

Repaso de centroides y momentos de inercia

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Entre los temas que se analizan en el capítulo 12 se incluyen los centroides y cómo localizarlos (secciones 12.2 y 12.3), los momentos de inercia (sección 12.4), el teorema de los ejes paralelos (sección 12.5), los momentos polares de inercia (sección 12.6), los productos de inercia (sección 12.7), la rotación de ejes (sección 12.8) y los ejes principales (sección 12.9). Sólo se consideraron áreas planas. En este capítulo se incluyen muchos ejemplos así como problemas al final del mismo para su repaso.

En el apéndice D se proporciona una tabla de centroides y momentos de inercia de una variedad de formas geométricas comunes para contar con una referencia conveniente.

El capítulo 12 está organizado como sigue:

- 12.1** Introducción 902
 - 12.2** Centroides de áreas planas 902
 - 12.3** Centroides de áreas compuestas 905
 - 12.4** Momentos de inercia de áreas planas 909
 - 12.5** Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia 912
 - 12.6** Momentos polares de inercia 916
 - 12.7** Productos de inercia 918
 - 12.8** Rotación de ejes 921
 - 12.9** Ejes principales y momentos de inercia principales 923
- Problemas* 927

12.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo es un repaso de las definiciones y fórmulas relativas a los centroides y momentos de inercia de las áreas planas. La palabra “repaso” es apropiada debido a que estos temas por lo general se estudian en cursos anteriores, como en matemáticas y estática para ingenieros y, por tanto, la mayoría de los lectores ya habrán tenido contacto con el material. Sin embargo, como los centroides y los momentos de inercia se usan de manera continua en todos los capítulos anteriores, el lector los debe comprender con claridad, además, las definiciones y fórmulas esenciales deben resultarle accesibles.

La terminología empleada en este y en capítulos anteriores puede parecer confusa para algunos lectores. Por ejemplo, el término “momento de inercia” es obvio que es un nombre equivocado cuando se refiere a propiedades de un área, ya que no se implica la masa. Incluso la palabra “área” se utiliza de manera inapropiada. Cuando decimos “área plana”, en realidad queremos decir “superficie plana”. Al hablar en sentido estricto, área es una medida del *tamaño* de una superficie y no es lo mismo que la propia superficie. A pesar de sus deficiencias, la terminología empleada en este libro está tan arraigada en la bibliografía de ingeniería que raras veces causa confusión.

12.2 CENTROIDES DE ÁREAS PLANAS

La posición del centroide de un área plana es una propiedad geométrica importante. Para obtener las fórmulas para localizar los centroides nos referiremos a la figura 12.1, que muestra un área plana de forma irregular con su centroide en el punto C . El sistema coordenado xy está orientado de manera arbitraria con su origen en cualquier punto O . El **área** de la figura geométrica está definida por la siguiente integral:

$$A = \int dA \quad (12.1)$$

en donde dA es un elemento diferencial de área con coordenadas x y y (figura 12.1) y A es el área total de la figura.

Los **momentos estáticos** del área con respecto a los ejes x y y se definen, respectivamente, como sigue:

$$Q_x = \int y dA \quad Q_y = \int x dA \quad (12.2a,b)$$

Entonces, los momentos estáticos representan las sumas de los productos de las áreas diferenciales y sus coordenadas. Los momentos estáticos pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la posición de los ejes xy . Además, los momentos estáticos tienen unidades de longitud elevada a la tercera potencia; por ejemplo, in^3 o mm^3 .

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del **centroide** C (figura 12.1) son iguales a los momentos estáticos divididos entre el área:

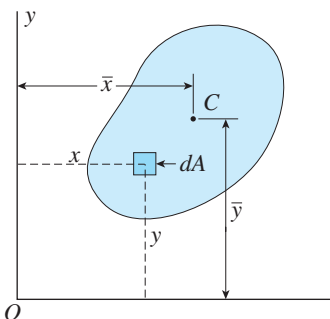


FIGURA 12.1 Área plana de forma arbitraria con centroide C .

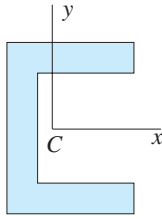


FIGURA 12.2 Área con un eje de simetría.

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x \, dA}{\int dA} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y \, dA}{\int dA} \quad (12.3a,b)$$

Si las fronteras del área están definidas por expresiones matemáticas simples, podemos evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b) en forma cerrada y de allí obtener fórmulas para \bar{x} y \bar{y} . Las fórmulas que aparecen en el apéndice D se obtuvieron de esta manera. En general, las coordenadas \bar{x} y \bar{y} pueden ser positivas o negativas, dependiendo de la posición del centroide con respecto a los ejes de referencia.

Si un área es **simétrica con respecto a un eje**, el centroide debe encontrarse sobre dicho eje debido a que el momento estático con respecto a un eje de simetría es igual a cero. Por ejemplo, el centroide del área simétrica simple que se muestra en la figura 12.2 debe estar sobre el eje x , que es el eje de simetría. Por tanto, para localizar el centroide C sólo se debe calcular una coordenada.

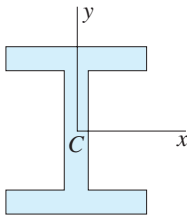


FIGURA 12.3 Área con dos ejes de simetría.

Si un área tiene **dos ejes de simetría**, como se ilustra en la figura 12.3, la posición del centroide se puede determinar por inspección debido a que se encuentra en la intersección de los ejes de simetría.

Un área del tipo mostrado en la figura 12.4 es **simétrica con respecto a un punto**. No tiene ejes de simetría, pero existe un punto (denominado **centro de simetría**) de manera que cada línea trazada por ese punto hace contacto con el área de una manera simétrica. El centroide de esa área coincide con el centro de simetría y, por tanto, el centroide se puede localizar por inspección.

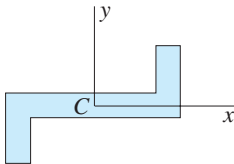


FIGURA 12.4 Área simétrica con respecto a un punto.

Si un área tiene **fronteras irregulares** no definidas mediante expresiones matemáticas simples, podemos ubicar el centroide al evaluar de manera numérica las integrales en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b). El procedimiento más simple es dividir la figura geométrica en elementos finitos pequeños y reemplazar las integraciones con sumatorias. Si denotamos el área de elemento i ésimo con ΔA_i entonces las expresiones para las sumatorias son

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \quad Q_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \Delta A_i \quad Q_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \Delta A_i \quad (12.4a,b,c)$$

en donde n es el número total de elementos, \bar{y}_i es la coordenada y del centroide del elemento i ésimo y \bar{x}_i es la coordenada x del centroide del elemento i ésimo. Al reemplazar las integrales en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b) con las sumatorias correspondientes, obtenemos las siguientes fórmulas para las coordenadas del centroide:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \Delta A_i}{\sum_{i=1}^n \Delta A_i} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \Delta A_i}{\sum_{i=1}^n \Delta A_i} \quad (12.5a,b)$$

La exactitud de los cálculos para \bar{x} y \bar{y} depende de la precisión con que se ajusten los elementos seleccionados al área real. Si se ajustan bien, los resultados son exactos. Muchos programas de cómputo para localizar centroides utilizan un esquema numérico similar al expresado por las ecuaciones (12.5a) y (12.5b).



El centroide de perfiles de acero de patín ancho se encuentra en la intersección de los ejes de simetría

Ejemplo 12.1

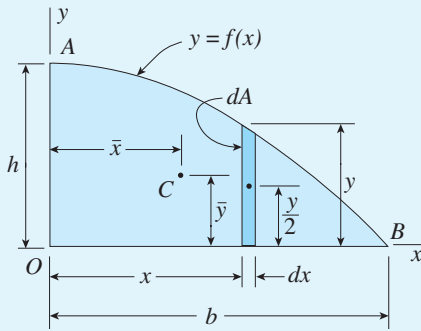


FIGURA 12.5 Ejemplo 12.1. Centroide de un semisegmento parabólico.

Un semisegmento parabólico OAB está limitado por el eje x , el eje y y una curva parabólica que tiene su vértice en A (figura 12.5). La ecuación de la curva es

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \quad (a)$$

en donde b es la base y h es la altura del semisegmento. Localice el centroide C del semisegmento.

Solución

Para determinar las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C (figura 12.5), utilizaremos las ecuaciones (12.3a) y (12.3b). Iniciamos seleccionando un elemento de área dA en la forma de una franja vertical delgada con ancho dx y altura y . El área de este elemento diferencial es

$$dA = y dx = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx \quad (b)$$

Por tanto, el área del semisegmento parabólico es

$$A = \int dA = \int_0^b h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx = \frac{2bh}{3} \quad (c)$$

Observe que esta área es $2/3$ del área del rectángulo que la rodea.

El momento estático de un elemento de área dA con respecto a un eje se obtiene multiplicando el área del elemento por la distancia desde su centroide hasta el eje. Como las coordenadas x y y del centroide del elemento que se muestra en la figura 12.5 son x y $y/2$, respectivamente, los momentos estáticos del elemento con respecto a los ejes x y y son

$$Q_x = \int \frac{y}{2} dA = \int_0^b \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx = \frac{4bh^2}{15} \quad (d)$$

$$Q_y = \int x dA = \int_0^b hx \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx = \frac{b^2h}{4} \quad (e)$$

en donde sustituimos el valor de dA de la ecuación (b).

Ahora podemos determinar las coordenadas del centroide C :

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{2h}{5} \quad (f,g) \quad \leftarrow$$

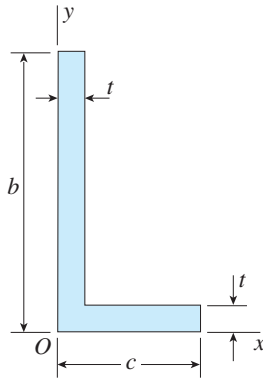
Estos resultados concuerdan con las fórmulas del apéndice D, caso 17.

Notas: el centroide C del semisegmento parabólico también se puede localizar al tomar el elemento de área dA como una franja horizontal con altura dy y ancho

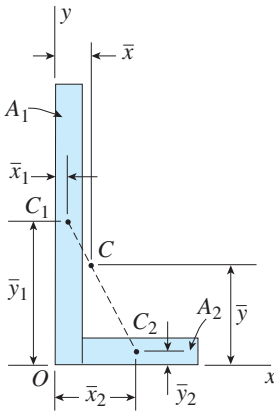
$$x = b \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \quad (h)$$

Esta expresión se obtiene al despejar x en la ecuación (a) en términos de y .

12.3 CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS



(a)



(b)

FIGURA 12.6 Centroide de un área compuesta que consiste en dos partes.

En el trabajo de ingeniería rara vez necesitamos localizar los centroides por integración debido a que los centroides de figuras geométricas comunes ya se conocen y están tabulados. Sin embargo, con frecuencia necesitamos localizar los centroides de áreas compuestas de varias partes, cada una con una forma geométrica familiar, como un rectángulo y un círculo. Ejemplos de **áreas compuestas** son las secciones transversales de vigas y columnas, que es usual que consistan de elementos rectangulares (por ejemplo, consulte las figuras 12.2, 12.3 y 12.4).

Las **áreas y los momentos estáticos** de áreas compuestas se pueden calcular al sumar las propiedades correspondientes de las partes constitutivas. Supongamos que un área compuesta está dividida en un total de n partes y denotemos el área de la parte i ésima con A_i . Entonces, podemos obtener el área y los momentos estáticos mediante las siguientes sumatorias:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad Q_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i \quad Q_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i \quad (12.6a,b,c)$$

en donde \bar{x} y \bar{y} son las coordenadas del centroide de la parte i ésima.

Las **coordenadas del centroide** del área compuesta son

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (12.7a,b)$$

Dado que el área compuesta está representada exactamente por las n partes, las ecuaciones anteriores dan resultados exactos para las coordenadas del centroide.

Para ilustrar como se utilizan las ecuaciones (12.7a) y (12.7b), considere el área en forma de L (o sección angular) que se muestra en la figura 12.6a. Esta área tiene dimensiones laterales b y c , y espesor t . El área se puede dividir en dos rectángulos con áreas A_1 y A_2 con centroides C_1 y C_2 , respectivamente (figura 12.6b). Las áreas y las coordenadas centroidales de estas dos partes son

$$A_1 = +bt \quad \bar{x}_1 = \frac{t}{2} \quad \bar{y}_1 = \frac{b}{2}$$

$$A_2 = (c - t)t \quad \bar{x}_2 = \frac{c + t}{2} \quad \bar{y}_2 = \frac{t}{2}$$

Por tanto, el área y los momentos estáticos del área compuesta (de las ecuaciones 12.6a, b y c) son

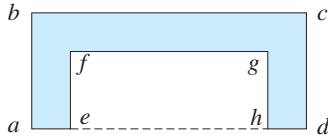
$$A = A_1 + A_2 = t(b + c - t)$$

$$Q_x = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = \frac{t}{2} (b^2 + ct - t^2)$$

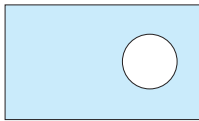
$$Q_y = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 = \frac{t}{2} (bt + c^2 - t^2)$$

Por último, podemos obtener las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área compuesta (figura 12.6b) con las ecuaciones (12.7a) y (12.7b):

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{bt + c^2 - t^2}{2(b + c - t)} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{b^2 + ct - t^2}{2(b + c - t)} \quad (12.8a,b)$$



(a)



(b)

Se puede emplear un procedimiento similar para áreas más complejas, como se ilustra en el ejemplo 12.2.

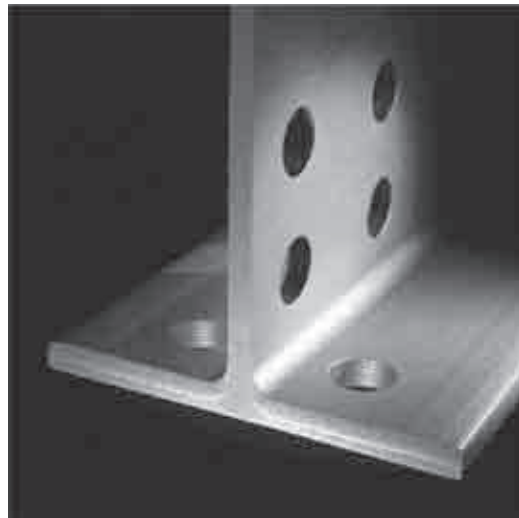
Nota 1: cuando un área compuesta está dividida en sólo dos partes, el centroide C de toda el área se encuentra sobre la línea que une los centroides C_1 y C_2 de las dos partes (como se muestra en la figura 12.6b para el área en forma de L).

Nota 2: al utilizar las fórmulas para áreas compuestas (ecuaciones 12.6 y 12.7), podemos manejar la *ausencia* de un área mediante una resta. Este procedimiento es útil cuando hay recortes u orificios en la figura.

Por ejemplo, considere el área que se muestra en la figura 12.7a. Podemos analizar esta figura como un área compuesta al restar las propiedades del rectángulo interior $efgh$ de las propiedades correspondientes del rectángulo exterior $abcd$. (Desde otro punto de vista, podemos considerar el rectángulo exterior como un “área positiva” y el rectángulo interior como un “área negativa”.)

De manera similar, si un área tiene un orificio (figura 12.7b), podemos restar las propiedades del área del orificio de las del rectángulo exterior. (De nuevo, se logra el mismo efecto si tratamos el rectángulo exterior como un “área positiva” y el orificio como un “área negativa”.)

FIGURA 12.7 Áreas compuestas con un recorte y un orificio.



Ejemplo 12.2

La sección transversal de una viga de acero está construida con una sección W 18 × 71 de patín ancho con una cubreplaca de 6 in × 1/2 in soldada al patín superior y una sección en canal C 10 × 30 soldada al patín inferior (figura 12.8).

Localice el centroide C del área de la sección transversal.

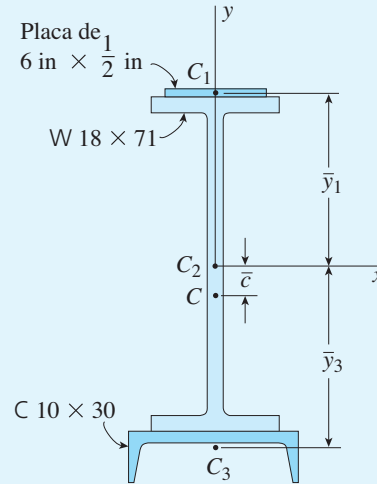


FIGURA 12.8 Ejemplo 12.2. Centroides de un área compuesta.

Solución

Denotemos las áreas de la cubreplaca, de la sección de patín ancho y de la sección en canal A_1 , A_2 y A_3 , respectivamente. Los centroides de estas tres áreas están identificados C_1 , C_2 y C_3 , respectivamente, en la figura 12.8. Observe que el área compuesta tiene un eje de simetría y por lo tanto todos los centroides se encuentran sobre ese eje. Las tres áreas parciales son

$$A_1 = (6 \text{ in})(0.5 \text{ in}) = 3.0 \text{ in}^2 \quad A_2 = 20.8 \text{ in}^2 \quad A_3 = 8.82 \text{ in}^2$$

en donde las áreas A_1 y A_3 se obtienen de las tablas E.1 y E.3 del apéndice E.

Coloquemos el origen de los ejes x y y en el centroide C_2 de la sección de patín ancho. Entonces, las distancias desde el eje x hasta los centroides de las tres áreas son las siguientes:

$$\bar{y}_1 = \frac{18.47 \text{ in}}{2} + \frac{0.5 \text{ in}}{2} = 9.485 \text{ in}$$

$$\bar{y}_2 = 0 \quad \bar{y}_3 = \frac{18.47 \text{ in}}{2} + 0.649 \text{ in} = 9.884 \text{ in}$$

en donde las dimensiones pertinentes de las secciones de patín ancho y en canal se obtienen de las tablas E.1 y E.3.

El área A y el momento estático Q_x de toda la sección transversal se obtienen con las ecuaciones (12.6a) y (12.6b) como se muestra:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 3.0 \text{ in}^2 + 20.8 \text{ in}^2 + 8.82 \text{ in}^2 = 32.62 \text{ in}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 \\ &= (9.485 \text{ in})(3.0 \text{ in}^2) + 0 - (9.884 \text{ in})(8.82 \text{ in}^2) = -58.72 \text{ in}^3 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener la coordenada \bar{y} hasta el centroide C del área compuesta con la ecuación (12.7b):

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{-58.72 \text{ in}^3}{32.62 \text{ in}^2} = -1.80 \text{ in}$$

Como \bar{y} es positiva en la dirección positiva del eje y , el signo menos significa que el centroide C del área compuesta está localizado debajo del eje x , como se muestra en la figura 12.8. Por tanto, la distancia \bar{c} entre el eje x y el centroide C es

$$\bar{c} = 1.80 \text{ in}$$



Observe que la posición del eje de referencia (el eje x) es arbitraria; sin embargo, en este ejemplo lo colocamos en el centroide de la sección de patín ancho debido a que simplifica ligeramente los cálculos.

12.4 MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS PLANAS

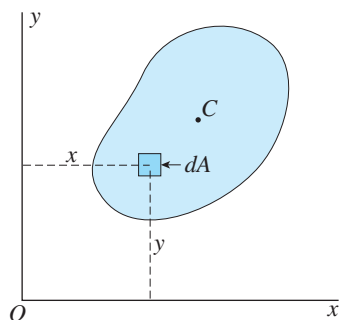


FIGURA 12.9 Área plana con forma arbitraria.

Los **momentos de inercia** de un área plana (figura 12.9) con respecto a los ejes x y y , respectivamente, están definidos por las integrales

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (12.9a,b)$$

en donde x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA . Dado que el elemento dA se multiplica por el cuadrado de la distancia desde el eje de referencia, los momentos de inercia también se denominan **segundos momentos de inercia**. Además, vemos que los momentos de inercia de las áreas (a diferencia de los momentos estáticos) siempre son cantidades positivas.

Para ilustrar cómo se obtienen los momentos de inercia por integración, consideraremos un rectángulo con ancho b y altura h (figura 12.10). Los ejes x y y tienen su origen en el centroide C . Por conveniencia, utilizamos un elemento diferencial de área dA en forma de una franja horizontal delgada de ancho b y altura dy (por tanto, $dA = b dy$). Como todas las partes de la franja elemental están a la misma distancia del eje x , podemos expresar el momento de inercia I_x con respecto al eje x de la siguiente manera:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (a)$$

De manera similar, podemos utilizar un elemento de área en forma de una franja vertical con área $dA = h dx$ y obtener el momento de inercia con respecto al eje y :

$$I_y = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12} \quad (b)$$

Si se selecciona un conjunto diferente de ejes, los momentos de inercia tendrán valores diferentes. Por ejemplo, considere el eje BB en la base del rectángulo (figura 12.10). Si se selecciona este eje como la referencia, debemos definir y como la distancia coordenada desde ese eje hasta el elemento de área dA . Entonces los cálculos para el momento de inercia son

$$I_{BB} = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3} \quad (c)$$

Observe que el momento de inercia con respecto al eje BB es mayor que el momento de inercia con respecto al eje centroidal x . En general, el momento de inercia aumenta conforme el eje de referencia se mueve paralelamente a sí mismo alejándose del centroide.

El momento de inercia de un **área compuesta** con respecto a cualquier eje particular es la suma de los momentos de inercia de sus partes

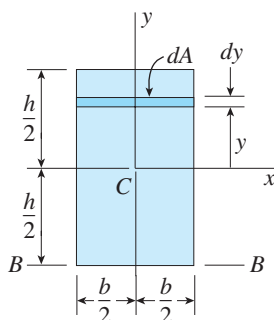
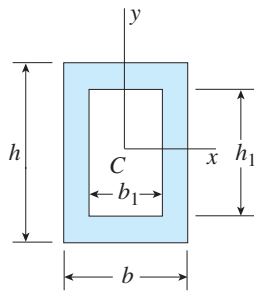
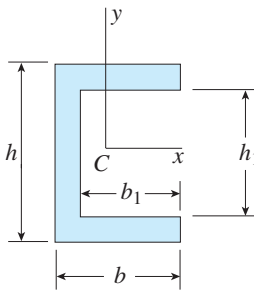


FIGURA 12.10 Momentos de inercia de un rectángulo.



(a)



(b)

FIGURA 12.11 Áreas compuestas.

con respecto a ese mismo eje. Un ejemplo es la sección de caja hueca que se muestra en la figura 12.11a, donde los ejes x y y son ejes de simetría en el centroide C . El momento de inercia I_x con respecto al eje x es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de los rectángulos exterior e interior (como ya se explicó, podemos considerar el rectángulo interior como un “área negativa” y el rectángulo exterior como un “área positiva”). Por tanto,

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} \quad (d)$$

Esta misma fórmula se aplica a la sección en canal que se muestra en la figura 12.11b, donde podemos considerar el recorte como un “área negativa”.

Para la sección en caja hueca podemos usar una técnica similar para obtener el momento de inercia I_y con respecto al eje vertical. Sin embargo, en el caso de la sección en canal, la determinación del momento de inercia I_y requiere utilizar el teorema de los ejes paralelos que se describe en la sección siguiente (sección 12.5).

Las **fórmulas para los momentos de inercia** se dan en el apéndice D. Para las formas que no se muestran, los momentos de inercia usualmente se pueden obtener empleando las fórmulas dadas junto con el teorema de los ejes paralelos. Si un área tiene una forma tan irregular que sus momentos de inercia no se puedan obtener de esta manera, entonces podemos utilizar métodos numéricos. El procedimiento es dividir el área en elementos pequeños de área ΔA_i , multiplicar cada área por el cuadrado de su distancia desde el eje de referencia y luego sumar los productos.

Radio de giro

En ocasiones en mecánica se encuentra una distancia conocida como **radio de giro**. El radio de giro de un área plana se define como la raíz cuadrada del momento de inercia del área dividida entre la propia área; por tanto,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (12.10a,b)$$

en donde r_x y r_y denotan los radios de giro con respecto a los ejes x y y , respectivamente. Como el momento de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia y el área tiene unidades de longitud a la segunda potencia, el radio de giro tiene unidades de longitud.

Si bien el radio de giro de un área no tiene un significado físico obvio, lo podemos considerar como la distancia (desde el eje de referencia) a la que toda el área podría concentrarse y aún tener el mismo momento de inercia que el área original.

Ejemplo 12.3

Determine los momentos de inercia I_x e I_y para el semisegmento parabólico OAB que se muestra en la figura 12.12. La ecuación de la frontera parabólica es

$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (e)$$

(Esta misma área se consideró antes en el ejemplo 12.1.)

Solución

Para determinar los momentos de inercia por integración, utilizaremos las ecuaciones (12.9a) y (12.9b). El elemento diferencial de área dA se selecciona como una franja vertical de ancho dx y altura y , como se muestra en la figura 12.12. El área de este elemento es

$$dA = y \, dx = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx \quad (f)$$

Como cada punto en este elemento está a la misma distancia desde el eje y , el momento de inercia del elemento con respecto al eje y es $x^2 dA$. Por tanto, el momento de inercia de toda el área con respecto al eje y se obtiene como se muestra:

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx = \frac{2hb^3}{15} \quad (g) \quad \leftarrow$$

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje x , observamos que el elemento diferencial de área dA tiene un momento de inercia dI_x con respecto al eje x igual a

$$dI_x = \frac{1}{3} (dx) y^3 = \frac{y^3}{3} dx$$

como se obtuvo con la ecuación (c). De aquí, el momento de inercia de toda el área con respecto al eje x es

$$I_x = \int_0^b \frac{y^3}{3} dx = \int_0^b \frac{h^3}{3} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3 dx = \frac{16bh^3}{105} \quad (h) \quad \leftarrow$$

Estos mismos resultados para I_x e I_y se pueden obtener empleando un elemento en forma de una franja horizontal de área $dA = x \, dy$ o utilizando un elemento rectangular de área $dA = dx \, dy$ y realizando una integración doble. Además, observe que las fórmulas anteriores para I_x e I_y concuerdan con las dadas en el caso 17 del apéndice D.

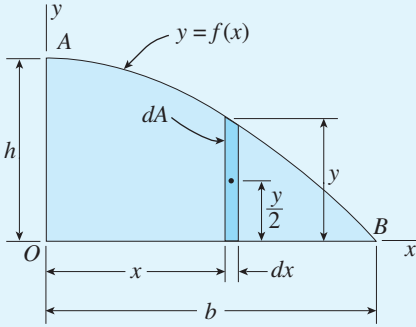


FIGURA 12.12 Ejemplo 12.13. Momentos de inercia de un semisegmento parabólico.

12.5 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA

En esta sección deduciremos un teorema muy útil relativo a momentos de inercia de áreas planas, que se conoce como **teorema de los ejes paralelos** y que proporciona la relación entre el momento de inercia con respecto al eje centroidal y el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo.

Para deducir el teorema, consideramos un área con forma arbitraria con centroide C (figura 12.13). También, consideramos dos conjuntos de ejes coordenados: (1) los ejes $x_c y_c$ con origen en el centroide y (2) un conjunto de ejes paralelos xy con origen en cualquier punto O . Las distancias entre los dos conjuntos de ejes paralelos se denotan d_1 y d_2 . Además, identificamos un elemento de área dA con coordenadas x y y con respecto a los ejes centroidales.

Con base en la definición de momento de inercia, podemos escribir la siguiente ecuación para el momento de inercia I_x con respecto al eje x :

$$I_x = \int (y + d_1)^2 dA = \int y^2 dA + 2d_1 \int y dA + d_1^2 \int dA \quad (a)$$

La primera integral en el lado derecho es el momento de inercia I_{x_c} con respecto al eje x_c . La segunda integral es el momento estático del área con respecto al eje x_c (esta integral es igual a cero debido a que el eje x_c pasa por el centroide). La tercera integral es la propia área A . Por tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \quad (12.11a)$$

Al continuar de la misma manera para el momento de inercia con respecto al eje y , obtenemos

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \quad (12.11b)$$

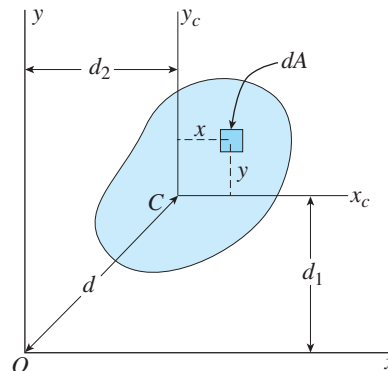


FIGURA 12.13 Dedución del teorema de los ejes paralelos.

Las ecuaciones (12.11a) y (12.11b) representan el **teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia**:

El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

Para ilustrar el uso del teorema, considere de nuevo el rectángulo que se muestra en la figura 12.10. Como sabemos que el momento de inercia con respecto al eje x , que pasa por el centroide, es igual a $bh^3/12$ (consulte la ecuación a de la sección 12.4), podemos determinar el momento de inercia I_{BB} con respecto a la base del rectángulo empleando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{BB} = I_x + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

Este resultado concuerda con el momento de inercia obtenido antes por integración (ecuación c de la sección 12.4).

Del teorema de los ejes paralelos observamos que el momento de inercia aumenta cuando el eje se mueve paralelamente a sí mismo alejándose del centroide. Por tanto, el momento de inercia con respecto a un eje centroidal es el momento de inercia menor de un área (para una dirección dada del eje).

Al utilizar el teorema de los ejes paralelos es esencial recordar que uno de los dos ejes paralelos *debe* ser un eje centroidal. Si es necesario encontrar el momento de inercia I_2 con respecto a un eje no centroidal 2-2 (figura 12.14) cuando se conoce el momento de inercia I_1 con respecto a otro eje no centroidal (y paralelo) 1-1, debemos aplicar el teorema de los ejes paralelos dos veces. Primero, determinamos el momento de inercia centroidal I_{x_c} a partir del momento de inercia conocido I_1 :

$$I_{x_c} = I_1 - Ad_1^2 \quad (b)$$

Luego encontramos el momento de inercia I_2 a partir del momento de inercia centroidal:

$$I_2 = I_{x_c} + Ad_2^2 = I_1 + A(d_2^2 - d_1^2) \quad (12.12)$$

Esta ecuación muestra de nuevo que el momento de inercia aumenta al incrementarse la distancia desde el centroide del área.

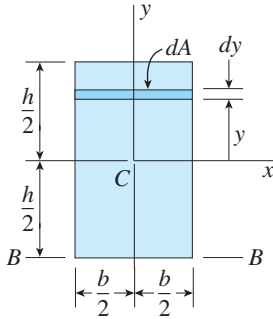


FIGURA 12.10 Momentos de inercia de un rectángulo. (Repetida.)

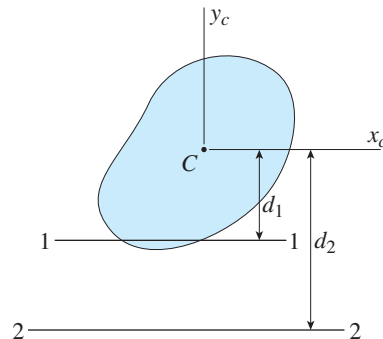


FIGURA 12.14 Área plana con dos ejes paralelos no centroidales (ejes 1-1 y 2-2).

Ejemplo 12.4

El semisegmento parabólico OAB que se muestra en la figura 12.15 tiene base b y altura h . Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia I_{x_c} e I_{y_c} con respecto a los ejes centroidales x_c y y_c .

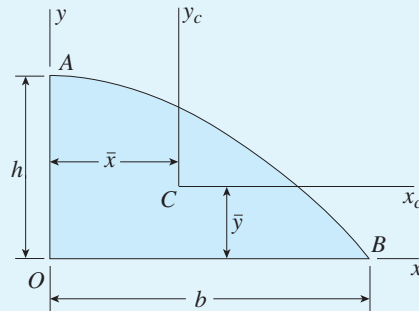


FIGURA 12.15 Ejemplo 12.4. Teorema de los ejes paralelos.

Solución

Podemos utilizar el teorema de los ejes paralelos (en vez de integración) para determinar los momentos de inercia centroidales dado que ya conocemos el área A , las coordenadas centroidales \bar{x} y \bar{y} y los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y . Estas cantidades se obtuvieron antes en los ejemplos 12.1 y 12.3. También se dan en el caso 17 del apéndice D y se repiten aquí:

$$A = \frac{2bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{2h}{5} \quad I_x = \frac{16bh^3}{105} \quad I_y = \frac{2hb^3}{15}$$

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje x_c , utilizamos la ecuación (b) y escribimos el teorema de los ejes paralelos como sigue:

$$I_{x_c} = I_x - A\bar{y}^2 = \frac{16bh^3}{105} - \frac{2bh}{3} \left(\frac{2h}{5} \right)^2 = \frac{8bh^3}{175} \quad (12.13a) \quad \leftarrow$$

De manera similar, obtenemos el momento de inercia con respecto al eje y_c :

$$I_{y_c} = I_y - A\bar{x}^2 = \frac{2hb^3}{15} - \frac{2bh}{3} \left(\frac{3b}{8} \right)^2 = \frac{19hb^3}{480} \quad (12.13b) \quad \leftarrow$$

De esta manera hemos determinado los momentos de inercia centroidales del semisegmento.

Ejemplo 12.5

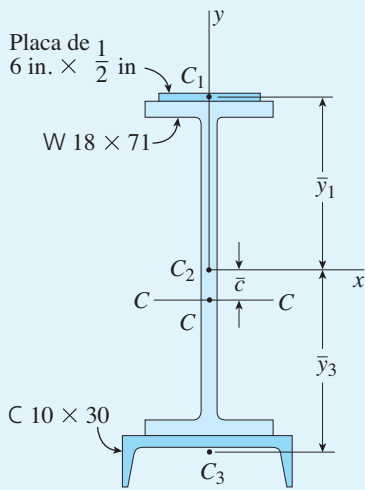


FIGURA 12.16 Ejemplo 12.5. Momento de inercia de un área compuesta.

Determine el momento de inercia I_c con respecto al eje horizontal $C-C$ que pasa por el centroide C de la sección transversal de la viga que se muestra en la figura 12.16. (La posición del centroide C se determinó antes en el ejemplo 12.2 de la sección 12.3.)

Nota: de la teoría de vigas (capítulo 5), sabemos que el eje $C-C$ es el eje neutro por flexión de esta viga, y por tanto el momento de inercia I_c se debe determinar a fin de calcular los esfuerzos y las deflexiones de esta viga.

Solución

Determinaremos el momento de inercia I_c con respecto al eje $C-C$ aplicando el teorema de los ejes paralelos a cada parte individual del área compuesta. El área se divide naturalmente en tres partes: (1) la cubreplaca, (2) la sección de patín ancho y (3) la sección en canal. Las áreas y distancias centroidales siguientes se obtuvieron antes en el ejemplo 12.2:

$$A_1 = 3.0 \text{ in}^2 \quad A_2 = 20.8 \text{ in}^2 \quad A_3 = 8.82 \text{ in}^2$$

$$\bar{y}_1 = 9.485 \text{ in} \quad \bar{y}_2 = 0 \quad \bar{y}_3 = 9.884 \text{ in} \quad \bar{c} = 1.80 \text{ in}$$

Los momentos de inercia de las tres partes con respecto a ejes horizontales a través de sus propios centroides C_1 , C_2 y C_3 son como sigue:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(6.0 \text{ in})(0.5 \text{ in})^3 = 0.063 \text{ in}^4$$

$$I_2 = 1170 \text{ in}^4 \quad I_3 = 3.94 \text{ in}^4$$

Los momentos de inercia I_2 e I_3 se obtienen de las tablas E.1 y E.3, respectivamente, del apéndice E.

Ahora podemos usar el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia con respecto al eje $C-C$ para cada una de las tres partes del área compuesta:

$$(I_c)_1 = I_1 + A_1(\bar{y}_1 + \bar{c})^2 = 0.063 \text{ in}^4 + (3.0 \text{ in}^2)(11.28 \text{ in})^2 = 382 \text{ in}^4$$

$$(I_c)_2 = I_2 + A_2\bar{c}^2 = 1170 \text{ in}^4 + (20.8 \text{ in}^2)(1.80 \text{ in})^2 = 1240 \text{ in}^4$$

$$(I_c)_3 = I_3 + A_3(\bar{y}_3 - \bar{c})^2 = 3.94 \text{ in}^4 + (8.82 \text{ in}^2)(8.084 \text{ in})^2 = 580 \text{ in}^4$$

La suma de estos momentos de inercia individuales da el momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto a su eje centroidal $C-C$:

$$I_c = (I_c)_1 + (I_c)_2 + (I_c)_3 = 2200 \text{ in}^4$$



Este ejemplo muestra cómo calcular momentos de inercia de áreas compuestas empleando el teorema de los ejes paralelos.

12.6 MOMENTOS POLARES DE INERCIA

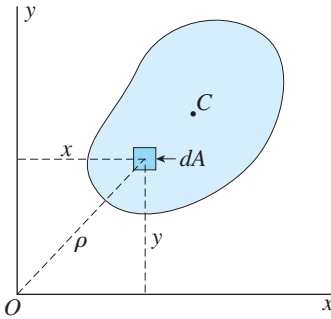


FIGURA 12.17 Área plana con forma arbitraria.

Los momentos de inercia analizados en la sección anterior se definen con respecto a ejes que se encuentran en el plano de la propia área, como los ejes x y y en la figura 12.17. Ahora consideraremos un eje *perpendicular* al plano del área y que interseque el plano en el origen O . El momento de inercia con respecto a este eje perpendicular se denomina **momento polar de inercia** y se denota con el símbolo I_P .

El momento polar de inercia con respecto a un eje en el punto O perpendicular al plano de la figura se define por la integral

$$I_P = \int \rho^2 dA \quad (12.14)$$

en donde ρ es la distancia desde el punto O hasta el elemento diferencial de área dA (figura 12.17). Esta integral tiene forma similar a las de los momentos de inercia I_x e I_y (consulte las ecuaciones 12.9a y 12.9b).

Puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2$, donde x y y son las coordenadas rectangulares del elemento dA , obtenemos la siguiente expresión para I_P :

$$I_P = \int \rho^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

Así, obtenemos la relación importante:

$$I_P = I_x + I_y \quad (12.15)$$

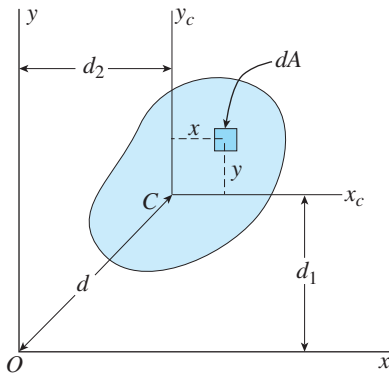


FIGURA 12.13 Deducción del teorema de los ejes paralelos. (Repetida.)

Esta ecuación muestra que el momento polar de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura en cualquier punto O es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares *cualesquiera* x y y que pasen por ese mismo punto y que se encuentren en el plano de la figura.

Por conveniencia, es usual referirnos a I_P simplemente como el momento polar de inercia con respecto al punto O , sin mencionar que el eje es perpendicular al plano de la figura. Además, para distinguirlos de los momentos **polares** de inercia, en ocasiones nos referimos a I_x e I_y como momentos **rectangulares** de inercia.

Los momentos polares de inercia con respecto a varios puntos en el plano de un área están relacionados por el **teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia**. Podemos deducir este teorema refiriéndonos de nuevo a la figura 12.13. Denotemos los momentos polares de inercia con respecto al origen O y al centroide C con $(I_P)_O$ e $(I_P)_C$, respectivamente. Entonces, al emplear la ecuación (12.15), podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$(I_P)_O = I_x + I_y \quad (I_P)_C = I_{x_c} + I_{y_c} \quad (a)$$

Ahora refiérase al teorema de los ejes paralelos deducidos en la sección 12.5 para momentos rectangulares de inercia (ecuaciones 12.11a y 12.11b). Al sumar estas dos ecuaciones, obtenemos

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

Sustituimos en las ecuaciones (a) y observando también que $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ (figura 12.13), obtenemos

$$(I_P)_O = (I_P)_C + Ad^2 \quad (12.16)$$

Esta ecuación representa el **teorema de los ejes paralelos** para momentos polares de inercia:

El momento polar de inercia de un área con respecto a cualquier punto O en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide C más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C .

Para ilustrar la determinación de los momentos polares de inercia y el uso del teorema de los ejes paralelos, considere un círculo con radio r (figura 12.18). Tomemos un elemento diferencial de área dA en forma de un anillo delgado con radio ρ y espesor $d\rho$ (por tanto, $dA = 2\pi\rho d\rho$). Como cada punto en el elemento está a la misma distancia ρ desde el centro del círculo, el momento polar de inercia de todo el círculo con respecto al centro es

$$(I_P)_C = \int \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} \quad (12.17)$$

Este resultado aparece en el caso 9 del apéndice D.

El momento polar de inercia del círculo con respecto a cualquier punto B en su circunferencia (figura 12.18) se puede obtener con el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_P)_B = (I_P)_C + Ad^2 = \frac{\pi r^4}{2} + \pi r^2(r^2) = \frac{3\pi r^4}{2} \quad (12.18)$$

Por cierto, observe que el momento polar de inercia tiene su valor menor cuando el punto de referencia es el centroide del área.

Un círculo es un caso especial en que el momento polar de inercia se puede determinar por integración. Sin embargo, la mayor parte de las formas encontradas en el trabajo de ingeniería no se prestan para esta técnica, por lo que es usual que los momentos polares de inercia se obtengan sumando los momentos rectangulares de inercia para dos ejes perpendiculares (ecuación 12.15).

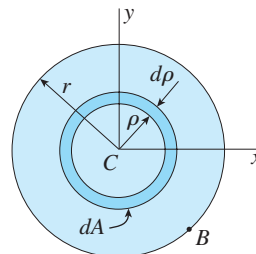


FIGURA 12.18 Momento polar de inercia de un círculo.

12.7 PRODUCTOS DE INERCIA

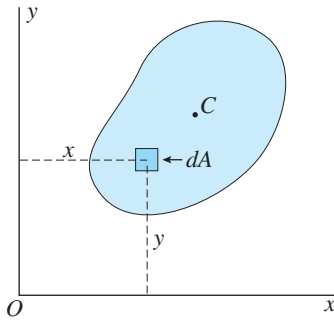


FIGURA 12.19 Área plana con forma arbitraria.

El producto de inercia de un área plana se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares que se encuentran en el plano del área. Entonces, con referencia al área que se muestra en la figura 12.19, definimos el **producto de inercia** con respecto a los ejes x y y como sigue:

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (12.19)$$

De acuerdo con esta definición observamos que cada elemento diferencial de área dA se multiplica por el producto de sus coordenadas. Como consecuencia, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o cero dependiendo de la posición de los ejes xy con respecto al área.

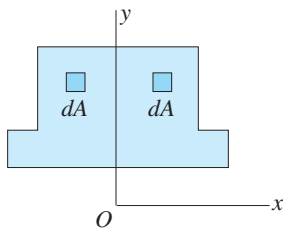


FIGURA 12.20 El producto de inercia es cero cuando alguno de los ejes es el de simetría.

Si el área se encuentra por completo en el primer cuadrante de los ejes (como en la figura 12.19), entonces el producto de inercia es positivo debido a que cada elemento dA tiene coordenadas x y y positivas. Si el área se encuentra por completo en el segundo cuadrante, el producto de inercia es negativo dado que cada elemento tiene una coordenada y positiva y una coordenada x negativa. De manera similar, las áreas que estén por completo dentro del tercero y cuarto cuadrantes tienen productos de inercia positivos y negativos, respectivamente. Cuando el área se encuentra en más de un cuadrante, el signo del producto de inercia depende de la distribución del área dentro de los cuadrantes.

Un caso especial se origina cuando uno de los ejes es un **eje de simetría** del área. Por ejemplo, considere el área que se muestra en la figura 12.20, que es simétrica con respecto al eje y . Para cada elemento dA con coordenadas x y y existe un elemento dA igual y simétricamente ubicado con la misma coordenada y pero con una coordenada x con signo opuesto. Por tanto, los productos $xy \, dA$ se cancelan entre sí y la integral en la ecuación (12.19) desaparece. Por tanto, *el producto de inercia de un área es cero con respecto a cualquier par de ejes en el cual al menos uno de ellos es un eje de simetría del área.*

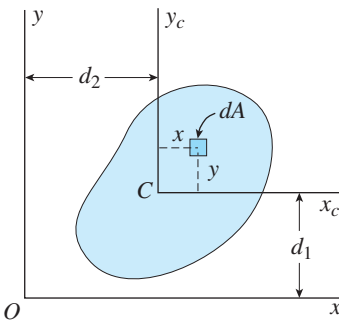


FIGURA 12.21 Área plana con forma arbitraria.

Como ejemplos de la regla anterior, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero para las áreas que se muestran en las figuras 12.10, 12.11, 12.16 y 12.18. Por el contrario, el producto de inercia I_{xy} tiene un valor positivo diferente de cero para el área que se muestra en la figura 12.15. (Estas observaciones son válidas para productos de inercia con respecto a los ejes xy particulares que se muestran en la las figuras. Si los ejes se desplazan a otra posición, el producto de inercia puede cambiar.)

Los productos de inercia de un área con respecto a conjuntos de ejes paralelos están relacionados por un **teorema de los ejes paralelos** que es análogo a los teoremas correspondientes para momentos rectangulares de inercia y momentos polares de inercia. Para obtener este teorema, considere el área que se muestra en la figura 12.21, que tiene centroide C y ejes

centroidales $x_c y_c$. El producto de inercia I_{xy} con respecto a cualquier otro conjunto de ejes, paralelos a los ejes $x_c y_c$, es

$$I_{xy} = \int (x + d_2)(y + d_1) dA = \int xy dA + d_1 \int x dA + d_2 \int y dA + d_1 d_2 \int dA$$

en donde d_1 y d_2 son las coordenadas del centroide C con respecto a los ejes xy (por tanto, d_1 y d_2 pueden ser valores positivos o negativos).

La primera integral en la última expresión es el producto de inercia $I_{x_c y_c}$ con respecto a los ejes centroidales; la segunda y tercera integrales son iguales a cero debido a que son los momentos estáticos del área con respecto a los ejes centroidales y la última integral es el área A . Por tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2 \quad (12.20)$$

Esta ecuación representa el **teorema de los ejes paralelos para productos de inercia**:

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes en su plano es igual al producto de inercia con respecto a ejes centroidales paralelos más el producto del área y las coordenadas del centroide con respecto al par de ejes.

Para demostrar el uso de este teorema de los ejes paralelos, determinemos el producto de inercia de un rectángulo con respecto a los ejes xy que tienen su origen en el punto O en la esquina inferior izquierda del rectángulo (figura 12.22). El producto de inercia con respecto a los ejes $x_c y_c$ es cero debido a la simetría. Además, las coordenadas del centroide con respecto a los ejes xy son

$$d_1 = \frac{h}{2} \quad d_2 = \frac{b}{2}$$

Sustituimos en la ecuación (12.20) y obtenemos

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2 = 0 + bh \left(\frac{h}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{b^2 h^2}{4} \quad (12.21)$$

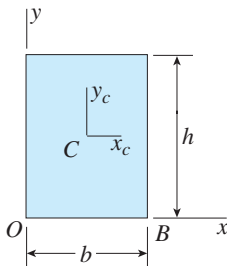


FIGURA 12.22 Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia.

Este producto de inercia es positivo debido a que toda el área se encuentra en el primer cuadrante. Si los ejes xy se trasladan en sentido horizontal de manera que el origen se mueva al punto B en la esquina inferior derecha del rectángulo (figura 12.22), toda el área se encuentra en el segundo cuadrante y el producto de inercia será $-b^2 h^2/4$.

El ejemplo siguiente también ilustra el uso del teorema de los ejes paralelos para productos de inercia.

Ejemplo 12.6

Determine el producto de inercia I_{xy} de la sección Z que se muestra en la figura 12-23. La sección tiene ancho b , altura h y espesor constante t .

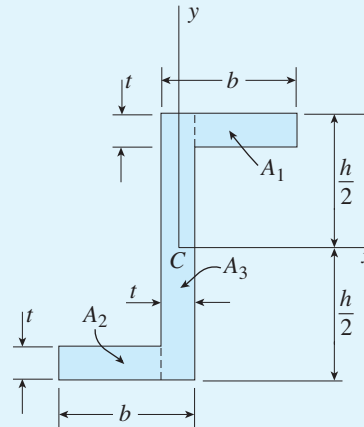


FIGURA 12.23 Ejemplo 12.6. Producto de inercia de una sección Z.

Solución

Para obtener el producto de inercia con respecto a los ejes xy que pasan por el centroide, dividimos el área en tres partes y utilizamos el teorema de los ejes paralelos. Las partes son las siguientes: (1) un rectángulo de ancho $b - t$ y espesor t en el patín superior, (2) un rectángulo similar en el patín inferior y (3) un rectángulo del alma con altura h y espesor t .

El producto de inercia del rectángulo del alma con respecto a los ejes xy es cero (por la simetría). El producto de inercia $(I_{xy})_1$ del rectángulo del patín superior (con respecto a los ejes xy) se determina empleando el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_{xy})_1 = I_{x_c y_c} + Ad_1 d_2 \quad (a)$$

en donde $I_{x_c y_c}$ es el producto de inercia del rectángulo con respecto a su propio centroide, A es el área del rectángulo, d_1 es la coordenada y del centroide del rectángulo y d_2 es la coordenada x del centroide del rectángulo. Por tanto,

$$I_{x_c y_c} = 0 \quad A = (b - t)t \quad d_1 = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \quad d_2 = \frac{b}{2}$$

Al sustituir en la ecuación (a), obtenemos el producto de inercia del rectángulo en el patín superior:

$$(I_{xy})_1 = I_{x_c y_c} + Ad_1 d_2 = 0 + (b - t)t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{bt}{4} (h - t)(b - t)$$

El producto de inercia del rectángulo en el patín inferior es el mismo. Por tanto, el producto de inercia de toda la sección Z es el doble de $(I_{xy})_1$, o

$$I_{xy} = \frac{bt}{2} (h - t)(b - t) \quad (12.22) \quad \leftarrow$$

Observe que este producto de inercia es positivo debido a que los patines se encuentran en el primero y segundo cuadrantes.

12.8 ROTACIÓN DE EJES

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición del origen y de la orientación de los ejes de referencia. Para un origen dado, los momentos de inercia y el producto de inercia varían conforme se giran los ejes con respecto a ese origen. La forma en que varían y las magnitudes de los valores máximo y mínimo se analizan en esta y en la siguiente sección.

Consideremos el área plana que se muestra en la figura 12.24 y supongamos que los ejes xy son un par de ejes de referencia ubicados de manera arbitraria. Los momentos y productos de inercia con respecto a dichos ejes son

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (\text{a,b,c})$$

en donde x y y son las coordenadas de un elemento diferencial de área dA .

Los ejes x_1 y y_1 tienen el mismo origen que los ejes xy pero están girados un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a esos ejes. Los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x_1, y_1 se denotan I_{x_1} , I_{y_1} e $I_{x_1 y_1}$, respectivamente. Para obtener estas cantidades necesitamos las coordenadas del elemento de área dA con respecto a los ejes x_1, y_1 . Estas coordenadas se pueden expresar en términos de las coordenadas xy y del ángulo θ por geometría, como sigue:

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y_1 = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (12.23\text{a,b})$$

Entonces el momento de inercia con respecto al eje x_1 es

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int y_1^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA \end{aligned}$$

o, con las ecuaciones (a), (b) y (c),

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (12.24)$$

Ahora introducimos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) & \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

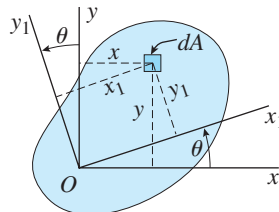


FIGURA 12.24 Rotación de ejes.

Entonces la ecuación (12.24) se convierte en

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (12.25)$$

De manera similar podemos obtener el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 :

$$\begin{aligned} I_{x_1y_1} &= \int x_1y_1 dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA \\ &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (12.26)$$

De nuevo empleando identidades trigonométricas, obtenemos

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (12.27)$$

Las ecuaciones (12.25) y (12.27) dan el momento de inercia I_{x_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes girados en términos de los momentos y el producto de inercia para los ejes originales. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia**.

Observe que estas ecuaciones de transformación tienen la misma forma que las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (ecuaciones 7.4a y 7.4b de la sección 7.2). Al comparar los dos conjuntos de ecuaciones, observamos que I_{x_1} corresponde a σ_{x_1} , $I_{x_1y_1}$ corresponde a $-\tau_{x_1y_1}$, I_x corresponde a σ_x , I_y corresponde a σ_y e I_{xy} corresponde a $-\tau_{xy}$. Por tanto, también podemos analizar momentos y productos de inercia con el **círculo de Mohr** (consulte la sección 7.4).

El momento de inercia I_{y_1} se puede obtener mediante el mismo procedimiento que utilizamos para determinar I_{x_1} e $I_{x_1y_1}$. Sin embargo, un procedimiento más simple es reemplazar θ con $\theta + 90^\circ$ en la ecuación (12.25). El resultado es

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (12.28)$$

Esta ecuación muestra cómo varía el momento de inercia I_{y_1} conforme se giran los ejes con respecto al origen.

Una ecuación útil relacionada con los momentos de inercia se obtiene sumando I_{x_1} y I_{y_1} (ecuaciones 12.25 y 12.28). El resultado es

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \quad (12.29)$$

Esta ecuación indica que la suma de los momentos de inercia con respecto a un par de ejes permanece constante conforme se giran los ejes con respecto al origen. Esta suma es el momento polar de inercia del área con respecto al origen. Observe que la ecuación (12.29) es análoga a la ecuación (7.6) para esfuerzos y a la ecuación (7.72) para deformaciones.

12.9 EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES

Las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia (ecuaciones 12.25, 12.27 y 12.28) muestran cómo varían los momentos y productos de inercia conforme varía el ángulo de rotación θ . De interés especial son los valores máximo y mínimo del momento de inercia. Estos valores se conocen como **momentos de inercia principales** y los ejes correspondientes se conocen como **ejes principales**.

Ejes principales

Para determinar los valores del ángulo θ que hacen al momento de inercia I_{x_1} un máximo o un mínimo, derivamos con respecto a θ la expresión en el lado derecho de la ecuación (12.25) e igualamos el resultado a cero:

$$(I_x - I_y)\sin 2\theta + 2I_{xy}\cos 2\theta = 0 \quad (a)$$

Despejamos θ de esta ecuación y obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (12.30)$$

en donde θ_p denota el ángulo que define un eje principal. Este mismo resultado se obtiene si efectuamos la derivada de I_{y_1} (ecuación 12.28).

La ecuación (12.30) produce dos valores del ángulo $2\theta_p$ en el intervalo de 0 a 360° , estos valores difieren en 180° . Los valores correspondientes de θ_p difieren en 90° y definen los dos ejes principales perpendiculares. Uno de estos ejes corresponde al momento de inercia máximo y el otro corresponde al momento de inercia mínimo.

Ahora examinemos la variación en el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ conforme θ varía (consulte la ecuación 12.27). Si $\theta = 0$, obtenemos $I_{x_1y_1} = I_{xy}$, como se esperaba. Si $\theta = 90^\circ$, obtenemos $I_{x_1y_1} = -I_{xy}$. Por tanto, durante una rotación de 90° el producto de inercia cambia de signo, lo cual significa que para una orientación intermedia de los ejes, el producto de inercia debe ser igual a cero. Para determinar esta orientación, igualamos a cero $I_{x_1y_1}$ (ecuación 12.27):

$$(I_x - I_y)\sin 2\theta + 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Esta ecuación es igual que la ecuación (a), que define el ángulo θ_p con respecto a los ejes principales. Por tanto, concluimos que *el producto de inercia es cero para los ejes principales*.

En la sección 12.7 demostramos que el producto de inercia de un área con respecto a un par de ejes es igual a cero si al menos uno de los ejes es de simetría. Se deduce que si un área tiene un eje de simetría, ese eje y cualquier eje perpendicular a él constituyen un conjunto de ejes principales.

Las observaciones anteriores se pueden resumir así: (1) los ejes principales que pasan por un origen O son un par de ejes ortogonales para los cuales los momentos de inercia son un máximo y un mínimo; (2) la orientación de los ejes principales está dada por el ángulo θ_p obtenido con la ecuación (12.30); (3) el producto de inercia es cero para ejes principales y (4) un eje de simetría siempre es un eje principal.

Puntos principales

Ahora consideremos un par de ejes con origen en un punto dado O . Si existe un par *diferente* de ejes principales que pase por ese mismo punto, entonces *cada* par de ejes en ese punto es un conjunto de ejes principales. Además, el momento de inercia debe ser constante conforme se varía el ángulo θ .

La conclusión anterior se deduce de la naturaleza de la ecuación de transformación para I_{x_1} (ecuación 12.25). Dado que esta ecuación contiene funciones trigonométricas del ángulo 2θ , hay un valor máximo y un valor mínimo de I_{x_1} conforme 2θ varía a lo largo de un intervalo de 360° (o conforme θ varía a lo largo de un intervalo de 180°). Si existe un segundo máximo, entonces la única posibilidad es que I_{x_1} permanezca constante, lo cual significa que cada par de ejes es un conjunto de ejes principales y todos los momentos de inercia son iguales.

Un punto ubicado de manera que cada eje que pase por él sea un eje principal y de aquí que los momentos de inercia sean iguales para todos los ejes en el punto se denomina **punto principal**.

Una ilustración de esta situación es el rectángulo de ancho $2b$ y altura b que se muestra en la figura 12.25. Los ejes xy , con origen en el punto O , son ejes principales del rectángulo debido a que el eje y es un eje de simetría. Los ejes $x'y'$, con el mismo origen, también son ejes principales porque el producto de inercia $I_{x'y'}$ es igual a cero (debido a que los triángulos están simétricamente ubicados con respecto a los ejes x' y y'). Se deduce que cada par de ejes que pasa por O es un conjunto de ejes principales y cada momento de inercia es el mismo (e igual a $2b^4/3$). Por tanto, el punto O es un punto principal para el rectángulo. (Un segundo punto principal está ubicado donde el eje y interseca el lado superior del rectángulo.)

Un corolario útil de los conceptos descritos en los cuatro párrafos anteriores se aplica a los ejes que pasan por el centroide de un área. Considere un área con *dos pares diferentes* de ejes centroidales de manera que al menos un eje en cada par es un eje de simetría. En otras palabras, existen dos ejes de simetría diferentes que no son perpendiculares entre sí. Entonces se deduce que el centroide es un punto principal.

En la figura 12.26 se muestran dos ejemplos, un cuadrado y un triángulo equilátero. En cada caso los ejes xy son ejes centroidales principales debido a que su origen está en el centroide C y al menos uno de ellos es un eje de simetría. Además, un segundo par de ejes centroidales (los ejes $x'y'$) tiene al menos un eje de simetría. Se infiere que tanto los ejes xy como los ejes $x'y'$ son principales. Por tanto, cada eje que pasa por el centroide C es un eje principal y cada uno de ellos tiene el mismo momento de inercia.

Si un área tiene *tres ejes de simetría diferentes*, aun si dos de ellos son perpendiculares, las condiciones descritas en el párrafo anterior se cumplen automáticamente. Por tanto, si un área tiene tres o más ejes de simetría, el centroide es un punto principal y cada eje que pasa por el centroide es un eje principal y tiene el mismo momento de inercia. Estas condiciones se cumplen para un círculo, para todos los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etcétera) y para muchas otras formas simétricas.

En general, cada área plana tiene dos puntos principales. Éstos son equidistantes con respecto al centroide sobre el eje centroidal principal que tiene el momento de inercia principal mayor. Un caso especial ocurre cuando los dos momentos de inercia centroidales principales son iguales; enton-

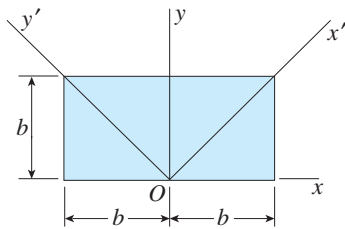
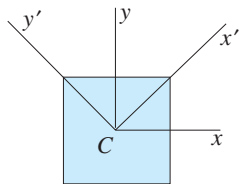
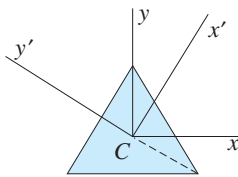


FIGURA 12.25 Rectángulo para el cual cada eje (en el plano del área) que pasa por el punto O es un eje principal.



(a)



(b)

FIGURA 12.36 Ejemplos de áreas para las cuales cada eje centroidal es un eje principal y el centroide C es un punto principal.

ces los dos puntos principales coinciden en el centroide, que se convierte en el único punto principal.

Momentos de inercia principales

Ahora determinemos los momentos de inercia principales suponiendo que I_x , I_y e I_{xy} se conocen. Un método es determinar los dos valores de θ_p (que difieren en 90°) con la ecuación (12.30) y luego sustituir estos valores en la ecuación (12.25) para I_{x_1} . Los dos valores resultantes son los momentos de inercia principales, denotados con I_1 e I_2 . La ventaja de este método es que sabemos cuál de los dos ángulos principales θ_p corresponde a cada momento de inercia principal.

También es posible obtener fórmulas generales para los momentos de inercia principales. Observamos en la ecuación (12.30) y en la figura 12.27 (que es una representación geométrica de la ecuación 12.30) que

$$\cos 2\theta_p = \frac{I_x - I_y}{2R} \quad \text{sen } 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{R} \quad (12.31a,b)$$

en donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (12.32)$$

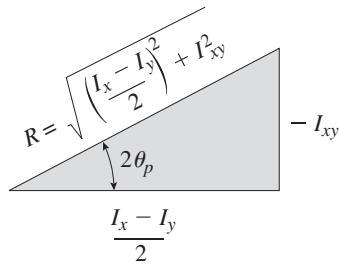


FIGURA 12.27 Representación geométrica de la ecuación (12.30).

es la hipotenusa del triángulo. Al evaluar R , siempre tomamos la raíz cuadrada positiva.

Ahora sustituimos las expresiones para $\cos 2\theta_p$ y $\text{sen } 2\theta_p$ (de las ecuaciones 12.31a y b) en la ecuación (12.25) para I_{x_1} y obtenemos el mayor algebraicamente de los dos momentos de inercia principales, denotado con el símbolo I_1 :

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (12.33a)$$

El momento de inercia principal menor, denotado con I_2 , se puede obtener con la ecuación

$$I_1 + I_2 = I_x + I_y$$

(consulte la ecuación 12.29). Al sustituir la expresión para I_1 en esta ecuación y despejando I_2 , obtenemos

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (12.33b)$$

Las ecuaciones (12.33a) y (12.33b) proporcionan una forma conveniente para calcular los momentos de inercia principales.

El ejemplo siguiente ilustra el método para localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia principales.

Ejemplo 12.7

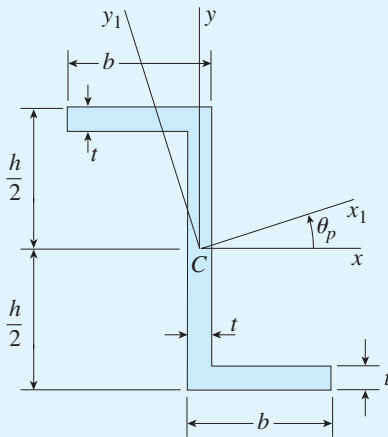


FIGURA 12.28 Ejemplo 12.7. Ejes principales y momentos de inercia principales para una sección Z.

Determine las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes de los momentos de inercia centroidales principales para el área de la sección transversal de la sección Z que se muestra en la figura 12.28. Utilice los datos numéricos siguientes: altura $h = 200$ mm, ancho $b = 90$ mm y espesor constante $t = 15$ mm.

Solución

Utilicemos los ejes xy (figura 12.28) como los ejes de referencia que pasan por el centroide C . Los momentos y el producto de inercia con respecto a estos ejes se pueden obtener al dividir el área en tres rectángulos y emplear los teoremas de los ejes paralelos. Los resultados de esos cálculos son:

$$I_x = 29.29 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 5.667 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -9.366 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Al sustituir estos valores en la ecuación para el ángulo θ_p (ecuación 12.30), obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0.7930 \quad 2\theta_p = 38.4^\circ \text{ y } 218.4^\circ$$

Por tanto, los dos valores de θ_p son

$$\theta_p = 19.2^\circ \text{ y } 109.2^\circ$$

Al utilizar estos valores de θ_p en la ecuación de transformación para I_{x_1} (ecuación 12.25), obtenemos $I_{x_1} = 32.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$ y $2.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$, respectivamente. Estos mismos valores se obtienen si sustituimos en las ecuaciones (12.33a) y (12.33b). Entonces, los momentos de inercia principales y los ángulos con respecto a los ejes principales correspondientes son

$$I_1 = 32.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \theta_{p_1} = 19.2^\circ \quad \leftarrow$$

$$I_2 = 2.4 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \theta_{p_2} = 109.2^\circ \quad \leftarrow$$

Los ejes principales se muestran en la figura 12.28 como los ejes x_1y_1 .

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 12

Centroides de áreas

Los problemas de la sección 12.2 se deben resolver por integración.

12.2.1 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un triángulo rectángulo con base b y altura h (consulte el caso 6, apéndice D).

12.2.2 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un trapecioide con bases a y b , y altura h (consulte el caso 8, apéndice D).

12.2.3 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un semicírculo con radio r (consulte el caso 10, apéndice D).

12.2.4 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un tímpano parabólico con base b y altura h (consulte el caso 18, apéndice D).

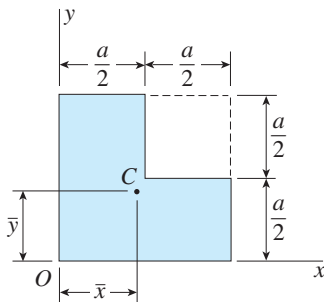
12.2.5 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un semisegmento de grado n -ésimo con base b y altura h (consulte el caso 19, apéndice D).

Centroides de áreas compuestas

Los problemas de la sección 12.3 se deben resolver empleando las fórmulas para áreas compuestas.

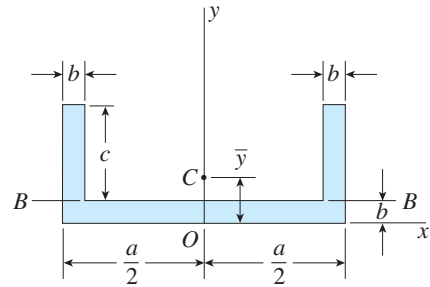
12.3.1 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un trapecioide con bases a y b , y altura h (consulte el caso 8, apéndice D) al dividir el trapecioide en dos triángulos.

12.3.2 Se quita la cuarta parte de un cuadrado con lado a (consulte la figura). ¿Cuáles son las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área restante?



PROBS. 12.3.2 y 12.5.2

12.3.3 Calcule la distancia \bar{y} al centroide C de la sección en canal que se muestra en la figura si $a = 6$ in, $b = 1$ in y $c = 2$ in.

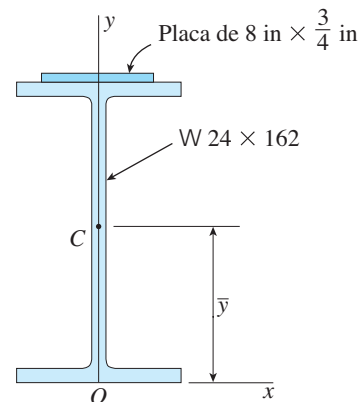


PROBS. 12.3.3, 12.3.4 y 12.5.3

12.3.4 ¿Cuál debe ser la relación entre las dimensiones a , b y c de la sección en canal que se muestra en la figura a fin de que el centroide C se encuentre sobre la línea BB' ?

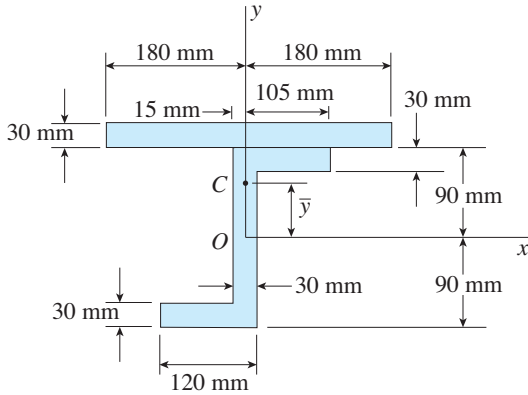
12.3.5 En la figura se muestra la sección transversal de una viga construida con una sección $W 24 \times 162$ de patín ancho y una cubreplaca de 8 in \times $3/4$ in soldada al patín superior.

Determine la distancia \bar{y} desde la base de la viga hasta el centroide C del área de la sección transversal.



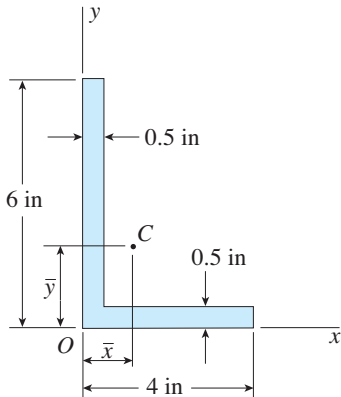
PROBS. 12.3.5 y 12.5.5

12.3.6 Determine la distancia \bar{y} al centroide C del área compuesta que se muestra en la figura.



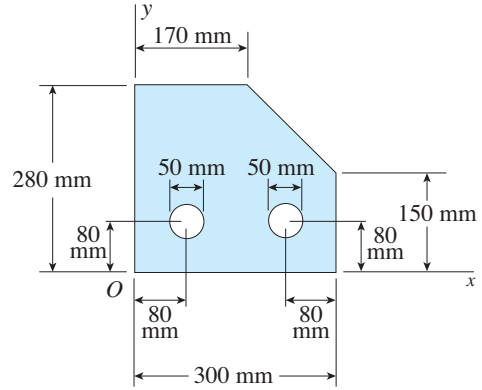
PROBS. 12.3.6, 12.5.6 y 12.7.6

12.3.7 Determine las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área en forma de L que se muestra en la figura.



PROBS. 12.3.7, 12.4.7, 12.5.7 y 12.7.7

12.3.8 Determine las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área que se muestra en la figura.



PROB. 12.3.8

Momentos de inercia

Los problemas 12.4.1 a 12.4.4 se deben resolver por integración.

12.4.1 Determine el momento de inercia I_x del triángulo con base b y altura h con respecto a su base (consulte el caso 4, apéndice D).

12.4.2 Determine el momento de inercia I_{BB} de un trapecoide con bases a y b , y altura h con respecto a su base (consulte el caso 8, apéndice D).

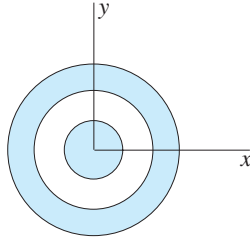
12.4.3 Determine el momento de inercia I_x de un tímpano parabólico con base b y altura h con respecto a su base (consulte el caso 18, apéndice D).

12.4.4 Determine el momento de inercia I_x de un círculo con radio r con respecto al diámetro (consulte el caso 9, apéndice D).

Los problemas 12.4.5 a 12.4.9 se deben resolver considerando el área como un área compuesta.

12.4.5 Determine el momento de inercia I_{BB} de un rectángulo con longitudes en sus lados b y h con respecto a una diagonal del rectángulo (consulte el caso 2, apéndice D).

12.4.6 Calcule el momento de inercia I_x para el área circular compuesta que se muestra en la figura. El origen de los ejes está en el centro de los círculos concéntricos y los tres diámetros son 20, 40 y 60 mm.

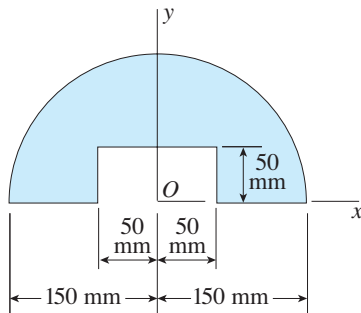


PROB. 12.4.6

12.4.7 Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y para el área en forma de L que se muestra en la figura para el problema 12.3.7.

12.4.8 Un área semicircular con radio de 150 mm tiene un recorte rectangular con dimensiones de 50 mm \times 100 mm (consulte la figura).

Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y . Además, calcule los radios de giro correspondientes r_x y r_y .



PROB. 12.4.8

12.4.9 Calcule los momentos de inercia I_1 e I_2 de una sección W 16 \times 100 de patín ancho, empleando las dimensiones transversales dadas en la tabla E.1, apéndice E. (No tome en cuenta las áreas transversales de los filetes.) Además, calcule los radios de giro correspondientes r_1 y r_2 , respectivamente.

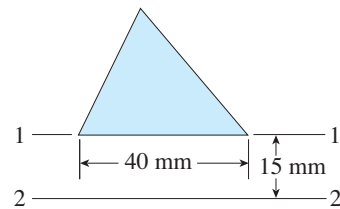
Teorema de los ejes paralelos

12.5.1 Calcule el momento de inercia I_b de una sección W 12 \times 50 de patín ancho con respecto a su base. (Utilice datos de la tabla E.1, apéndice E).

12.5.2 Determine el momento de inercia I_c con respecto a un eje que pasa por el centroide C y es paralelo al eje x para la figura geométrica descrita en el problema 12.3.2.

12.5.3 Para la sección en canal descrita en el problema 12.3.3, calcule el momento de inercia I_x con respecto a un eje que pasa por el centroide C y es paralelo al eje x .

12.5.4 El momento de inercia con respecto al eje 1-1 del triángulo escaleno que se muestra en la figura es 90×10^3 mm⁴. Calcule su momento de inercia I_2 con respecto al eje 2-2.



PROB. 12.5.4

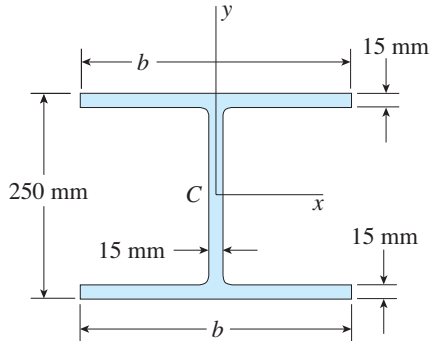
12.5.5 Para la sección transversal de la viga descrita en el problema 12.3.5, calcule los momentos de inercia centroidales I_{x_c} y I_{y_c} con respecto a los ejes que pasan por el centroide C de manera que el eje x_c sea paralelo al eje x y el eje y_c coincida con el eje y .

12.5.6 Calcule el momento de inercia I_{x_c} con respecto a un eje que pasa por el centroide C y paralelo al eje x para el área compuesta que se muestra en la figura para el problema 12.3.6.

12.5.7 Calcule los momentos de inercia centroidales I_{x_c} e I_{y_c} con respecto a ejes que pasan por el centroide C y son paralelos a los ejes x y y , respectivamente, para el área en forma de L que se muestra en la figura para el problema 12.3.7.

12.5.8 La sección transversal de la viga de patín ancho que se muestra en la figura tiene una altura total de 250 mm y un espesor constante de 15 mm.

Determine el ancho del patín b si se requiere que los momentos de inercia centroidales I_x e I_y tengan una razón de 3 a 1, respectivamente.



PROB. 12.5.8

Momentos polares de inercia

12.6.1 Determine el momento polar de inercia I_p de un triángulo isósceles con base b y altura h con respecto a su vértice (consulte el caso 5, apéndice D).

12.6.2 Determine el momento polar de inercia $(I_p)_C$ con respecto al centroide C para un sector circular (consulte el caso 13, apéndice D).

12.6.3 Determine el momento polar de inercia I_p para una sección $W 8 \times 21$ de patín ancho con respecto a una de sus esquinas exteriores.

12.6.4 Obtenga una fórmula para el momento polar de inercia I_p con respecto al punto medio de la hipotenusa para un triángulo rectángulo con base b y altura h (consulte el caso 6, apéndice D).

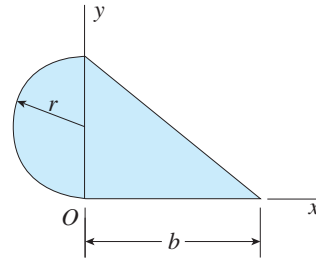
12.6.5 Determine el momento polar de inercia $(I_p)_C$ con respecto al centroide C para un tímpano de un cuadrante circular (consulte el caso 12, apéndice D).

Productos de inercia

12.7.1 Por integración determine el producto de inercia I_{xy} para el semisegmento parabólico que se muestra en la figura 12.5 (consulte también el caso 17 en el apéndice D).

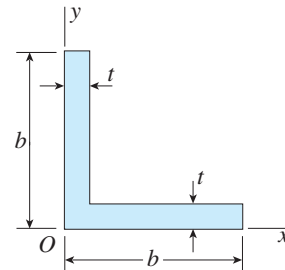
12.7.2 Por integración, determine el producto de inercia I_{xy} para el tímpano del cuadrante circular que se muestra en el caso 12, apéndice D).

12.7.3 Encuentre la relación entre el radio r y la distancia b para el área compuesta que se muestra en la figura a fin de que el producto de inercia I_{xy} sea cero.



PROB. 12.7.3

12.7.4 Obtenga una fórmula para el producto de inercia I_{xy} del área simétrica en forma de L que se muestra en la figura.



PROB. 12.7.4

12.7.5 Calcule el producto de inercia I_{12} con respecto a los ejes centroidales 1-1 y 2-2 para una sección angular $L 6 \times 6 \times 1$ in (consulte la tabla E.4, apéndice E). (No tome en cuenta las áreas transversales del filete ni de las esquinas redondeadas.)

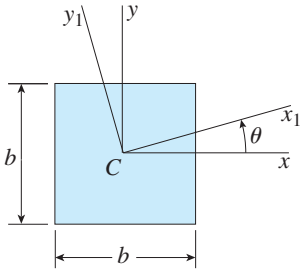
12.7.6 Calcule el producto de inercia I_{xy} para el área compuesta que se muestra en el problema 12.3.6.

12.7.7 Determine el producto de inercia $I_{x_c y_c}$ con respecto a los ejes centroidales x_c y y_c paralelos a los ejes x y y , respectivamente, para el área en forma de L que se muestra en el problema 12.3.7.

Rotación de ejes

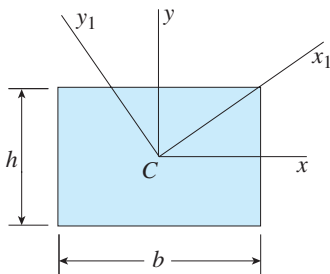
Los problemas de la sección 12.8 se deben resolver empleando las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.

12.8.1 Determine los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ para un cuadrado con lados b , como se muestra en la figura. (Observe que los ejes x_1y_1 son ejes centroidales girados un ángulo θ con respecto a los ejes xy .)



PROB. 12.8.1

12.8.2 Determine los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 para el rectángulo que se muestra en la figura. (Observe que el eje x_1 es una diagonal del rectángulo.)

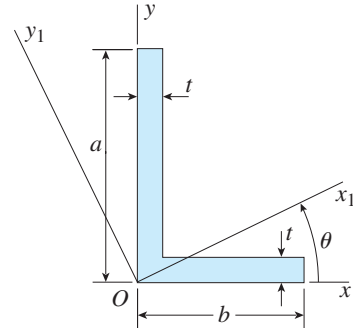


PROB. 12.8.2

12.8.3 Calcule el momento de inercia I_d para una sección W 12×50 de patín ancho con respecto a una diagonal que pasa

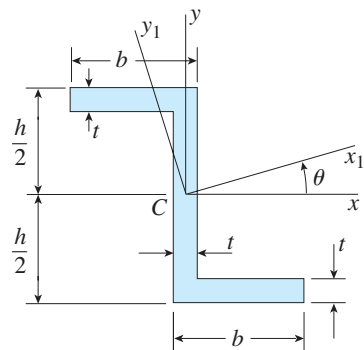
por el centroide y dos esquinas exteriores de los patines. (Utilice las dimensiones dadas en la tabla E.1.)

***12.8.4** Calcule los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes x_1y_1 para el área en forma de L que se muestra en la figura si $a = 150$ mm, $b = 100$ mm, $t = 15$ mm y $\theta = 30^\circ$.



PROBS. 12.8.4 y 12.9.4

***12.8.5** Calcule los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes x_1y_1 para la sección Z que se muestra en la figura si $b = 3$ in, $h = 4$ in, $t = 0.5$ in y $\theta = 60^\circ$.



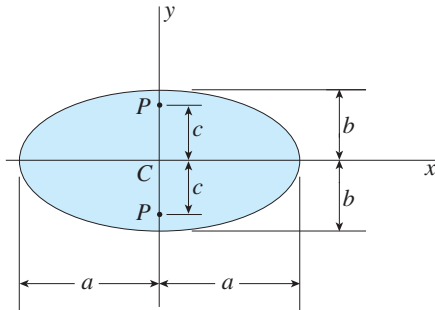
PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

***12.8.6** Resuelva el problema anterior si $b = 80$ mm, $h = 120$ mm, $t = 12$ mm y $\theta = 30^\circ$.

Ejes principales, puntos principales y momentos de inercia principales

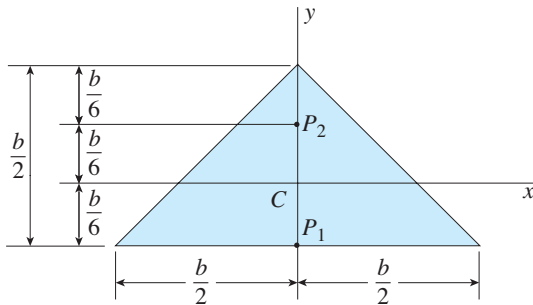
12.9.1 En la figura se muestra una elipse con eje mayor de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$.

- (a) Determine la distancia c desde el centroide C de la elipse hasta los puntos principales P sobre el eje menor (eje y).
- (b) ¿Para qué razón a/b los puntos principales se encuentran sobre la circunferencia de la elipse?
- (c) ¿Para qué razones se encuentran dentro de la elipse?



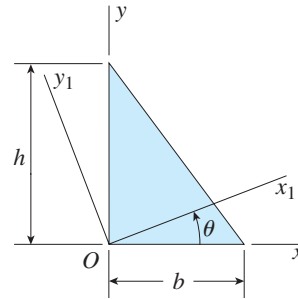
PROB. 12.9.1

12.9.2 Demuestre que los dos puntos P_1 y P_2 , ubicados como se muestran en la figura, son los puntos principales del triángulo rectángulo isósceles.



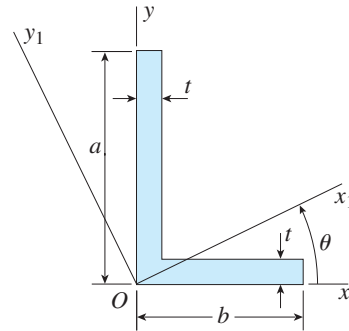
PROB. 12.9.2

12.9.3 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales a través del origen O para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura si $b = 6$ in y $h = 8$ in. Además, calcule los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 .



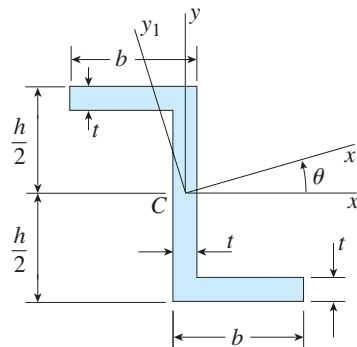
PROB. 12.9.3

12.9.4 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el origen O y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para el área con forma L descrita en el problema 12.8.4 ($a = 150$ mm, $b = 100$ mm y $t = 15$ mm).



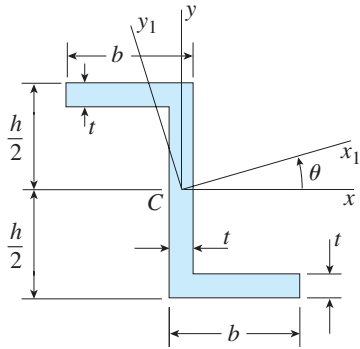
PROBS. 12.8.4 y 12.9.4

12.9.5 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el centroide C y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para la sección Z descrita en el problema 12.8.5 ($b = 3$ in, $h = 4$ in y $t = 0.5$ in).



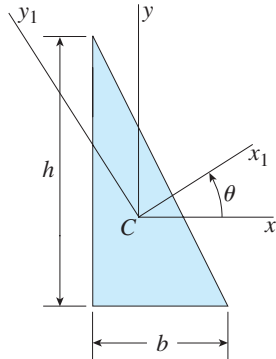
PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

12.9.6 Resuelva el problema anterior para la sección Z descrita en el problema 12.8-6 ($b = 80$ mm, $h = 120$ mm y $t = 12$ mm).



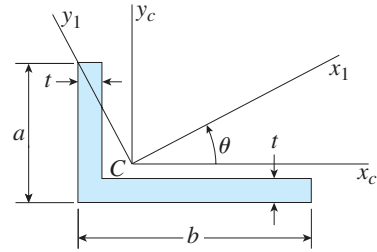
PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

12.9.7 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el centroide C para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura si $h = 2b$. Además, determine los momentos de inercia centroidales principales correspondientes I_1 e I_2 .



PROB. 12.9.7

***12.9.8** Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes centroidales principales y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para el área en forma de L que se muestra en la figura si $a = 80$ mm, $b = 150$ mm y $t = 16$ mm.



PROBS. 12.9.8 y 12.9.9

***12.9.9** Resuelva el problema anterior si $a = 3$ in, $b = 6$ in y $t = 5/8$ in.