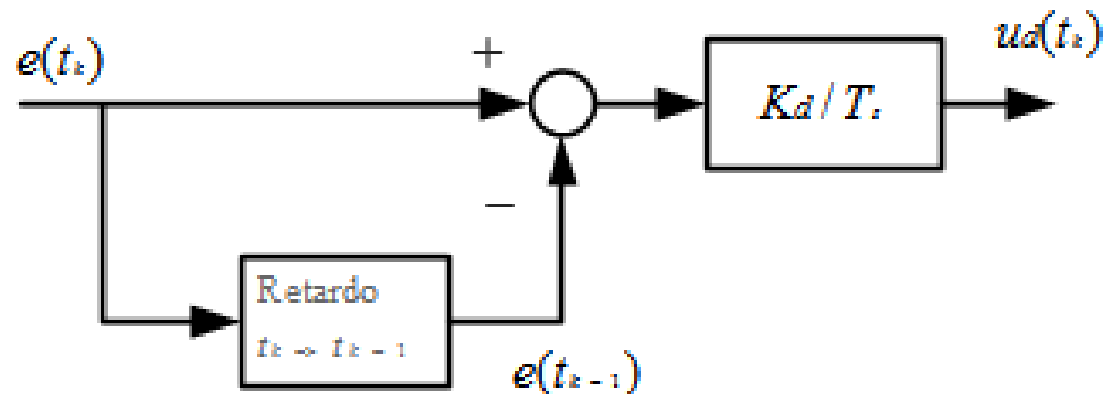
$$u(t) = Kp \cdot e(t) + Ki \cdot \int_{-\infty}^t e(t) \cdot dt + Kd \cdot \frac{de(t)}{dt} = Kp \cdot \left[e(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_{-\infty}^t e(t) \cdot dt + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

→ **PID equiv. en tiempo discreto (Digital):** Método de Emulación discr.

b) Acción **D** → **DERIVACIÓN DISCRETA (Cociente incremental):**

$$u_d(t_k) = K_d \cdot D(t_k) = K_d \cdot \left[\frac{de(t_k)}{dt} \right] \approx K_d \cdot \left[\frac{\Delta e(t_k)}{\Delta t} \right] = K_d \cdot \left[\frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{T_s} \right] \quad \therefore$$

$$u_d(t_k) \approx \frac{K_d}{T_s} \cdot [e(t_k) - e(t_{k-1})]$$



CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

→ PID equiv. en tiempo discreto (Digital): Método de Emulación discr.
Procedimiento Computacional (ALGORITMO): Matlab Function?
implementable en PLC / PAC, Procesador Digital DSP, DSC, uP, etc.

0. PARAMETRIZACIÓN e INICIALIZACIÓN

Ganancias: asignar valores de **Kp, Ki, Kd**

Tiempo de Muestreo: asignar valor de **Ts**

Inicialización

Paso: $k:=0$;

$U_i(0):=0$; $E(0):=0$;

1. CICLO REPETITIVO (Periódico con Periodo Ts = const.)

a) Paso: $k:=k+1$;

b) **leer entradas**: consigna $Y^*(k)$ y valor medido $Y(k)$;

c) **error**: $E(k):=Y^*(k) - Y(k)$;

d) **Cálculo PID**:

$U_p(k):=K_p * E(k)$;

$U_i(k):=U_i(k-1) + K_i * T_s * E(k-1)$; % Euler Explícito **vs TUSTIN (Trapeacios) HACER!**

$U_d(k):=K_d / T_s * (E(k) - E(k-1))$;

$U_{pid}(k) = U_p(k) + U_i(k) + U_d(k)$; (Nota: agregar **bias**, etc.)

e) **escribir salida**: acción de control $U_{pid}(k)$

f) **Memorizar p/próximo paso**:

$U_i(k-1):=U_i(k)$; $E(k-1):=E(k)$;

g) **ESPERA** (hasta cumplir intervalo de Tiempo Muestreo **Ts**)

h) **Volver a 1 y REPETIR (Bucle sin fin)**

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Método: Emulación en Tiempo Discreto de Control Diseñado en Tiempo Continuo

Condición: *Tiempo de muestreo $T_s = t_k - t_{k-1}$ suficientemente rápido (pequeño) vs. variación de variables del proceso*

*Criterio Teórico: Teorema del muestreo ($f_s > 2 * BW_{controlador}$)*

*Criterio Práctico: $f_s \sim 10 * BW_{controlador}$*

Ejercicio:

1. Control completo (Ley de Control y Observador) para Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Servosistema tipo 1 y Simulación
 - incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto (modelo Simulink discreto → Código secuencial).
 - Simulación comparativa

Simulación de Servosistemas tipo 1+Obs

Ejercicios – Servosistemas + Observador de orden completo :

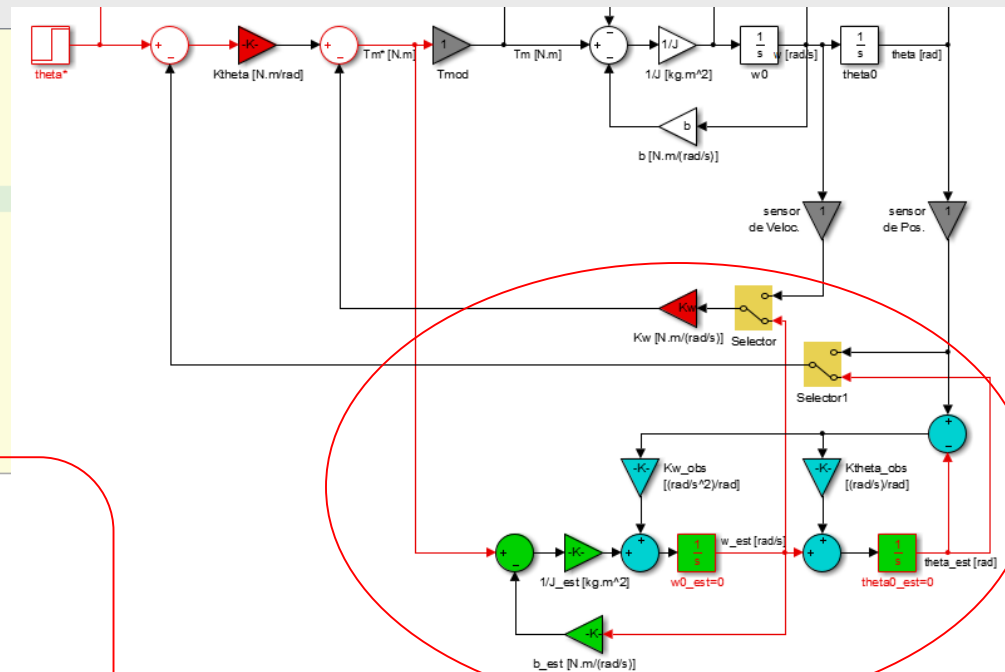
1. Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque.
Diseño de **Observador** p/ Servosistema tipo 1 y **Simulación** (Matlab/ Simulink):

Parámetros, estado inicial, especificaciones, ganancias $\rightarrow$ Modelo $\rightarrow$ Simulación

```

1  % Control de Accionamiento 1 g.d.l.
2
3  % Planta fisica
4  J= 1.0; % [kg.m^2]
5  b= 1.0; % [N.m/(rad/s)]
6  % Estado inicial
7  w0= 0.0; % [rad/s]
8  theta0= 1.0; % [rad]
9
10 % Especificaciones de Control
11 wn= 6.0; %3.0 [rad/s]
12 zeta= 0.7; % [-]
13
14 % Cálculo de Ganancias de Realimentación de Estado
15 Ktheta= J*wn^2 % [N.m/rad]
16 Kw= J*(2*zeta*wn) - b % [N.m/(rad/s)]
17
18 %% OBSERVADOR
19 % Parámetros estimados (modelo)
20 % Asumiendo valor EXACTO --> (** Puede agregarse INCERTIDUMBRE **)
21 J_est= J; % [kg.m^2]
22 b_est= b; % [N.m/(rad/s)]
23 % Estado inicial NULO
24
25 % Especificaciones de Observador
26 p_obs= - (5*wn); % [rad/s] (Recomendación 2 a 5 veces más rápido que control)
27
28 % Cálculo de Ganancias de Observador (realim. de error de Salida)
29 Ktheta_obs= - 2*p_obs - b_est/J_est % [(rad/s)/rad]
30 Kw_obs= p_obs^2 - b_est/J_est*Ktheta_obs % [N.m/(rad/s)]
31
32

```



Error de Estimación de estado
 $\rightarrow$ Evaluar Rta. a **Escalón de Carga**
[Rechazo a Perturb.] (Hacer!)

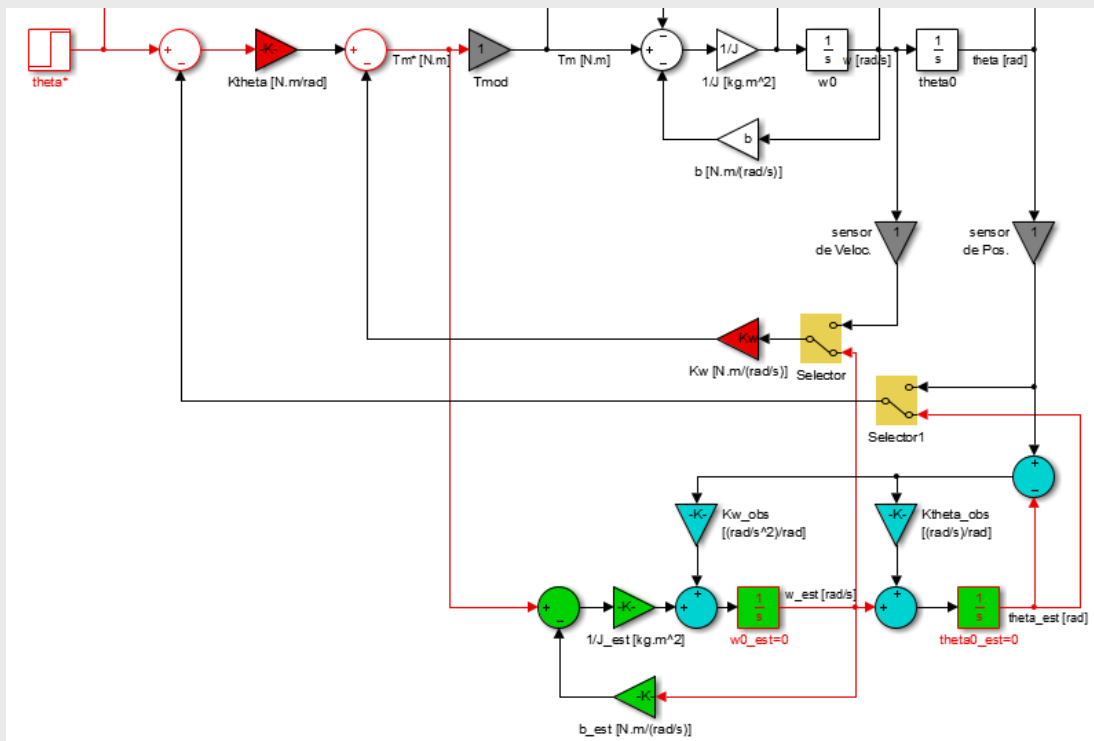
CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ejercicio:

- Control completo (Ley de Control y Observador) para Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Servosistema tipo 1 y Simulación

→ incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto (modelo Simulink discreto → Código secuencial).

→ Simulación comparativa



Control de velocidad en accionamiento

Calcular: (para control a lazo cerrado)

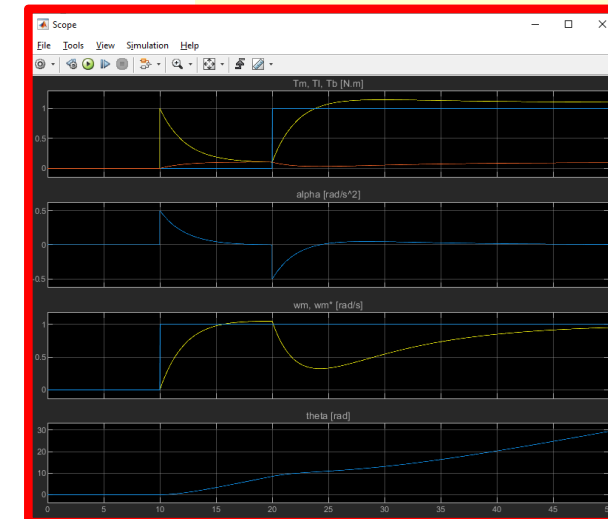
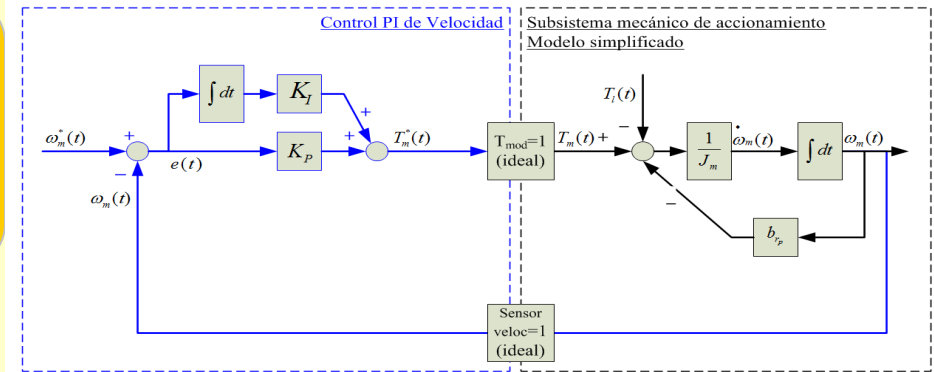
- Matriz de Transferencia → **polinomio característico**
- Polos de lazo cerrado originales** con $K_p=1.0$; $K_i=0.1$
- K_p y K_i mejorados** para polos con $\omega_n=6$ rad/s; $\xi=0,7$
- SIMULAR** Respuesta mejorada → **COMPARAR** con Simulación original

Modelo en Simulink → **SIMULACIÓN**

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

% Parámetros de Control (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1; % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1; % [N.m/rad] Ganancia Integral
```



Control de velocidad en accionamiento

Calcular: (para control a lazo cerrado)

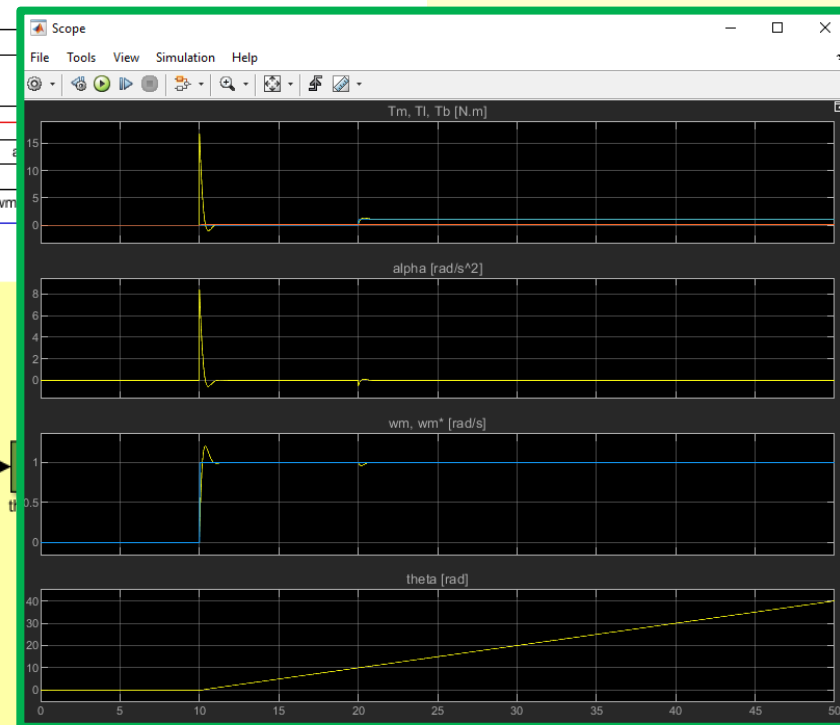
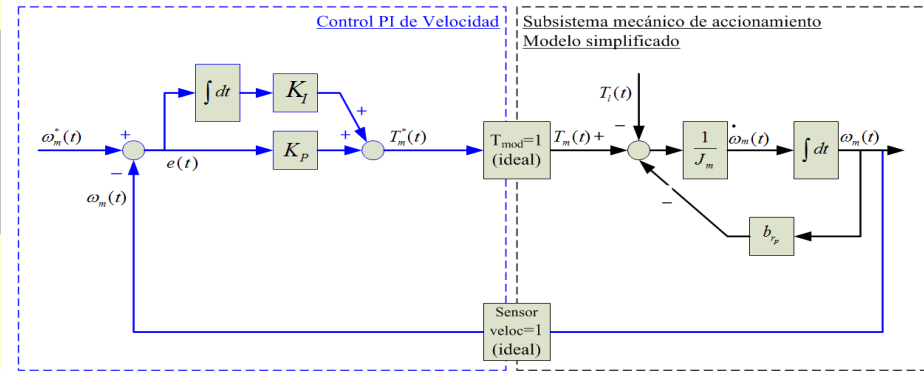
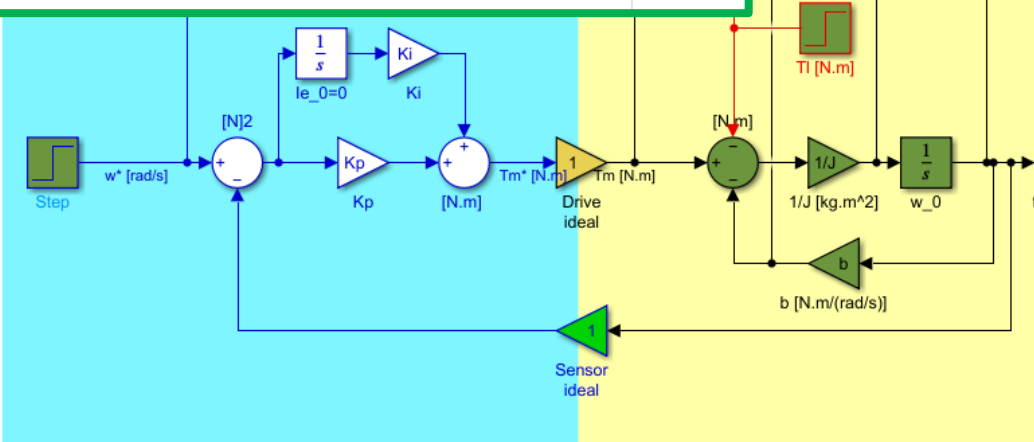
- Matriz de Transferencia → **polinomio característico**
- Polos de lazo cerrado originales** con $K_p=1.0$; $K_i=0.1$
- K_p y K_i mejorados** para polos con $\omega_n=6$ rad/s; $\xi=0,7$
- SIMULAR** Respuesta mejorada → **COMPARAR** con Simulación original

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

%% Controlador Diseño original PRUEBA AL AZAR
% Parámetros de Control originales (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1 % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1 % [N.m/rad] Ganancia Integral
% Polos de lazo cerrado originales
wn= sqrt(Ki/J) % [rad/s] Frecuencia natural
zita=(b+Kp)/(J*2*wn) % relación de amortiguamiento

%% Controlador Diseño por ubicación de Polos deseados
% Polos de lazo cerrado MEJORADOS
wn= 6 % [rad/s] Frecuencia natural
zita= 0.7 % relación de amortiguamiento
% Parámetros de Control MEJORADOS
Kp= J*2*zita*wn - b % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki= J*wn^2 % [N.m/rad] Ganancia Integral
```



CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

→ incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto

(modelo Simulink discreto → Código secuencial).
→ Simulación comparativa

```
% Estado Inicial
w_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor
theta_0= 0; % [rad/s] Velocidad Angular de Rotor

% Parámetros físicos
J= 2.0; % [kg.m^2] Momento de Inercia del Rotor
b= 0.1; % [N.m/(rad/s)] Coef. de fricción viscosa

%% Controlador Diseño original PRUEBA AL AZAR
% Parámetros de Control originales (PRUEBA AL AZAR --> SINTONIZAR CORRECTAMENTE LUEGO)
Kp= 1 % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki=0.1 % [N.m/rad] Ganancia Integral
% Polos de lazo cerrado originales
wn= sqrt(Ki/J) % [rad/s] Frecuencia natural
zita=(b+Kp)/(J*2*wn) % relación de amortiguamiento

%% Controlador Diseño por ubicación de Polos deseados
% Polos de lazo cerrado MEJORADOS
wn= 6 % [rad/s] Frecuencia natural
zita= 0.7 % relación de amortiguamiento
% Parámetros de Control MEJORADOS
Kp= J*2*zita*wn - b % [N.m/(rad/s)] Ganancia Proporcional
Ki= J*wn^2 % [N.m/rad] Ganancia Integral
```

