

2.2 DETERMINANTES

INGENIERÍA Y LCC



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD
DE INGENIERÍA

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

- 1 Definición de Determinante
 - Determinante de una matriz de orden 2
 - Determinante de una matriz de orden 3
 - Determinante de una matriz de orden n
- 2 Propiedades
 - Propiedades de los determinantes
- 3 Cálculo de la matriz inversa de A
 - Matriz cofactor
 - Propiedad de la inversa de una matriz
- 4 Interpretación geométrica de determinantes de orden 2 y 3

Determinante de una matriz de orden 2

Definición

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz de orden 2. Llamamos determinante de A y lo indicamos $\det(A)$ o $|A|$, al número:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplo

El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-2) = -2$$

Definición

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 3.

Se llama determinante de A al número:

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Se lo puede designar como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Halle el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n . Se llama menor complementario del elemento a_{ij} (o menor de a_{ij}) y se anota M_{ij} al determinante de la submatriz de orden $(n - 1) \times (n - 1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A .

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Halle el menor complementario de a_{23} y del elemento a_{31} .

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n . Se llama cofactor del elemento a_{ij} y se anota C_{ij} al número que se obtiene mediante la expresión

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Halle el cofactor del elemento a_{23} y del elemento a_{31} .

Nota: Observa que si la suma $i + j$ es PAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} coinciden, en cambio si la suma $i + j$ es IMPAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} son valores opuestos.

Ejemplo

Halle todos los menores y cofactores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n , con $n \geq 2$. Se llama determinante de A , a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna de A por sus respectivos cofactores.

- Desarrollando por la fila i :

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + a_{i3} \cdot C_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{ik}$$

- Desarrollando por la columna j :

$$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + a_{3j} \cdot C_{3j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot C_{kj}$$

Ejemplo

1. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Propiedades de los determinantes

Propiedad

1. Si una matriz de orden n , tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.
2. Si una matriz de orden n , tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, su determinante es cero.
3. Si una matriz de orden n tiene dos líneas (filas o columnas) proporcionales, su determinante es cero.

Ejemplo

Calcule los siguientes determinantes:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -7 \\ 13 & 0 & -4 & 5 \\ -6 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Propiedad

Sean A y B dos matrices de orden n .

- 4. Si B es la matriz obtenida a partir de A permutando dos filas (dos columnas) de la misma, entonces*

$$\det(B) = -\det(A).$$

- 5. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una fila (columna) de A por un escalar no nulo k , entonces*

$$\det(B) = k \cdot \det(A).$$

- 6. Si B es la matriz que se obtiene de sumarle a una fila (columna) de la matriz A , un múltiplo no nulo de otra fila (columna) de A , entonces*

$$\det(B) = \det(A).$$

Propiedad

7. Si A y B son matrices de orden n , $\det(A B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

8. Si A es una matriz de orden n y k es un escalar, entonces

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A).$$

9. Si A es una matriz de orden n entonces $\det(A^T) = \det(A)$.

10. Si A es una matriz cuadrada inversible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostrar 10.

Propiedades de los determinantes

Propiedad

12. Si A es matriz triangular, entonces

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

13. Si A , B y C son matrices de orden n que sólo difieren en la r -ésima línea (fila o columna), siendo la r -ésima línea de C la suma de las r -ésimas líneas de A y B , entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Corolario

Las matrices elementales tienen determinante no nulo.

Teorema

Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Demostrar

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n , Se llama matriz cofactor de A y se indica $\text{Cof}(A)$ a la matriz que tiene por elementos los cofactores de los elementos de A .

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & C_{ij} & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Halle la matriz cofactor de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema

Si A es una matriz de orden n invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\text{Cof}(A)]^T$$

Observación: La transpuesta de la matriz de cofactores recibe el nombre de **matriz adjunta** de A . Así, el teorema anterior se enuncia como:

Si A es una matriz de orden n invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$$

Interpretación geométrica de determinantes de orden 2

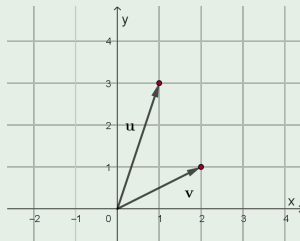
Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el plano xy ; ese punto permite definir dos vectores con origen en $(0,0)$:

$$\mathbf{u} = (a, b) \quad \mathbf{v} = (c, d)$$

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$\mathbf{u} = (1, 3) \quad \mathbf{v} = (2, 1)$$



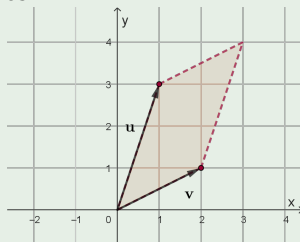
Interpretación geométrica de determinantes de orden 2

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el plano xy ; ese punto permite definir dos vectores con origen en $(0,0)$: $\mathbf{u} = (a,b)$ $\mathbf{v} = (c,d)$.
El valor absoluto del $\det(A)$, coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$|\det(A)| = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 3| = 5$$



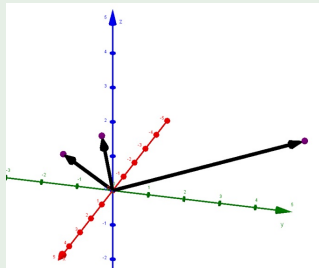
Interpretación geométrica de determinantes de orden 3

Si la matriz A es de orden 3, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el espacio xyz ; ese punto permite definir tres vectores con origen en $(0,0,0)$: \mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w} .

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w}



Interpretación geométrica de determinantes de orden 3

Si la matriz A es de orden 3, los tres vectores que pueden generarse con sus filas tienen asociado un paralelepípedo.

El valor absoluto del $\det(A)$, coincide con el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. A los vectores definidos con las filas de A se les puede asociar un paralelepípedo.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 22$$

$|\det(A)| = 22 \rightsquigarrow$ volumen del paralelepípedo

