Trabajo Práctico 2.2: DETERMINANTES

1. Dadas las siguientes matrices, calcule su determinante según se indique:

   a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Dados los vectores en $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 0, -1)$ y $\mathbf{c} = (2, 1, 1)$, calcular el volumen del paralelepípedo que generan.

3. Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique indicando el nombre de la propiedad aplicada

   a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 8 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

   b) $|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

   c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

   d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ $\det(A) = -3$. Calcule el valor de los determinantes de las siguientes matrices:

   a) $\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 2a_1 & 3b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 3b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 3b_3 & 2c_3 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} a_1 + 3c_1 & a_2 + 3c_2 & a_3 + 3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

5. Sabiendo que A y B son matrices de orden 3, inversibles, y que det(A)=-2 y det(B)=3.De ser posible, calcule aplicando propiedades:

   a) $\det(2A)$

   b) $\det(A + B^T)$

   c) $\det(3AB^{-1})$

   d) $\det(B^2 B^{-3} \frac{1}{2} A)$

   e) $\det(3AA^{-1} - 5I)$

   f) $\det([3A^{-1}B]^T)$

6. Complete las siguientes proposiciones de manera que resulten verdaderas:

   - El determinante de una matriz cuadrada con una fila o columna de ceros es.......
   - El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es.......

- Las columnas de una matriz son linealmente independientes si su determinante es.........
- El determinante de una matriz triangular es igual al............
- El determinante de una matriz y su transpuesta son...............
- Si multiplicamos una fila de una matriz por un escalar no nulo, su determinante resulta................
- Si multiplicamos un escalar $k \neq 0$ por una matriz A de orden n, su determinante resulta...............
- Dada una matriz cuadrada A, realizamos la operación elemental que consiste en reemplazar una fila f_i por $f_i + f_j$, con $i \neq$j, el determinante de esta nueva matriz resulta.............

7. Halle, de ser posible, los valores de k para los cuales las matrices admiten inversa

   - $A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & -2 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
   - $B = \begin{bmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$
   - $C = \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ k & -k & k \\ k & -k & 2 \end{bmatrix}$

   - Calcule la inversa de la matriz A del ejercicio anterior por método de determinantes, para un valor de $k = -1$.

8. Dada la siguiente matriz:

   - Encuentre el menor complementario y cofactor correspondiente al elemento 3 y al elemento m_{21}.
   - Evalúe el determinante de la matriz M mediante cofactores.
   - Indique si la matriz M es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de M.

   $$M= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique la respuesta usando determinantes:

   a) El determinante del producto de una matriz de 2×1 por una de 1×2 siempre es cero.

   b) La matriz adjunta de una matriz inversible es inversible.

   c) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar siempre es cero.