

# UNIDAD 2

## Índice

<b>1. Matrices</b>	<b>1</b>
1.1. Matrices	2
1.2. Clasificación de matrices	3
1.3. Operaciones con matrices y propiedades	4
1.3.1. Suma de matrices	4
1.3.2. Multiplicación de un escalar por una matriz	6
1.3.3. Multiplicación de matrices	7
1.3.4. Transposición de una matriz	10
1.4. Matrices Simétricas y antisimétricas	11
1.5. Inversa de una matriz	13
1.5.1. Matrices elementales	17
1.5.2. Rango de una matriz	20
1.5.3. Determinación de la inversa	22
1.6. Consideraciones finales	24
1.6.1. Espacios Vectoriales	24
1.6.2. Combinación lineal	24

## 1. Matrices

Los desarrollos de proyectos ingenieriles a menudo requieren del análisis de datos numéricos provenientes de experimentos o de modelos. En base a estos datos se puede predecir cuán eficiente o exitoso será un procedimiento o cuán adecuado será el modelo diseñado para lo que se pretende lograr.

Los datos que se obtienen de diferentes estudios, casi siempre están relacionados entre sí; para poder conservar, sintetizar y usar la información de esos valores relacionados se ordenan en matrices.

En esta primera parte de la unidad 2, se estudiarán aspectos básicos de matrices y de algunas operaciones que las involucran.

## 1.1. Matrices

### Definición 1.1: Matriz

Si  $m$  y  $n$  son de  $\mathbb{Z}^+$ , definimos una matriz  $A$  de orden o tamaño  $m \times n$  como un arreglo rectangular ordenado de  $m \cdot n$  números, dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números en la matriz se llaman elementos, componentes o entradas.

El elemento  $a_{ij}$  está ubicado en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.

**Notación:** Las matrices pueden denotarse con letra mayúscula:  $A, B, C, \text{etc.}$  o con un un elemento representativo:  $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}]$ . Esta última notación aparece cuando se analiza el comportamiento de elementos que ocupen una determinada posición, es decir cuando se imponen condiciones para  $i$  y  $j$ .

1. Una matriz de orden  $m \times n$  tiene  $m$  filas (líneas horizontales o renglones) y  $n$  columnas (líneas verticales).
2. En la notación de matrices se usan corchetes o paréntesis:  $M = [m_{ij}] = (m_{ij})$ . De ser necesario se agrega su orden como subíndice  $M = [m_{ij}]_{m \times n}$ .
3. Con  $\mathcal{M}_{m \times n}$  se designará al conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$ . En la bibliografía disponible también se lo nombra como  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , cuando sus entradas sean siempre números reales.

### Ejemplo 1.1

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

- Es una matriz cuadrada, de orden 2.
- El elemento de la primer fila y segunda columna es 3 y se designa con  $a_{12}$ .
- $a_{11} = 1$  y  $a_{22} = 5$  son los elementos que forman su diagonal principal.

### Definición 1.2: Igualdad de matrices

Dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son iguales si

1. tienen el mismo tamaño:  $m \times n$ .
2.  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  y para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

### Ejemplo 1.2

- Las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix}$  son iguales si, y sólo si  $x = 2$ .

- Las matrices  $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $N = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  no son iguales porque tienen distinto tamaño.

## 1.2. Clasificación de matrices

### Clasificación de matrices según su orden

- Matriz cuadrada:** es una matriz de orden  $n \times n$  (igual cantidad de filas que columnas). En este caso, se dice que  $A$  es de orden  $n$ . Los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$  forman su diagonal principal.
- Matriz columna o vector columna:** es una matriz de orden  $m \times 1$ , o sea, con sólo una columna.
- Matriz fila o vector fila:** es una matriz de orden  $1 \times n$ , es decir, que tiene sólo una fila.

**Observación:** Dado que se puede hacer una identificación entre las matrices columna  $n \times 1$  (o matrices fila  $1 \times n$ ) y los elementos de  $\mathbb{R}^n$ , según el contexto se nombrará a estas matrices con letras mayúsculas (cuando sea necesario considerarlas como matrices) o con letras minúsculas (cuando convenga considerarlas como vectores).

**Ejemplo 1.3** Las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -\pi \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $C = [12 \quad -3 \quad 4 \quad \frac{3}{2}]$

- $A$  es una matriz cuadrada, de orden 2. Además  $a_{11} = 1$  y  $a_{22} = 5$  forman su diagonal principal.
- $B$  es una matriz columna ( de orden  $3 \times 1$ ).
- $C$  es una matriz fila ( de orden  $1 \times 3$ )

### Clasificación de matrices según sus elementos

- Matriz cero o nula:** es una matriz  $n \times m$  tal que todos sus elementos son cero y se designa con  $O$  u  $O_{n \times m}$ .
- Matriz diagonal:** la matriz  $D$  de orden  $n$  es diagonal si para todo  $i \neq j$ ,  $d_{ij} = 0$ .
- Matriz escalar:** es una matriz diagonal de orden  $n$  tal que  $a_{ii} = k$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Matriz identidad:** es una matriz cuadrada  $I_n = [d_{ij}]$  tal que, si  $i = j$ ,  $d_{ij} = 1$  y si  $i \neq j$ ;  $d_{ij} = 0$ .
- Matriz triangular superior:** es una matriz  $U$  de orden  $n$  tal que, cada vez que  $i > j$ ,  $u_{ij} = 0$ .
- Matriz triangular inferior:** es una matriz  $L$  de orden  $n$  tal que, cada vez que  $i < j$ ,  $l_{ij} = 0$ .

**Ejemplo 1.4**

- Si  $n = 1$ ,  $I_1 = [1]$
- Si  $n = 2$ ,  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Si  $n = 3$ ,  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es matriz diagonal y escalar con  $k = 1$ .

**Ejemplo 1.5**

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$U$  es la forma genérica de una matriz triangular superior de orden 3 y  $L$  de una triangular inferior también de orden 3.

**Ejemplo 1.6**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$$

La matriz  $A$  es de orden 4 y es una matriz diagonal. También se puede asegurar que es una matriz triangular superior e inferior al mismo tiempo. Aún así, siendo diagonal, no es una matriz escalar ya que  $a_{11} = 2 \neq -\pi = a_{44}$ .

**1.3. Operaciones con matrices y propiedades**

Así como sucede con los números, que al sumarlos o multiplicarlos producen como resultado otros números, se pueden definir distintas operaciones entre matrices que nos proveerán nuevas matrices.

Las distintas operaciones están fuertemente condicionadas por el orden de cada matriz.

También se definirá aquí una operación entre un escalar y una matriz que tiene como resultado otra matriz.

La importancia de las distintas operaciones está dada por las propiedades que cada una verifica.

**1.3.1. Suma de matrices****Definición 1.3: Suma de matrices**

Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices de tamaño  $m \times n$ . Definimos la suma  $A + B$  como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

**Importante:** La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

**Ejemplo 1.7**

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \begin{bmatrix} 23 & 5 & 1 \\ e & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -1 & 4 \\ e+4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

### Teorema 1.1: Propiedades de la suma de matrices

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices cualesquiera de orden  $m \times n$  y  $O_{m \times n}$  la matriz nula del orden indicado, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

1. Conmutativa:  $A + B = B + A$
2. Asociativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Elemento neutro:  $A + O = O + A = A$
4. Elemento opuesto:  $A + (-A) = (-A) + A = O$

**Demostración:** Cada igualdad del teorema se comprueba mostrando que las matrices obtenidas a ambos lados de la igualdad son del mismo orden y que las entradas correspondientes (o sea, de la misma posición) son iguales

Se demostrará sólo las proposiciones (1) y (3). Las restantes se dejan a cargo del lector.

- Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices cualesquiera del mismo orden,  $m \times n$ . Su suma es otra matriz del mismo orden obtenida como:

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] && \text{por definición de suma de matrices} \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] && \text{ya que la suma de números reales es conmutativa} \\ &= B + A && \text{por definición de suma de matrices} \end{aligned}$$

- Para demostrar la proposición (3) se considera una matriz  $A$  de orden  $n \times n$  a la que se le suma la matriz nula  $O$  del mismo orden.

$$\begin{aligned} A + O &= [a_{ij} + o_{ij}] && \text{por definición de suma de matrices} \\ &= [a_{ij} + 0] && \text{ya que todas las entradas de la matriz } O \text{ son cero.} \\ &= [a_{ij}] = A && \text{por ser } 0 \text{ la identidad para la suma de números reales} \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que  $O + A = A$ .

Con esto queda completa la demostración de las dos igualdades. ■

**Observación:** En el teorema 1.1, el símbolo  $-A$  designa a la matriz opuesta de  $A$ , que es del mismo tamaño y que se forma con el opuesto de cada entrada correspondiente de  $A$ :

$$-A = [-a_{ij}] \quad \text{si } A = [a_{ij}].$$

### Definición 1.4: Resta de matrices

Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices de tamaño  $m \times n$ . Definimos la resta  $A - B$  como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$A - B := A + (-B)$$

### 1.3.2. Multiplicación de un escalar por una matriz

#### Definición 1.5: Multiplicación de un escalar por una matriz

Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $m \times n$  y sea  $c$  un escalar. Definimos la multiplicación de un escalar por una matriz,  $cA$ , como la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$cA = [ca_{ij}]$$

#### Ejemplo 1.8

$$\begin{aligned} \blacksquare 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} & \blacksquare (-3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ -6 & -15 & 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### Teorema 1.2: Propiedades de la multiplicación de un escalar por una matriz

Sean  $A, B$  matrices de tamaño  $m \times n$  t sean  $k, s$  escalares, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

1. Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la suma de matrices:  
 $k(A + B) = kA + kB$
2. Distributiva de la multiplicación por escalar respecto de la suma de escalares:  $(k + s)A = kA + sA$
3. Asociatividad mixta  $(ks)A = k(sA)$
4. Propiedad modular:  $1A = A$

#### Observaciones:

- Dado que los escalares (reales o complejos) siempre cumplen la propiedad conmutativa, de la suma o de la multiplicación, se verifican estas igualdades:

$$(ks)A = k(sA) = s(kA)$$

- Una de las aplicaciones más importantes que tiene este teorema gira en torno a las igualdades que establece entre dos matrices
- También se puede pensar a la matriz opuesta que tiene cada matriz  $A$ , como  $-A = -1A$ . En consecuencia, la resta de matrices sería una combinación de una suma y una multiplicación por escalar:  $A - B = A + (-1)B$ .  
La diferencia de matrices no verifica ninguna de las propiedades que sí verifica la suma de ellas, por eso es que poder reescribirla con las otras operaciones, nos permite aplicar las propiedades que éstas sí verifican.

### 1.3.3. Multiplicación de matrices

#### Definición 1.6: Multiplicación de matrices

Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $m \times n$  y sea  $B = [b_{ij}]$  una matriz de tamaño  $n \times p$ . Definimos el producto  $AB$  como la matriz de tamaño  $m \times p$  dada por

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

**Importante:** El producto de dos matrices está definido sólo cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz.

#### Ejemplo 1.9

Dadas las matrices:

$$A = [3 \quad -4 \quad 0 \quad 5] \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

según la definición dada, sólo es posible realizar algunos productos entre ellas, ya que su orden impone una restricción. Se calcula cada uno de ellos:

- La matriz producto  $AB$  es una matriz de orden  $1 \times 1$ , cuyo único elemento surge de multiplicar la única fila de  $A$  por la única columna de  $B$ :

$$AB = [3 \quad -4 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [3 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 3] = [25]$$

- El producto,  $BA$  devuelve una matriz de orden  $4 \times 4$  calculada como:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} [3 \quad -4 \quad 0 \quad 5] \\ &= \begin{bmatrix} 6 \cdot 3 & 6 \cdot (-4) & 6 \cdot 0 & 6 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot (-4) & (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -24 & 0 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 10 \\ -3 & 4 & 0 & -5 \\ 9 & -12 & 0 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Por otro lado, cuando se hace el producto matricial  $AC$ , la matriz obtenida es una matriz

fila de orden  $1 \times 4$ :

$$AC = [3 \quad -4 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [20 \quad 8 \quad -26 \quad -5]$$

Aquí, cada elemento se ha obtenido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (ac)_{11} &= 3 \cdot 7 & + & (-4) \cdot 4 & + & 0 \cdot 5 & + & 5 \cdot 3 & = & 20 \\ (ac)_{12} &= 3 \cdot 3 & + & (-4) \cdot (-1) & + & 0 \cdot 3 & + & 5 \cdot (-1) & = & 8 \\ (ac)_{13} &= 3 \cdot (-2) & + & (-4) \cdot 5 & + & 0 \cdot 0 & + & 5 \cdot 0 & = & -26 \\ (ac)_{14} &= 3 \cdot 1 & + & (-4) \cdot 2 & + & 0 \cdot 0 & + & 5 \cdot 0 & = & -5 \end{aligned}$$

- Finalmente, el producto  $CB$  es una matriz de orden  $4 \times 1$  (matriz columna) en donde el único elemento de cada fila se obtiene multiplicando cada fila de  $C$  por la (única) columna de  $B$ :

$$CB = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 23 \\ 36 \\ 16 \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 1.10

El producto  $AB$  entre las matrices  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$  es una matriz de orden  $3 \times 2$ , ya que  $A$  es  $3 \times 2$  y  $B$  es  $2 \times 2$ :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, no es posible efectuar el producto  $BA$  dado que la cantidad de columnas de la matriz  $B$  (son 2), no coincide con la de filas de la  $A$  (que son 3).

El ejemplo precedente, muestra que cuando se definen operaciones entre objetos matemáticos (funciones, matrices, conjuntos, etc.), por más que sus elementos sean números reales no todas las propiedades que cumplen los números reales son cumplidas por dichos objetos, debido al modo de operar entre ellos.

Esta observación hace necesario revisar cada una de las propiedades de cada operación definida entre las matrices.

### Teorema 1.3: Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices de tamaños tales que los productos indicados estén definidos y  $k$  un escalar. Se cumplen las siguientes igualdades:

1. Asociativa de la multiplicación de matrices:  $(AB)C = A(BC)$
2. Distributiva de la multiplicación de matrices respecto de la adición:

$$A(B + C) = AB + AC \quad (B + C)A = BA + CA$$

3. Elemento neutro: Si  $A$  es de orden  $n$ ,  $AI_n = I_nA = A$ .
4. Elemento absorbente:  $AO = O$  y también  $OA = O$
5.  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
6. Si  $A$  es  $m \times n$  entonces:  $AI_n = A$  y también  $I_mA = A$

#### Observaciones:

- En general, la multiplicación de matrices NO es conmutativa. Esto mismo se puede deducir de los ejemplos previos de esta sección, Ejemplo 9 y 10, en donde los productos conmutados tienen distinto orden (por eso no pueden ser iguales), o bien, uno de ellos ni siquiera está definido.

Además, si dos matrices  $A$  y  $B$  tuvieran un orden tal que  $AB$  y  $BA$  pudieran obtenerse y fueran del mismo orden, nada permite asegurar que esas matrices sean iguales.

- Por aplicación de la propiedad asociativa, un producto de cuatro matrices  $ABCD$  se puede calcular como  $A(BCD)$  o  $(ABC)D$  o  $A(BC)D$ , y así sucesivamente. No importa cómo se agrupen las matrices al realizar el cálculo de un producto, siempre y cuando se conserve el orden de izquierda a derecha de las matrices. Esta propiedad garantiza que si asociamos de modo más conveniente, se obtiene la misma matriz producto.

### Definición 1.7: Potencia de una matriz cuadrada

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $k$  un número entero positivo. La potencia  $k$ -ésima de  $A$ , se denota como  $A^k$ , y es la matriz de orden  $n$  que se obtiene como:

$$A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ veces}}$$

Además, si  $k = 0$ , se define  $A^0 = I_n$

La potencia de matrices cuadradas verifica ciertas propiedades que se enuncian a continuación:

**Teorema 1.4: Propiedades de la potencia de una misma base**

Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $p, r$  números enteros no negativos, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $A^p A^r = A^{p+r}$
- $(A^p)^r = A^{pr}$

**1.3.4. Transposición de una matriz****Definición 1.8: Matriz transpuesta**

Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . La transpuesta de  $A$ , denotada como  $A^T$ , se define como la matriz  $n \times m$  cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de  $A$ .

**Ejemplo 1.11**

- Si  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  es de orden  $3 \times 2$ , entonces  $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$  es de orden  $2 \times 3$ .
- Dada  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & \frac{5}{3} \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$  de orden 3, su transpuesta es  $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$  y es mismo orden.

**Teorema 1.5: Propiedades de matriz transpuesta**

Sean  $A$  y  $B$  matrices de tamaños tales que las operaciones indicadas en cada caso están bien definidas y  $k$  un escalar.

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(kA)^T = k(A^T)$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$
5.  $(A^n)^T = (A^T)^n, n \in \mathbb{N}$

**Demostración:** Se demuestra la igualdad enunciada en (3).

Sea  $k$  un número real y  $A$  una matriz cualquiera de orden  $m \times n$ .

$$\begin{aligned}
 (kA)^T &= (k[a_{ij}])^T \\
 &= [(ka)_{ij}]^T && \text{por la definición de producto por un escalar} \\
 &= [((ka)_{ji})] && \text{formándose así el elemento } ji \text{ de la matriz } (kA)^T
 \end{aligned}$$

Al analizar el miembro derecho de la igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned}
 k A^T &= k[a_{ij}]^T \\
 &= k[a_{ji}] && \text{por la definición de matriz transpuesta} \\
 &= [(ka)_{ji}] && \text{formándose así el elemento } ji \text{ de la matriz } k A^T
 \end{aligned}$$

Así, ambos miembros tienen el mismo elemento en su posición  $ji$ . Por lo tanto las matrices son iguales ■

## 1.4. Matrices Simétricas y antisimétricas

### Definición 1.9: Matriz simétrica

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se dice que  $A$  es una matriz simétrica si

$$A = A^T$$

es decir, si para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  entonces  $a_{ij} = a_{ji}$ .

### Ejemplo 1.12

La matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  es simétrica.

### Teorema 1.6: Propiedades de matrices simétricas

1. La suma de matrices simétricas, es simétrica.
2. Toda matriz diagonal es simétrica.
3. Si  $A$  es simétrica,  $A^n$  es simétrica, con  $n \in \mathbb{N}_0$ .
4. Si  $A$  es una matriz simétrica de  $m \times m$  y  $B$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces  $B^T A B$  es simétrica.
5. Si  $A$  y  $B$  son simétricas de orden  $n$  y  $AB$  es simétrica entonces  $AB = BA$
6. El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.
7. La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica.

**Importante:** El producto de matrices simétricas no es, en general, una matriz simétrica.

**Demostración:** Se demuestra aquí la primera proposición.

Si se consideran  $A$  y  $B$  dos matrices simétricas de orden  $n$ , es decir que verifican:

$$A = A^T \quad \text{y} \quad B = B^T,$$

se debe probar que la matriz obtenida al sumarlas coincide con la traspuesta de esta misma matriz.

$$\begin{aligned}
 A + B &= A^T + B^T && \text{ya que cada matriz es simétrica (hipótesis)} \\
 &= (A + B)^T && \text{por propiedad de la traspuesta de suma de matrices}
 \end{aligned}$$

Luego, la matriz obtenida al sumar  $A$  y  $B$  cumple con la definición de matriz simétrica, o sea,  $A + B$  es simétrica. ■

### Definición 1.10: Matriz antisimétrica

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se dice que  $A$  es una matriz antisimétrica si

$$A^T = -A,$$

es decir, para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  se cumple que  $a_{ji} = -a_{ij}$ .

**Observación:** La condición que define a las matrices antisimétricas puede escribirse equivalentemente como  $A = -A^T$ , y entre sus elementos:  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

### Ejemplo 1.13

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  es antisimétrica.

### Teorema 1.7: Propiedades de matrices antisimétricas

Si  $A$  es antisimétrica entonces todos los elementos de la diagonal son iguales a 0.

**Demostración:** sea  $a_{ii}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , una entrada cualquiera de la diagonal principal de la matriz  $A$  que es antisimétrica.

Por definición de matriz antisimétrica,  $A$  verifica que  $-A = A^T$ , es decir que cada uno de sus elementos debe verificar que  $-a_{ij} = a_{ji}$ .

Los elementos de la diagonal principal, donde  $i = j$ , la condición se expresa como:

$$-a_{ii} = a_{ii},$$

y el único número real que es igual a su opuesto es el 0. Por lo tanto cualquier entrada de la diagonal principal de una matriz antisimétrica sólo puede valer 0. ■

### Propiedad 1.8

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces:

1.  $A - A^T$  es antisimétrica.
2. Puede ser escrita en forma única como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

**Demostración:** Sea  $A$  una matriz cualquiera cuadrada de orden  $n$  y  $a_{ji}$  un elemento cualquiera de ella.

Se designa  $C = A - A^T$  y se analiza su transpuesta:

$$\begin{aligned} C^T &= (A - A^T)^T \\ &= A^T - (A^T)^T && \text{por propiedad de transpuesta de una suma de matrices} \\ &= A^T - A && \text{por propiedad de transpuesta de una transpuesta} \\ &= -(A^T - A) && \text{por distributiva del producto de escalar por suma de matrices} \\ &= -C && \text{de acuerdo a nuestra notación} \end{aligned}$$

Luego,  $C = -C$ , es decir que  $C = A - A^T$  verifica la condición que permite asegurar que ella es una matriz antisimétrica. ■

### Definición 1.11: Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  de orden  $n$ , se denota  $tr(A)$  y es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

### Teorema 1.9: Propiedades de la traza de una matriz

Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $n$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces, valen las siguientes igualdades:

1.  $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2.  $tr(I_n) = n$
3.  $tr(cA) = c tr(A)$
4.  $tr(A^T) = tr(A)$
5.  $tr(AB) = tr(BA)$

## 1.5. Inversa de una matriz

### Definición 1.12: Inversa de una matriz

Una matriz  $A$  de orden  $n$  es inversible si existe una matriz  $B$  de orden  $n$  tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Si existe la matriz  $B$ , se denomina inversa de  $A$ .

#### Observaciones:

- Si  $A$  es inversible, también se dice que es no singular o regular.
- La matriz  $A$  de orden  $n$  que no tiene inversa se llama no inversible o singular.
- Las matrices no cuadradas carecen de inversa.
- Sólo algunas matrices cuadradas tienen inversa.

#### Ejemplo 1.14

1. La inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  es  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  ya que

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & 2 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Y, además,  $BA = I_2$  (como puede comprobar fácilmente el lector).  
Luego,  $B$  cumple los requisitos para ser la matriz inversa de  $A$ .

2. La matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , carece de inversa. Se verifica suponiendo lo contrario.

Si existiera una matriz  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  que sea inversa de  $A$ , debería cumplir que  $AB = I_2$ .

Pero

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Es decir que cualquier matriz de orden 2 que se postule como su inversa, no verificará la condición que debería cumplir. Por lo tanto es incorrecto suponer que  $A$  sea inversible, porque de hecho es matriz singular.

3. Toda matriz  $A$  de orden 2,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es inversible si y sólo si  $ad - bc \neq 0$  y su inversa es

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

En lo que sigue, se verán propiedades y métodos adecuados para determinar de un modo eficiente si una matriz tiene inversa o no. Determinar esto, contando sólo con la definición, es extremadamente complicado porque supone encontrar "la" matriz inversa entre todas las posibles o determinar que "ninguna" matriz es inversa de la dada.

### Teorema 1.10: Unicidad de la inversa

Si  $A$  es cualquier matriz inversible de orden  $n$ , entonces su inversa es única.

#### Demostración:

Sea  $A$  una matriz cualquiera inversible de orden  $(n)$ , o sea, existe  $B$  tal que  $AB = BA = I_n$ . Si se supone que  $A$  tiene más de una matriz inversa,  $C$  y  $C \neq B$ . Como  $C$  es inversa de  $A$ , verifica que  $AC = CA = I_n$ .

$$\begin{aligned} B &= BI_n && \text{por ser } I_n \text{ la identidad del producto.} \\ &= B(AC) && \text{dado que } C \text{ es inversa de } A. \\ &= (BA)C && \text{por asociativa del producto.} \\ &= I_n C && \text{por ser } B \text{ inversa de } A: \\ &= C && \text{por ser } I_n \text{ la identidad del producto.} \end{aligned}$$

Luego,  $B = C$ , lo que contradice el supuesto de  $B \neq C$ .

La contradicción aparece porque se supuso que  $A$  tiene más de una inversa.

Por lo tanto, la matriz inversible  $A$  tiene sólo una inversa. ■

#### Notación:

- Debido a este teorema (cuando una matriz tiene inversa, ésta es única) es posible hablar de "la" inversa de  $A$ , que se denota por  $A^{-1}$ .
- La igualdad de la definición se escribe:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

En el teorema que sigue, se enuncian propiedades que tienen las matrices inversibles en relación con distintas operaciones.

Se debe prestar especial atención al aplicarlas, ya que muchas de ellas evidencian consecuencias de que la multiplicación de matrices no sea conmutativa, aún cuando estas sean cuadradas y del mismo orden.

**Teorema 1.11: Propiedades de las matrices inversibles**

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces

1.  $AB$  es una matriz inversible y la inversa de  $AB$  es  $B^{-1}A^{-1}$ , es decir,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2.  $A^{-1}$  es una matriz inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$
3. Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A^n$  es una matriz inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
4. Para todo escalar  $c \neq 0$ ,  $cA$  es una matriz inversible y  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
5.  $A^T$  es una matriz inversible y  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6.  $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$  para toda matriz  $B$  no singular.

**Demostración:**

Se demostrará sólo las igualdades que enuncian as proposiciones (1), (2) y (4) del Teorema 1.11.

- Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cualesquiera del mismo orden  $n$  inversibles, o sea, que existen  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$  tales que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \qquad BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$$

Para probar esta igualdad se analiza cuál es el resultado obtenido al multiplicar  $AB$ , por el producto  $B^{-1}A^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \bullet (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} && \text{asociativa del producto de mat.} \\ &= AI_nA^{-1} && \text{por ser } B \text{ inversible} \\ &= AA^{-1} && \text{por ser } I_n \text{ matriz identidad.} \\ &= I_n && \text{por ser } A \text{ inversible} \end{aligned}$$

Luego, el producto da la matriz identidad, por lo que  $B^{-1}A^{-1}$  se comporta como la inversa de  $AB$  a derecha.

- Análogamente, se prueba que se comporta como inversa a izquierda, es decir que:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Considerando además que la matriz inversa de una dada es única (siempre que exista), se puede concluir que  $AB$  tiene como inversa (única) a la matriz  $B^{-1}A^{-1}$ .

- Sea  $A$  una matriz inversible de orden  $n$  y sea  $A^{-1}$  su inversa que cumple:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

- $A^{-1} A = I_n$  por definición de matriz inversa
- $A A^{-1} = I_n$  por definición de matriz inversa

Luego, la inversa de  $A^{-1}$  es  $A$ , ya que al post y pre multiplicarla por ella se obtiene la matriz identidad de orden  $n$ .

- Sea  $A$  matriz inversible de orden  $n$  y  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Evaluamos qué sucede al multiplicar  $cA$  por la que se sugiere como su inversa:  $\frac{1}{c}A^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \bullet (cA) \left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) &= \frac{1}{c}(cA)A^{-1} && \text{por prop. de producto por escalar} \\
 &= \left(\frac{1}{c}c\right) A A^{-1} && \text{por asociatividad mixta} \\
 &= 1 (A A^{-1}) && \text{por inversos en multipl. de reales} \\
 &= 1I_n && \text{por definición de inversa} \\
 &= I_n && \text{por propiedad modular}
 \end{aligned}$$

- Análogamente se prueba que:  $\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) (cA) = I_n$ . Luego  $cA$  es inversible y su inversa es  $\frac{1}{c}A^{-1}$ .

■

**Notación:** La tercera proposición del teorema 1.11 enuncia que:

### Teorema 1.11 Proposición 3

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces

3. Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A^n$  es una matriz inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

En base a esta proposición, se adoptará una notación más práctica para las **potencias no negativas de la inversa de la matriz  $A$** , así

$$(A^{-1})^n = A^{-n}$$

$A^{-n}$  se lee **potencia  $n$ -ésima de la inversa de  $A$** .

### Ejemplo 1.15

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , para calcular  $A^{-3}$  se debe hacer  $A^{-3} = (A^{-1})^3$ .

Primero se busca la inversa de  $A$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego se multiplica la cantidad de veces que indica el exponente:

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}.$$

### 1.5.1. Matrices elementales

Las operaciones elementales son las que permitirán desarrollar un método para encontrar la inversa de una matriz dada, si existiera.

Existen tres tipos de Operaciones Elementales que pueden realizarse en las filas de una matriz.

#### Operaciones elementales

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
3. Sumar a una fila, un múltiplo de otra fila.

Cada una de estas operaciones elementales se logra a través del producto de una matriz elemental con la matriz  $A$ .

#### Definición 1.13: Matrices elementales

Una matriz de orden  $n$  se denomina matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad  $I_n$  al efectuar una sola operación elemental en las filas.

#### Ejemplo 1.16

Las siguientes son matrices elementales y cada una permitirá una hacer una operación diferente:

- intercambiar la segunda fila con la tercera fila.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- multiplicar por  $-3$  la segunda fila  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

- sumar 5 veces la tercera fila a la primera.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La enorme utilidad de estas matrices se describe claramente en el siguiente teorema y será la base para poder encontrar la inversa de una matriz dada, siempre que esta exista; o bien, descartar su existencia.

Además, como este teorema es válido para cualquier matriz (del orden que sea), estas matrices elementales permitirán desarrollar métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales en la sección siguiente.

**Teorema 1.12: Propiedades de las Matrices Elementales**

1. La pre multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera  $A$ , da por resultado una matriz  $B$  que tiene la misma operación elemental de filas que la elemental.
2. La post multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera  $A$ , da por resultado una matriz  $B$  que tiene la misma operación elemental de columnas que la elemental. *Observación:* En general, trabajaremos con la propiedad 1).
3. Toda matriz elemental es inversible, y su inversa también es una matriz elemental.

**Ejemplo 1.17**

Si se considera la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  y la matriz elemental  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . El producto  $EA$  es:

$$EA = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

que es la misma matriz que se obtiene si a la primera fila de  $A$  se le suma 5 veces su tercera la tercera fila .

**Observación:** Cada vez que se aplica una operación elemental a las filas de  $I_n$  para producir una matriz elemental  $E$ , es posible hacer otra operación en las filas de  $E$  que permite obtener  $I_n$ .

**Definición 1.14: Matrices equivalentes**

Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $m \times n$ . La matriz  $B$  es equivalente por renglones con  $A$  si existe un número finito de matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tal que

$$B = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A$$

Se denota  $B \sim A$

**Importante:** Si  $B \sim A$  entonces  $A \sim B$ . Por esta simetría, se dice que  $A$  y  $B$  son equivalentes.

**Ejemplo 1.18**

Las matrices  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $I_2$  son equivalentes, ya que:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{2} \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Pemultiplicando a  $A$  por esas cuatro matrices elementales (en ese orden) se obtiene  $I_2$ , esto es lo que las hace equivalentes

### Definición 1.15: Matriz escalonada

Se dice que una matriz es escalonada, si satisface:

1. El primer elemento diferente de cero de la fila es 1.
2. Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupados en la parte inferior de la matriz.
3. Si las filas  $i$  e  $i + 1$  son dos filas sucesivas que no constan exclusivamente de ceros entonces, el primer número no nulo en la fila  $i + 1$  debe estar a la derecha del primer número no nulo en la fila  $i$ .

A veces, será útil hallar una matriz que, además de escalonada, sea reducida. Para eso introducimos el siguiente concepto:

### Definición 1.16: Matriz escalonada reducida

Se dice que una matriz es escalonada reducida si:

1. La matriz es escalonada.
2. Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

### Ejemplo 1.19

Las siguientes matrices tienen forma escalonada por filas.

$$\begin{aligned} \blacksquare & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} & \blacksquare & \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las siguientes matrices tienen forma escalonada reducida.

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La siguiente matriz no está en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

### Propiedad 1.13

Sea  $A$  una matriz cualquiera. En toda matriz escalonada obtenida a partir de  $A$ , son iguales:

- La cantidad de filas no nulas es la misma.
- La cantidad de columnas que tienen el primer elemento no nulo (leído de izquierda a derecha) en cada una de esas filas, es el mismo.

### Ejemplo 1.20

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  tiene como forma escalonada y escalonada reducida respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambas tienen 2 filas no nulas y 2 columnas que contienen primer elemento distinto de 0 en cada una de esas filas.

### 1.5.2. Rango de una matriz

Lo que se observa en el último ejemplo, sucede con cualquier matriz, y esto da pie para introducir la siguiente definición:

#### Definición 1.17: Rango

El rango de una matriz  $A$  es el número de filas diferentes de cero en cualquier matriz escalonada  $A'$  obtenida a partir de  $A$  mediante operaciones elementales de fila. Se anota como  $\rho(A)$ .

**Observación:** El número que determina el rango de una matriz  $A$  en su forma escalonada, es el mismo que se obtiene en la matriz escalonada reducida de  $A$ . Por lo tanto, en la definición de rango se puede sustituir “escalonada” por “escalonada reducida” y el número obtenido será el mismo.

**Ejemplo 1.21** En estas matrices, a simple vista, se puede determinar su rango .

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

La segunda fila de la matriz dada es múltiplo de la primera. Por eso, cualquiera de sus formas escalonadas, sólo tendrá una fila no nula. Esta matriz tiene rango 1.

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

La tercera fila de esta matriz se obtiene como suma de las dos primeras. Por este motivo, cualquiera de sus formas escalonadas, tendrá dos filas no nulas. Esta matriz tiene rango 2.

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al tener todas sus entradas 0, ninguna operación elemental puede modificarlas, por lo tanto, esta matriz tiene rango 0.

Generalmente, el rango de una matriz no se encuentra por simple inspección. Para hallarlo, se debe escalar la matriz.

### Ejemplo 1.22

Se evalúa el rango de las matrices dadas:

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{2}{3}F_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz tiene rango 2.

$$2. \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow -1F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, el rango de esta matriz es 2 porque tiene dos filas no nulas en su forma escalonada.

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{6}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{3}{5}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, el rango de la matriz es 3.

### 1.5.3. Determinación de la inversa

El siguiente teorema provee de una herramienta importante para el método que se dará para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

#### Teorema 1.14

Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ .

$$A \sim I_n \quad \text{si y sólo si} \quad A \text{ es inversible.}$$

**Demostración:** Se demuestra que si  $A \sim I_n$  entonces  $A$  es inversible.

Por hipótesis, existen  $k$  matrices elementales tales que:

$$(E_1 E_2 \dots E_k) A = I_n$$

Se sabe que las matrices elementales son inversibles ( 1.12 ). Premultiplicando ambos miembros de la ecuación por las inversas de las elementales  $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$  y luego asociando convenientemente, se tiene:

$$\begin{aligned} (E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}) (E_1 E_2 \dots E_k) A &= (E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}) I_n \\ E_k^{-1} \dots E_2^{-1} (E_1^{-1} E_1) E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\ E_k^{-1} \dots E_2^{-1} I_n E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\ E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\ A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \end{aligned}$$

Luego, la matriz  $A$  es inversible por ser el producto de las matrices inversibles  $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ .

Para demostrar la proposición recíproca ( y con eso completar la prueba de la equivalencia que enuncia el teorema), se requiere una propiedad que no hemos analizado en este curso. Por ese motivo, se omite aquí la demostración de la implicación:

Si  $A$  es inversible entonces  $A \sim I_n$ .

Aunque con otras herramientas se puede probar su validez y con ello se valida el teorema. ■

Como consecuencia de esta última propiedad, al aplicar a  $A$  idénticas operaciones elementales que a  $I_n$ , la primera se convierte en  $I_n$  y la segunda en  $A^{-1}$ . Esto se hace trabajando sobre la matriz  $A$  ampliada con las columnas de la matriz identidad:

$$[ A \mid I_n ] \sim [ I_n \mid A^{-1} ]$$

Vale aclarar que si no es posible hallar las matrices elementales que transformen a  $A$  en  $I_n$ , es porque  $A$  no es inversible y la matriz que quede a la derecha no será inversa de  $A$ .

#### Ejemplo 1.23

Se pretende determinar la inversa de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ . Se procede entonces a construir la

matriz  $[A \mid I_3]$  (dado que  $A$  es matriz cuadrada de orden 3) y se busca su forma esalonada reducida:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.24**

Se busca la inversa de  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  con el método que se introdujo a través del teorema:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_2 \rightarrow -2F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + \frac{3}{2}F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Es decir que  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

Si además se calcula la inversa de la misma matriz (de orden  $2 \times 2$ ), con la expresión dada en el Ejemplo 1.14 (3.)

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{2 \cdot 1 - (-1)(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

que es exactamente la misma (y única) matriz inversa encontrada con el método que se deduce de la aplicación del teorema.

Sólo existe una fórmula de este tipo para matrices de orden 2.

## 1.6. Consideraciones finales

### 1.6.1. Espacios Vectoriales

#### 1.2.2 ESPACIO VECTORIAL REAL $V$

**Definición:** Un *espacio vectorial real*  $V$  es un conjunto de objetos denominados *vectores*, junto con dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por un escalar*, que satisfacen los diez axiomas que se enuncian a continuación:

Según esta definición (Raichman-Totter) y de acuerdo a las definiciones de operaciones y propiedades vistas, el conjunto  $\mathcal{M}_{m \times n}$  de todas las matrices de cierto orden  $m \times n$  forman un espacio vectorial real. En este espacio un vector es una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ .

#### Ejemplo 1.25

Se tienen distintos espacios vectoriales reales con las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas anteriormente:

- $\mathcal{M}_{2 \times 3}$  (matrices de orden  $2 \times 3$ ).
- $\mathcal{M}_{5 \times 5}$  (matrices cuadradas de orden 5).
- $\mathcal{M}_{n \times 1}$  (las matrices columna  $n \times 1$ ).

### 1.6.2. Combinación lineal

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son matrices del mismo tamaño y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$$

es una **combinación lineal** de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Ejemplo 1.26** Sean  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.  $2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es una combinación lineal de  $A$  y  $B$ .

2.  $0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es una combinación lineal de  $A$  y  $B$  que tiene como resultado la matriz  $O_{2 \times 3}$ .