

Trabajo Práctico 2.1: MATRICES

1. Determine la matriz y clasifíquela, si es posible, según las condiciones de sus elementos dadas en forma simbólica:

$$\begin{array}{ll}
 a) \text{ Sea } A \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} i+j, & i=j, \\ 2i-j, & i \neq j. \end{cases} & c) \text{ Sea } B \in \mathcal{M}_{4 \times 2} \text{ con } b_{ij} = (-1)^{i+j}(i-j). \\
 b) \text{ Sea } C \in \mathcal{M}_{3 \times 2}, c_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ 1, & i = j, \\ -1, & i > j. \end{cases} & d) \text{ Sea } D \in \mathcal{M}_{2 \times 4} \text{ con } d_{ij} = i^2 - j. \\
 & e) \text{ Sea } E \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \text{ con } e_{ij} = i + j.
 \end{array}$$

2. Utilizando las matrices del ejercicio anterior, realice las operaciones propuestas siempre que sean posibles, y en caso de no serlo, justifique. (Puede usar <https://matrixcalc.org/es/> para la verificación de algunos cálculos):

$$\begin{array}{ll}
 a) B + 2D^T = & e) B \cdot D + I_{4 \times 4} = \\
 b) 2A - \frac{1}{2}E = & f) A + E \cdot A^T = \\
 c) E \cdot C = & g) E^T \cdot E - 2(A^T)^2 + \text{tr}(B^T B) I_{3 \times 3} = \\
 d) C \cdot E = & h) A \cdot E^T - C \cdot C^T - 2I_{3 \times 3} =
 \end{array}$$

3. Sea A una matriz de orden $n \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector columna de $n \times 1$. ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^k \mathbf{x}$?

Sugerencia: Cuente las multiplicaciones (analice para $k = 2, 3, \dots$ y concluya).

4. Dadas las siguientes matrices, determine cuáles son matrices elementales e indique para ellas la operación elemental que le dio origen.

$$\begin{array}{lll}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, & H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

5. Encuentre la matriz elemental E tal que $E \cdot A = B$ o $A \cdot E = B$. Verifique si la E propuesta es la correcta, realizando el producto con las herramientas digitales propuestas anteriormente.

a) $AE = B$

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $EA = B$

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -9 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

6. Dadas las siguientes matrices:

a) Determine cuáles están en forma escalonada, cuáles en forma escalonada reducida y cuáles no cumplen ninguna.

b) Cuando sea posible, determine el rango, y diga si son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Exprese en forma escalonada reducida por filas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

8. Dé un ejemplo de una matriz 3×3 en forma escalonada que **no esté reducida**.

a) Transforme la matriz del inciso anterior a su forma escalonada reducida.

9. Escriba:

a) una matriz 3×4 que tenga rango 2.

b) una matriz 5×2 del mayor rango posible.

c) una matriz 5×3 no nula del menor rango posible.

10. Complete de manera que las siguientes proposiciones resulten verdaderas:

a) El/los valores de m y n para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & m & -2 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ tenga rango igual a dos es/son
...

b) El/los valores de p y q para que la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tenga rango igual a uno es/son
...

c) Los valores de m y t para que la matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sea invertible es/son ...

¿Podría N tener rango igual a 1? ...

d) El/los valores de k para que la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2k \end{bmatrix}$ tenga rango igual a 1 es/son ...

11. Determine el rango de las siguientes matrices y calcule su inversa, si es que existe.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, de ser posible, para obtener la expresión de la matriz X . Aplique propiedades. Todas las matrices son cuadradas, del mismo orden e invertibles.

a) $XA^{-1} = B^2 - C$

e) $2(A + B - X) = 4(X + A)$

b) $(X + B)^{-1} = A^{-1}C$

f) $(X + A)^T B = A^2$

c) $(X - A)^T = B$

g) $(A \cdot X^{-1})^{-1} = (C^{-1}D^2)^{-1} \cdot B$

d) $(X + A)B = C$

13. Aplicando propiedades, resuelva:

a) Si se conoce

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

calcule:

1) $(4A)^{-1}$

2) $(A^3)^{-1}$

3) $(A^T)^{-1}$

4) $(A^{-1}A^T)^{-1}$

b) Si la traspuesta de $3B$ es

$$(3B)^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

calcule la **matriz inversa** de B .

c) Usando las matrices A y B de los incisos anteriores, resuelva:

1) $(BA)^{-1}$

2) $(A^T B^{-1})^T$

3) $(A^{-1})^T + B^T$

14. Escriba cada afirmación en forma de implicación y demuestre:

a) El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.

b) La traspuesta de la traspuesta de una matriz A , es A .

15. En cada una de las siguientes proposiciones, demuestre si la proposición es verdadera o refute si es falsa:

a) La traspuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.

b) Toda matriz simétrica es también triangular.

c) El rango de una matriz coincide con el número de filas no nulas en su forma escalonada.

d) El producto de dos matrices simétricas es siempre simétrica.

e) Toda matriz cuadrada tiene matriz inversa.

f) Si A es cuadrada, entonces A^0 es simétrica.

g) Si A es una matriz simétrica no nula entonces admite matriz inversa.

h) El producto de dos matrices elementales es siempre una matriz elemental.

Ejercicios de aplicación

- a) Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea M la matriz de ventas de enero:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Interpretar la matriz M , explicando cómo han sido las ventas.
 - 2) Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero.
 - 3) Hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero.
 - 4) Hallar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero. Interpretar la solución
 - ...
 - 5) Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo, hallar el total de ventas en el primer cuatrimestre.
- b) Una empresa de ingeniería monitorea dos aspectos distintos:
- La **producción de dos productos** en dos turnos (mañana y tarde).
 - Los **esfuerzos que generan dos tipos de carga** en tres puntos de una viga.

Las matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 30 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 6 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

- 1) Interprete en palabras qué representa cada elemento de A y de B .
- 2) Calcule A^T y explique qué significa en el contexto de producción.
- 3) Use una matriz columna de unos para calcular:
 - el total producido en cada turno,
 - el total producido de cada producto.
- 4) Calcule B^T . ¿Cómo cambia la organización de la información?