UNIDAD 2

Índice

1. Determinantes

El determinante es un número real (o complejo) que se atribuye a matrices cuadradas y que se obtiene a partir de sus elementos. Este número nos permite por ejemplo, saber si la matriz a la que se le calculó el determinante admite matriz inversa o no. En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los determinantes permiten a través de la regla de Cramer, resolver ciertos sistemas de ecuaciones. El determinante de una matriz asociada a una transformación lineal mide el factor de escala de áreas o volúmenes, es decir, si al aplicar la transformación lineal a una figura o cuerpo según si la función está definida en el plano o en el espacio, el determinante de la matriz asociada mide cuanto cambia el área o el volumen de la región transformada. También permite determinar si la figura o cuerpo por efecto de la transformación lineal conserva o no su orientación.

1.1. Definiciones iniciales

1.1.1. Determinante de una matriz de orden 1

Definición 1.1

Sea A una matriz de orden 1,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

Llamamos determinante de A y lo indicamos $\det(A)$, al valor a_{11} :

$$det(A) = a_{11}$$

Ejemplo 1.1 El determinante de la matriz $A = [\ -7\ ]$ es

$$\det(A) = -7$$

.

1.1.2. Determinante de una matriz de orden 2

Definición 1.2

Sea A una matriz de orden 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Llamamos determinante de A y lo indicamos $\det(A)$ o $|A|$, al número que se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplo 1.2

El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = 5 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 = -13$$

1.1.3. Determinante de una matriz de orden 3

Definición 1.3

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 3.

Se llama determinante de A al número:

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Se lo puede designar como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.3 El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ es:

$$|A| = 7 \cdot 0 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5 - 7 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$|A| = 75$$

1.2. Determinante de una matriz de orden n

Antes de dar la definición de determinante de una matriz de orden n, es necesario definir algunos conceptos previos como menor complementario y cofactor.

1.2.1. Menor complementario o menor

Definición 1.4

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n. Se llama menor complementario del elemento a_{ij} (o menor de a_{ij}) y se anota M_{ij} al determinante de la submatriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo 1.4 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. El menor complementario de a_{23} se indica M_{23} y es el determinante de la submatriz de A que se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 3 de la matriz A.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 5$$

El menor complementario de a_{31} se indica M_{31} y es el determinante de la submatriz de A que se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 1 de la matriz A.

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 = -3$$

1.2.2. Cofactor

Definición 1.5

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n. Se llama cofactor del elemento a_{ij} y se anota C_{ij} al número que se obtiene mediante la expresión

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo 1.5 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. El cofactor de a_{23} se indica C_{23} y es:

$$C_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23}$$

$$C_{23} = -5$$

El cofactor del elemento a_{31} se indica C_{31} y es:

$$C_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31}$$

$$C_{31} = -3$$

Ejemplo 1.6 Los menores y cofactores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \longrightarrow C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = M_{11} = -1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \longrightarrow C_{12} = (-1)^{1+2}.M_{12} = -M_{12} = 5$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \longrightarrow C_{13} = (-1)^{1+3}.M_{13} = M_{13} = 4$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \longrightarrow C_{21} = (-1)^{2+1}.M_{21} = -M_{21} = -2$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \longrightarrow C_{22} = (-1)^{2+2}.M_{22} = M_{22} = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \quad \longrightarrow \quad C_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} = -M_{23} = -8$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \longrightarrow \quad C_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31} = M_{31} = 5$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad \longrightarrow \quad C_{32} = (-1)^{3+2}.M_{32} = -M_{32} = 3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \longrightarrow \quad C_{33} = (-1)^{3+3}.M_{33} = M_{33} = -6$$

Nota: Observa que si la suma $i + j$ es PAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} coinciden, en cambio si la suma $i + j$ es IMPAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} son valores opuestos.

1.2.3. Determinante de una matriz de orden n

Definición 1.6

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, con $n \geq 2$. Se llama determinante de A, a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna de A por sus respectivos cofactores.

- Desarrollando por la fila i:

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + a_{i3} \cdot C_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot C_{ik}$$

- Desarrollando por la columna j:

$$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + a_{3j} \cdot C_{3j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot C_{kj}$$

Ejemplo 1.7

1. Queremos encontrar el número que sea el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Comenzamo por elegir una fila o columna, en este caso trabajaremos con la fila 1. De esta manera, el determinante de A será:

$$\det(A) = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$$

   Los cofactores $C_{11}; C_{12}\ y\ C_{13}$ fueron calculados en el ejemplo 1.6. De donde:

$$C_{11} = 1;\ C_{12} = 5 \text{ y } C_{13} = 4$$

$$\det(A) = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4$$

$$\det(A) = 14$$

Nota: Si se desarrolla el determinante por otra fila o columna debería dar siempre el mismo valor.

2. Se quiere calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Para ello elegimos una fila o columna, en este caso conviene elegir la que contenga más ceros ya que agiliza los cálculos. Trabajaremos entonces con la columna 3

$$\det(A) = a_{13}.C_{13} + a_{23}.C_{23} + a_{33}.C_{33} + a_{43}.C_{43}$$

Como $a_{23}; a_{33}\ y\ a_{43}$ son iguales a 0. El determinante queda:

$$\begin{aligned} \det(A) =& 3.C_{13} \\ =& 3.(-1)^{1+3}. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ =& 3 \cdot (4 + 9 + 0 - 12 - 0 + 12 = 9 \end{aligned}$$

O sea, $\det(A) = 39$

2. Propiedades de los determinantes

Propiedad 2.1

1. Si una matriz de orden n tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.
2. Si una matriz de orden n, tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, su determinante es cero.
3. Si una matriz de orden n tiene dos líneas (filas o columnas) proporcionales, su determinante es cero.

Ejemplo 2.1 El siguiente determinante tiene la tercer columna toda de ceros, si lo desarrollamos por la tercer columna tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.C_{13} + 0.C_{23} + 0.C_{33} = 0$$

Ejemplo 2.2 El siguiente determinante tiene la primera y tercera fila iguales, desarrollándolo por la segunda fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4.(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4{,}0 + 1{,}0 = 0$$

Ejemplo 2.3 El siguiente determinante tiene la tercer fila igual a 3 veces la primer fila. Si lo desarrollamos por la columna 3 tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -7 \\ 13 & 0 & -4 & 5 \\ -6 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -\,4.(-1). \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -6 & -3 & 21 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} - 2.(-1). \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 13 & 0 & 5 \\ -6 & -3 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= 4.(-36 + 336 + 36 - 336) + 2.(-30 + 273 + 30) = 0$$

Propiedad 2.2

Sean A y B dos matrices de orden n.

4. Si B es la matriz obtenida a partir de A permutando dos filas (o dos columnas) de la misma, entonces
$$\det(B) = -\det(A).$$

5. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una fila (columna) de A por un escalar no nulo k, entonces
$$\det(B) = k \cdot \det(A).$$

6. Si B es la matriz que se obtiene de sumarle a una fila (columna) de la matriz A, un múltiplo no nulo de otra fila (columna) de A, entonces
$$\det(B) = \det(A).$$

Ejemplo 2.4

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ es $det(A) = 4$. Calcule los determinantes de las siguientes matrices aplicando las propiedades mencionadas:

1. $B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ \frac{g}{3} & \frac{h}{3} & \frac{i}{3} \end{bmatrix}$

3. $D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + 5d & h + 5e & i + 5f \end{bmatrix}$

Se aplican las propiedades de acuerdo a lo que requiere cada caso:

1. Teniendo en cuenta que la matriz B se obtiene a partir de la matriz A, permutando la primera y segunda fila, según la propiedad 4 por cada permutación de filas (o columnas) el valor del determinante cambia de signo, de esta manera, el determinante de la matriz B será igual al determinante de A cambiado de signo, es decir: $det(B) = -4$.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4$$

2. La matriz C se obtiene a partir de la matriz A multiplicando la primera fila de A por 2 y la tercera fila de A por $1/3$. Según la propiedad 5, el determinante de la matriz C se obtendrá multiplicando el valor del determinante de A por 2 y por $1/3$.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ \frac{g}{3} & \frac{h}{3} & \frac{i}{3} \end{vmatrix} = 2.\tfrac{1}{3}.det(A) = 2.\tfrac{1}{3},4 = \tfrac{8}{3}$$

3. La matriz D se obtiene a partir de la matriz A sumándole a la tercera fila 5 veces la segunda fila de A. Según la propiedad 6 si se suma a una fila de una matriz un múltiplo de otra el determinante no cambia de signo, por lo que el determinante de D será igual al determinante de A.

$$\det(D) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+5d & h+5e & i+5f \end{vmatrix} = det(A) = 4$$

Propiedad 2.3

7. Si A y B son matrices de orden n, $\det(A\,B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

8. Si A es una matriz de orden n y k es un escalar, entonces
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A).$$

9. Si A es una matriz de orden n entonces $\det(A^T) = \det(A)$.

10. Si A es una matriz cuadrada inversible entonces
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración:
Vamos a demostrar la última propopiedad del enunciado anterior:

Si A es una matriz cuadrada inversible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Por hipótesis, sabemos que A es una matriz de orden n inversible, es decir que existe otra matriz del mismo orden, A^{-1} tal que: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

De esta manera, como $A.A^{-1} = I_n$, también se cumple la igualdad entre los determinantes:

$$\det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$$

Dado que A yA^{-1} son matrices cuadradas del mismo orden, podemos aplicar la propiedad del determinante de un producto de matrices; además se sabe que $det(I_n) = 1$, de donde:

$$\det(A).\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

O sea, $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$.

Teniendo en cuenta la propiedad de los números reales, para que el producto de los números reales $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$ sea 1, ninguno de ellos puede ser 0. De esta manera: $det(A) \neq 0$.
Luego, podemos despejar $\det(A^{-1})$ con lo cual queda:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Así queda demostrada la igualdad entre ambos números. ■

Propiedad 2.4

11. Si A es matriz triangular, entonces

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

12. Si A, B y C son matrices de orden n que sólo difieren en la r-ésima línea (fila o columna), siendo la r-ésima línea de C la suma de las r-ésimas líneas de A y B, entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

.

Sabemos que las matrices elementales se obtienen a partir de la matriz identidad, aplicando operaciones elementales. Además, la matriz identidad tiene determinante 1 (por propiedad de determinante de matrices diagonales).
De estas dos consideraciones y de lo enunciado en la propiedad anterior, se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.1

Las matrices elementales tienen determinante no nulo.

Enunciaremos un teorema muy útil a la hora de evaluar si una matriz cuadrada es, o no, inversible.

Teorema 2.5

Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Demostración:

Dado que la propiedad enuncia una doble implicación, debemos demostrar la implicación a derecha y la implicación a la izquierda.
Comenzamos demostrando la implicación a derecha, es decir:

Si A es una matriz inversible, entonces $\det(A) \neq 0$.

Por hipótesis, A es una matriz inversible de orden n, es decir que existe A^{-1} tal que: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

De esta manera, como $A.A^{-1} = I_n$, también serán iguales sus determianantes:

$$\det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$$

Dado que A yA^{-1} son ambas de orden n, aplicamos la propiedad del determinante de un producto de matrices.

$$\det(A).\det(A^{-1}) = det(I_n) = 1,$$

o sea: $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$.

Teniendo en cuenta la propiedad de los números reales, para que el producto de los números reales $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$ sea 1, ninguno de ellos puede ser 0. De esta manera:

$$\det(A) \neq 0$$

Con lo que queda demostrada la propiedad.

Ahora, se demuestra la implicación a izquierda:

Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es una matriz inversible.

Sabemos que toda matriz es equivalente a una única matriz escalonada reducida. A la escalonada reducida de A la llamaremos R. Sean $E_1; E_2; E_3; ...; E_k$ las matrices elementales que permiten obtener la matriz R a partir de la matriz A, entonces:

$$E_k \dots E_3\ E_2\ E_1\ A = R.$$

Como todas las matrices involucradas en la igualdad anterior de orden n, a la igualdad de los determinantes se le puede aplicar la propiedad del determinante del producto entre ellas, o sea:

$$\begin{aligned}\det(R) &= \det(E_k \dots E_2\ E_1\ A)\\ &= \det(E_k) \dots \det(E_2)\ \det(E_1)\ \det(A).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que todas las matrices elementales tienen determinante no nulo (Corolario 2.1) y que , por hipótesis, $\det(A) \neq 0$ se puede concluir que

$$\det(R) \neq 0.$$

Pero R tiene el mismo orden que A, por lo tanto es cuadrada y si su determinante no es 0, se puede concluir que no es otra más que la matriz identidad I_n.

Luego, A es inversible, por ser equivalente a la matriz identidad. ■

3. Regla de Chío

Es un algoritmo que permite calcular determinantes de orden n reduciéndolo a otro de orden $n-1$.
El procedimiento puede reiterarse hasta lograr un determinante de orden 3 ó 2, para los cuales tenemos fórmulas más simples. Este método consiste en lograr mediante una combinación de propiedades de los determinantes que los elementos de una fila o columna sean ceros, excepto uno de ellos, a ese elemento no nulo lo llamamos pivote. Luego se calcula el determinante aplicando el método de cofactores a esa línea.

Ejemplo 3.1
Calcule el determinante de la siguiente matriz, usando la Regla de Chío.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Para aplicar este método conviene elegir, preferentemente, la columna con más ceros. En este caso elegiremos la tercera columna.
- Dentro de esa columna elegimos un elemento no nulo, preferentemente un 1 que lo consideraremos como pivote. En este caso, aunque en la columna elegida hay un 1 elegiremos el elemento $a_{33} = -2$ para mostrar como lograr el 1 en el caso que no hubiese unos en la fila o columna elegida.
- Como nuestro pivote a_{33} no es 1, sino -2, dividiremos la fila del pivote por -2, de esta manera lograremos que el pivote se convierta en 1.

  Teniendo en cuenta que dividir por -2 es lo mismo que multiplicar por $-1/2$, por propiedad de los determinantes, si multiplicamos una fila por $-1/2$, el valor del nuevo determinante también queda multiplicado por ese escalar.

  Es decir, el nuevo determinante quedó dividido por 2 y cambiado de signo. Para compensar esto debemos multiplicar al nuevo determinante por -2 (recíproco de $-1/2$). De esta maner podremos mantener la igualdad.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- El paso siguiente será, lograr que los restantes elementos de la columna elegida (tercera columna) se conviertan en 0.
- Para lograr un 0 en la posición $a_{13} = -1$ a la fila 1 le sumaremos la fila 3, es decir la fila del pivote.
- Para lograr un 0 en la posición $a_{23} = 2$ a la fila 2 le restaremos dos veces la fila del pivote.

  Teniendo en cuenta que cuando sumamos o restamos a una fila un múltiplo de otra fila el determinante no cambia podemos escribir:

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora, desarrollamos el determinante por la 3ra columna:

$$|A| = -2\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 0 & -5\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -1\end{vmatrix} = -2.(-1)^{3+3}.M_{33} = -2\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

- Reiteramos el procedimiento. Tomamos como pivote $a_{12} = -1$ y dividimos la fila 1 por -1, para lograr que $a_{12} = 1$. Para mantener la igualdad multiplicamos el determinante por -1.

$$|A| = -2\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix} = -2(-1)\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

- Ahora, para conseguir que la columna del elemento a_{12} se anule, a la fila 3 le restamos 3 veces la fila 1.

$$|A| = 2.\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -5\\ 8 & 0 & 8\end{vmatrix}$$

- Calculamos ahora el determinante desarrollando por la columna 2:

$$|A| = 2\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 8 & 8\end{vmatrix} = -2(3\cdot 8 - 8\cdot(-5)) = -2(24+40) = -128$$

4. Cálculo de la matriz inversa de A

4.1. Matriz cofactor

Definición 4.1

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, Se llama matriz cofactor de A y se indica $\mathrm{Cof}(A)$ a la matriz que tiene por elementos los cofactores de los elementos de A.

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & C_{ij} & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.1 Para hallar la matriz cofactor de la matriz $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

se usa lo desarrollado en el ejemplo 1.6 (página 4 de este apunte calculamos los cofactores de esta matriz)

$$\begin{array}{lll} C_{11} = M_{11} = -1 & C_{12} = -M_{12} = 5 & C_{13} = M_{13} = 4\\ C_{21} = -M_{21} = -2 & C_{22} = M_{22} = -4 & C_{23} = -M_{23} = -8\\ C_{31} = M_{31} = 5 & C_{32} = -M_{32} = 3 & C_{33} = M_{33} = -6 \end{array}$$

De esta manera, la matriz de cofactores de A es:
$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

4.2. Propiedad de la inversa de una matriz

Propiedad 4.1

Si A es una matriz de orden n inversible, entonces $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Teorema 4.2

Si A es una matriz de orden n inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[\mathrm{Cof}(A)\right]^T$$

Observación: La transpuesta de la matriz de cofactores recibe el nombre de **matriz adjunta** de A. Así, el teorema anterior se enuncia como:

Si A es una matriz de orden n inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

5. Interpretación geométrica de determinantes de orden 2 y 3

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el plano xy; esos puntos permiten definir dos vectores con origen en $(0,0)$:

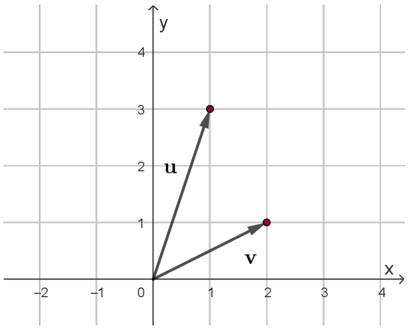
$$\mathbf{u} = (a,b) \qquad \mathbf{v} = (c,d)$$

El valor del determinante de A en valor absoluto representa el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
$|Det(A)|$ = Área del paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

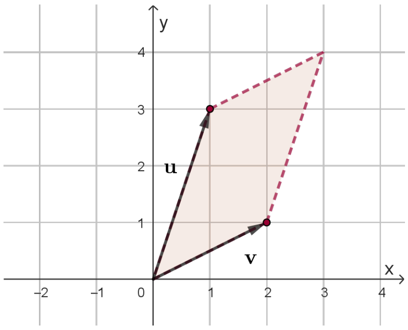
Ejemplo 5.1

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$\mathbf{u} = (1,3) \qquad \mathbf{v} = (2,1)$$



De esta manera, el paralelogramo que tiene por lados los vectores **u** y **v**. puede verse en el siguiente gráfico:



El área del paralelogramo dibujado será:

$$|\det(A)| = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 3| = 5$$

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el espacio xyz; esos puntos permiten definir tres vectores con origen en $(0,0,0)$:

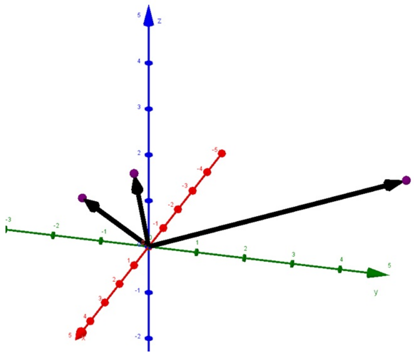
$$\mathbf{u} = (a,b,c) \qquad \mathbf{v} = (d,e,f) \qquad \mathbf{w} = (g,h,i)$$

El valor del determinante de A en valor absoluto representa el volumen del paralelepípedo que tiene por lados los vectores **u**; **v** y **w**.
$|Det(A)|$ = Volumen del paralelepípedo de lados **u**; **v** y **w**

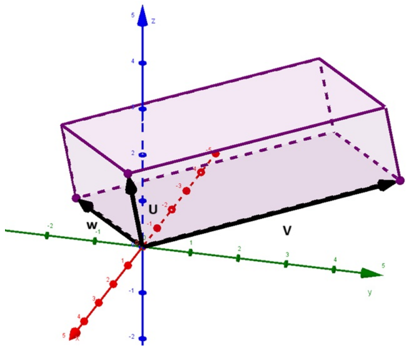
Ejemplo 5.2

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$\mathbf{u} = (1,0,2) \qquad \mathbf{v} = (2,6,3) \qquad \mathbf{w} = (-2,-2,0)$$



El paralelepípedo que tiene por lados dichos vectores es el que se muestra en la siguiente gráfica.



De esta manera, el volumen del paralelepípedo dibujado será:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 22$$

$$|\det(A)| = 22 \rightsquigarrow \text{ volumen del paralelepípedo}$$