

## 2.1 MATRICES

INGENIERÍA Y LCC



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD  
DE INGENIERÍA

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

- 1 Matrices y clasificación
  - Matrices
  - Clasificación de matrices
- 2 Operaciones con matrices y propiedades
  - Suma de matrices
  - Multiplicación de un escalar por una matriz
  - Multiplicación de matrices
  - Potencia de una matriz cuadrada
  - Transposición de una matriz
- 3 Matrices simétricas y antisimétricas
- 4 Inversa de una matriz
  - Matrices elementales
  - Rango de una matriz
  - Determinación de la inversa
- 5 Consideraciones finales

## Definición

Si  $m$  y  $n$  son de  $\mathbb{Z}^+$ , definimos una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  como un arreglo rectangular ordenado de  $m \cdot n$  números, dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números en la matriz se llaman elementos, componentes o entradas. El elemento  $a_{ij}$  está ubicado en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.

**Notación:** Las matrices pueden denotarse con letra mayúscula:  $A, B, C, \dots$  o con un elemento representativo:  $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}], \dots$

- 1 Una matriz de orden  $m \times n$  tiene  $m$  filas (líneas horizontales o renglones) y  $n$  columnas (líneas verticales).
- 2 En la notación de matrices se usan corchetes o paréntesis:  
 $M = [m_{ij}] = (m_{ij})$ . De ser necesario se agrega su orden como subíndice  $M = [m_{ij}]_{m \times n}$ .
- 3  $\mathcal{M}_{m \times n}$  designará al conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$ . En la literatura también se lo nombra como  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , cuando sus entradas sean siempre números reales.

## Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

- 1 es una matriz cuadrada, de orden 2.
- 2  $a_{12} = 3$
- 3  $a_{11} = 1$  y  $a_{22} = 5$  son los elementos que forman su diagonal principal.

## Definición

Dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son iguales si

- 1 tienen el mismo tamaño:  $m \times n$ .
- 2  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  y para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

## Ejemplo

- Las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix}$  son iguales si, y sólo si  $x = 2$ .
- Las matrices  $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $N = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  **no** son iguales porque tienen distinto tamaño.

# Clasificación de matrices según su orden

- 1 **Matriz cuadrada:** es una matriz de orden  $n \times n$  (igual cantidad de filas que columnas). En este caso, se dice que  $A$  es de orden  $n$ . Los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$  forman su diagonal principal.
- 2 **Matriz columna o vector columna:** es una matriz de orden  $m \times 1$ . Pueden nombrarse con mayúscula (matriz) o con minúscula (vector).
- 3 **Matriz fila o vector fila:** es una matriz de orden  $1 \times n$ .

## Ejemplo

Las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -\pi \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $C = [12 \quad -3 \quad 4 \quad \frac{3}{2}]$

- $A$  es una matriz cuadrada, de orden 2. Además  $a_{11} = 1$  y  $a_{22} = 5$  forman su diagonal principal.
- $B$  es una matriz columna ( de orden  $3 \times 1$ ).
- $C$  es una matriz fila ( de orden  $1 \times 4$  )

# Clasificación de matrices según sus elementos

- 1 **Matriz cero o nula:** es una matriz  $n \times m$  tal que todos sus elementos son cero y se designa con  $O$  u  $O_{n \times m}$ .
- 2 **Matriz identidad:** es una matriz cuadrada  $I_n = [d_{ij}]$  tal que, si  $i = j$ ,  $d_{ij} = 1$  y si  $i \neq j$ ;  $d_{ij} = 0$ .

## Ejemplo

- Si  $n = 1$ ,  $I_1 = [1]$
- Si  $n = 2$ ,  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Si  $n = 3$ ,  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 3 **Matriz diagonal:** la matriz  $D$  de orden  $n$  es diagonal si para todo  $i \neq j$ ,  $d_{ij} = 0$ .

# Clasificación de matrices según sus elementos

- 4 **Matriz escalar:** es una matriz diagonal de orden  $n$  tal que  $a_{ii} = k$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- 5 **Matriz triangular superior:** es una matriz  $U$  de orden  $n$  tal que, cada vez que  $i > j$ ,  $u_{ij} = 0$ .
- 6 **Matriz triangular inferior:** es una matriz  $L$  de orden  $n$  tal que, cada vez que  $i < j$ ,  $l_{ij} = 0$ .

## Ejemplo

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$U$  es la forma genérica de una matriz triangular superior de orden 3 y  $L$  de una triangular inferior también de orden 3.

- **SUMA:**

## Definición

Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices de tamaño  $m \times n$ . Definimos la suma  $A + B$  como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

**Importante:** La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

## Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-3) & 3 + 2 \\ 2 + (-1) & 5 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

## Propiedad

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices de orden  $m \times n$  y  $O_{m \times n}$  la matriz nula del orden indicado, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- 1 *Conmutativa:*  $A + B = B + A$
- 2 *Asociativa:*  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3 *Elemento neutro:*  $A + O = O + A = A$
- 4 *Elemento opuesto:*  $A + (-A) = (-A) + A = O$

## Demostrar 1 y 3

**Observación:**  $-A$  designa a la matriz opuesta de  $A$ , que es del mismo tamaño y cada entrada es el opuesto de la entrada correspondiente en  $A$ :

$$-A = [-a_{ij}] \quad \text{si } A = [a_{ij}].$$

- **RESTA:**

## Definición

Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices de tamaño  $m \times n$ . Definimos la resta  $A - B$  como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$A - B := A + (-B)$$

## • MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:

### Definición

Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $m \times n$  y sea  $c$  un escalar. Definimos la multiplicación de un escalar por una matriz,  $cA$ , como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$cA = [ca_{ij}]$$

**Observación:** También se puede pensar a la matriz opuesta que tiene cada matriz  $A$ , como  $-A = -1A$ .

En consecuencia, la resta de matrices se puede ver como:

$$A - B = A + (-1)B.$$

### Ejemplo

$$\bullet 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} \quad \bullet (-3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ -6 & -15 & 21 \end{bmatrix}$$

## Propiedad

Sean  $A, B$  matrices de tamaño  $m \times n$  t sean  $k, s$  escalares, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- 1  $k(A + B) = kA + kB$
- 2  $(k + s)A = kA + sA$
- 3 Asociatividad mixta  $(ks)A = k(sA)$ .
- 4 Propiedad modular:  $1A = A$

**Observación:** Dado que los escalares (reales o complejos) siempre cumplen la propiedad conmutativa, de la suma o de la multiplicación, se verifican estas igualdades:

$$(ks)A = k(sA) = s(kA),$$

cualesquiera sean  $k$  y  $s$  escalares y para cualquier matriz  $A$ .

- **MULTIPLICACIÓN DE MATRICES:**

## Definición

Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $m \times n$  y sea  $B = [b_{ij}]$  una matriz de tamaño  $n \times p$ . Definimos el producto  $AB$  como la matriz de tamaño  $m \times p$  dada por

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

**Importante:** El producto de dos matrices está definido sólo cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz.

## Ejemplo

El producto  $AB$  es

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

Realicemos el producto  $BA$ .

## Propiedad

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices de tamaños tales que los productos indicados estén definidos y  $k$  un escalar. Se cumplen las siguientes propiedades:

- 1 Asociativa de la multiplicación de matrices:  $(AB)C = A(BC)$
- 2 Distributiva de la multiplicación de matrices respecto de la adición:

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (B + C)A = BA + CA$$

- 3 Elemento neutro: Si  $A$  es de orden  $n$ ,  $AI_n = I_nA = A$ .
- 4 Elemento absorbente:  $AO = O$  y también  $OA = O$
- 5  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- 6 Si  $A$  es  $m \times n$  entonces:  $AI_n = A$  y también  $I_mA = A$

**Importante:** En general, la multiplicación de matrices NO es conmutativa.

## • POTENCIA DE UNA MATRIZ CUADRADA:

### Definición

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $k$  un número entero positivo. La potencia  $k$ -ésima de  $A$ , se denota como  $A^k$ , y es la matriz de orden  $n$  que se obtiene como:

$$A^k = \underbrace{A A \dots A}_{k \text{ veces}}$$

Además, si  $k = 0$ , se define  $A^0 = I_n$

### Teorema

*Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $p, r$  enteros no negativos, entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

- $A^p A^r = A^{p+r}$
- $(A^p)^r = A^{p \cdot r}$

¿Cómo demostraría esas proposiciones?

## • MATRIZ TRANSPUESTA:

### Definición

Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . La transpuesta de  $A$ , denotada como  $A^T$ , se define como la matriz  $n \times m$  cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de  $A$ .

### Ejemplo

• Si  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  es  $3 \times 2$ , entonces  $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$  de orden  $2 \times 3$ .

• Para  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & \frac{5}{3} \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$  de orden 3,  $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$  del mismo orden.

## Teorema

*Sean  $A$  y  $B$  matrices de tamaños tales que las operaciones indicadas en cada caso están bien definidas y  $k$  un escalar.*

- 1  $(A^T)^T = A$
- 2  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3  $(kA)^T = k(A^T)$
- 4  $(AB)^T = B^T A^T$
- 5  $(A^n)^T = (A^T)^n, n \in \mathbb{N}$

Demostrar 3 (y 1)

## Definición

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se dice que  $A$  es una matriz simétrica si

$$A = A^T$$

es decir, si para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  entonces  $a_{ij} = a_{ji}$ .

## Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  es simétrica.

## Teorema

- 1 *La suma de matrices simétricas, es simétrica.*
- 2 *Toda matriz diagonal es simétrica.*
- 3 *Si  $A$  es simétrica,  $A^n$  es simétrica, con  $n \in \mathbb{N}_0$ .*
- 4 *Si  $A$  es una matriz simétrica de  $m \times m$  y  $B$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces  $B^T A B$  es simétrica.*
- 5 *Si  $A$  y  $B$  son simétricas de orden  $n$  y  $AB$  es simétrica entonces  $AB = BA$*
- 6 *El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.*
- 7 *La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica.*

**Demostrar 1 (y 6 en la práctica)**

**Importante:** El producto de matrices simétricas no es, en general, una matriz simétrica.

## Definición

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se dice que  $A$  es una matriz antisimétrica si

$$A^T = -A,$$

es decir, para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  se cumple que

$$a_{ji} = -a_{ij}$$

## Ejemplo

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica.

## Teorema

*Si  $A$  es antisimétrica entonces todos los elementos de la diagonal son iguales a 0.*

Demostrar

## Propiedad

*Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces:*

- 1  $A - A^T$  es antisimétrica.
- 2 Puede ser escrita en forma única como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Demostrar 1

## Definición

La traza de una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  de orden  $n$ , se denota  $tr(A)$  y es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

## Teorema

Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $n$  y sea  $c$  un escalar. Entonces, valen las siguientes propiedades.

- 1  $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- 2  $tr(I_n) = n$
- 3  $tr(cA) = c tr(A)$
- 4  $tr(A^T) = tr(A)$
- 5  $tr(AB) = tr(BA)$

## Definición

Una matriz  $A$  de orden  $n$  es inversible si existe una matriz  $B$  de orden  $n$  tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Si existe la matriz  $B$ , se denomina inversa de  $A$ .

## Observaciones:

- Si  $A$  es inversible, también se dice que es no singular o regular.
- La matriz  $A$  de orden  $n$  que no tiene inversa se llama no inversible o singular.
- Las matrices no cuadradas no tienen inversa.
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

## Ejemplo

- 1 La inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  es  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- 2 La matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , carece de inversa.
- 3 Toda matriz  $A$  de orden 2,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es inversible si y sólo si  $ad - bc \neq 0$  y su inversa es

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## Teorema

*Si  $A$  es cualquier matriz inversible de orden  $n$ , entonces su inversa es única.*

## Demostrar

- Debido a este teorema (cuando una matriz tiene inversa, ésta es única) es posible hablar de “la” inversa de  $A$ , que se denota por  $A^{-1}$ .
- La igualdad de la definición se escribe:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

## Teorema

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces

- ①  $AB$  es una matriz inversible y la inversa de  $AB$  es  $B^{-1}A^{-1}$ , es decir,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- ②  $A^{-1}$  es una matriz inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$
- ③ Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A^n$  es una matriz inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- ④ Para todo escalar  $c \neq 0$ ,  $cA$  es una matriz inversible y  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
- ⑤  $A^T$  es una matriz inversible y  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- ⑥  $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$  para toda matriz  $B$  no singular.

Demostrar 1,2,4. Verificar 3.

La tercera proposición del teorema anterior enuncia que:

## Teorema

*Sean  $A$  y  $B$  dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces*

- 3 *Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A^n$  es una matriz inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$*

Se adoptará una notación más práctica para las **potencias no negativas de la inversa de la matriz  $A$** , así

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

**Importante:**  $A^{-n}$  se lee **potencia  $n$ -ésima de la inversa de  $A$** .

Existen tres tipos de Operaciones Elementales que pueden realizarse en las filas de una matriz.

- 1 Intercambiar dos filas.
- 2 Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
- 3 Sumar a una fila, un múltiplo de otra fila.

## Definición

Una matriz de orden  $n$  se denomina matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad  $I_n$  al efectuar una sola operación elemental en las filas.

## Ejemplo

Las siguientes son matrices elementales

- Intercambiar la segunda fila con la tercera fila.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Multiplicar por  $-3$  la segunda fila  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
- Sumar 5 veces la tercera fila a la primera.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## Teorema

- 1 *La pre multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera  $A$ , da por resultado una matriz  $B$  que tiene la misma operación elemental de filas que la elemental.*
- 2 *La post multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera  $A$ , da por resultado una matriz  $B$  que tiene la misma operación elemental de columnas que la elemental. Observación: En general, trabajaremos con la propiedad 1).*
- 3 *Toda matriz elemental es inversible, y su inversa también es una matriz elemental.*

## Ejemplo

Consideremos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  y la matriz elemental

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . El producto  $EA$  es:  $EA = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  que es la

misma matriz que se obtiene al sumar 5 veces la tercera fila a la primera de  $A$ .

**Observación:** Si se aplica una operación elemental a las filas de  $I$  para producir una matriz elemental  $E$ , entonces hay otra operación en las filas de  $E$  que permite obtener a  $I$ .

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $m \times n$ . La matriz  $B$  es equivalente por renglones con  $A$  si existe un número finito de matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tal que

$$B = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A$$

Se denota  $B \sim A$

**Importante:** Si  $B \sim A$  entonces  $A \sim B$ . Por esta simetría se dice que  $A$  y  $B$  son equivalentes.

## Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  es equivalente a  $I_2$ .

# Matriz escalonada y escalonada reducida

## Definición

Se dice que una matriz es escalonada, si satisface:

- 1 El primer elemento diferente de cero en la fila es 1.
- 2 Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupados en la parte inferior de la matriz.
- 3 Si las filas  $i$  e  $i + 1$  son dos filas sucesivas que no constan exclusivamente de ceros entonces, el primer número no nulo en la fila  $i + 1$  debe estar a la derecha del primer número no nulo en la fila  $i$ .

## Definición

Se dice que una matriz es escalonada reducida si:

- 1 La matriz es escalonada.
- 2 Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

**Observación:** Toda matriz escalonada reducida es escalonada.

# Matriz escalonada y escalonada reducida

## Ejemplo

Las siguientes matrices tienen forma escalonada por filas.

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices tienen forma escalonada reducida.

$$\bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La siguiente matriz no está en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

# Propiedad de matriz escalonada y escalonada reducida

## Propiedad

Sea  $A$  una matriz cualquiera. En toda matriz escalonada obtenida a partir de  $A$ , son iguales:

- La cantidad de filas no nulas es la misma.
- La cantidad de columnas que tienen el primer elemento no nulo (leído de izquierda a derecha) en cada una de esas filas, es el mismo.

## Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  tiene como forma escalonada y escalonada

reducida respectivamente:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Ambas tienen

2 filas no nulas y 2 columnas que contienen primer elemento distinto de 0 en cada una de esas filas.

## Definición

El rango de una matriz  $A$  es el número de filas diferentes de cero en cualquier matriz escalonada  $A'$  obtenida a partir de  $A$  mediante operaciones elementales de fila, se anota como  $\rho(A)$ .

**Observación:** El número que determina el rango de una matriz  $A$  en su forma escalonada, es el mismo que se obtiene en la matriz escalonada reducida de  $A$ . Por lo tanto, en la definición de rango se puede sustituir "escalonada" por "escalonada reducida" y no cambia.

## Ejemplo

Determinar, a simple vista, el rango de las siguientes matrices e indicar si son inversibles.

• 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

• 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Determinar el rango de las matrices

1 
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2 
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

3 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Propiedad

Sea  $A$  de orden  $n$ .

$$A \sim I_n \text{ si y sólo si } A \text{ es inversible.}$$

Aplicando la propiedad anterior repetidas veces, se puede determinar la inversa de la matriz  $A$  de orden  $n$ .

$$[ A \mid I_n ] \sim [ I_n \mid A^{-1} ]$$

## Ejemplo

Determinar, si existe, la matriz inversa de

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

## Teorema

*La matriz  $A$  de orden  $n$  es inversible si y sólo si  $\rho(A) = n$ .*

## Ejemplo

Determinar la inversa, si existe, de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Consideraciones finales: Espacios Vectoriales

## 1.2.2 ESPACIO VECTORIAL REAL $V$

**Definición:** Un espacio vectorial real  $V$  es un conjunto de objetos denominados *vectores*, junto con dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por un escalar*, que satisfacen los diez axiomas que se enuncian a continuación:

Según la definición de Raichman-Totter y las operaciones definidas con sus propiedades, el conjunto  $\mathcal{M}_{m \times n}$  de todas las matrices de cierto orden  $m \times n$  forman un espacio vectorial real.

En este espacio un **vector** es una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ .

### Ejemplo

Hay distintos espacios vectoriales reales con las operaciones de suma y multiplicación por escalar antes definidos, según cuál sea el conjunto en el que se consideran. Por ejemplo:

- $\mathcal{M}_{2 \times 3}$  (matrices de orden  $2 \times 3$ ).
- $\mathcal{M}_{n \times 1}$  (las matrices columna  $n \times 1$ )  $\approx \mathbb{R}^n$ .

# Consideraciones finales: Combinación lineal

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son matrices del mismo tamaño y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n$$

es **una combinación lineal** de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

## Ejemplo

Sean  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

①  $2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es una combinación lineal de  $A$  y  $B$ .

②  $0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es una combinación lineal de  $A$  y  $B$   
que tiene como resultado la matriz  $O_{2 \times 3}$ .