

TABLA 10.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Sección	Propiedad	Señal	Transformada z	ROC
		$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
10.5.1	Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
10.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R , excepto para la posible adición o supresión del origen
10.5.3	Escalamiento en el dominio de z	$e^{j\omega_0 n} x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$ $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $X(az)$	R $z_0 R$ Versión escalada de R (es decir, $ a R =$ el conjunto de puntos $\{ a z\}$ para z en R)
10.5.4	Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertida (es decir, $R^{-1} =$ el conjunto de puntos z^{-1} , donde z está en R)
10.5.5	Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algún entero r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$, donde z está en R)
10.5.6	Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
10.5.7	Primera diferencia	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos la intersección de R y $ z > 0$
10.5.7	Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	Al menos la intersección de R y $ z > 1$
10.5.8	Diferenciación en el dominio de z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9	Teorema del valor inicial Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces, $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$			

TABLA 10.2 ALGUNOS PARES DE TRANSFORMADA Z

Señal	Transformada	ROC
1. $\delta[n]$	1	Toda z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	Para toda z excepto 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9. $[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

10.7.1 Causalidad

Un sistema LTI causal tiene una respuesta al impulso $h[n]$ que es cero para $n < 0$, y por tanto es derecha. A partir de la propiedad 4 en la sección 10.2 sabemos entonces que la ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo en el plano z . Para algunos sistemas, es decir, si $h[n] = \delta[n]$, de manera que $H(z) = 1$, la ROC se puede extender hacia el interior y posiblemente incluya el origen. También, en general, para una respuesta derecha al impulso, la ROC puede o puede no incluir el infinito. Sin embargo, como vimos en la propiedad 8 de la sección 10.2, para un sistema causal la serie de potencias

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

no incluye potencias positivas de z . En consecuencia, la ROC incluye el infinito. Resumiendo, tenemos el siguiente principio:

Un sistema LTI discreto es causal si y sólo si la ROC de su función del sistema es el exterior de un círculo, incluyendo el infinito.