LA CLOTOIDE

Curva de Transición en Ferrocarriles

Desarrollo matemático y aplicación práctica
en el diseño de trazados ferroviarios.

¿Por qué se necesita una curva de transición?

Discontinuidad de curvatura

Al pasar directamente de una recta (R = ∞) a un arco circular (R = cte.), la curvatura salta de 0 a 1/R de forma instantánea.

Fuerza centrífuga repentina

La aceleración lateral aparece de golpe. Los pasajeros son sacudidos bruscamente y los componentes del vehículo sufren sobrecarga.

Incompatibilidad con el peralte

El peralte (inclinación del carril exterior) debe aplicarse de forma gradual. Sin transición, es imposible coordinar su rampa con la curva.

La curva de transición resuelve los tres problemas simultáneamente.

Tipos de curvas de transición

Parábola cúbica $y = x^3 / 6RL$	Ventajas: Fácil de replantear en campo.	Limitaciones: Solo válida para ángulos pequeños (< 12°). Error creciente con el ángulo.
Lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2 \cdot \cos(2\vartheta)$	Ventajas: Curvatura proporcional al radio vector.	Limitaciones: Geometría compleja. No coincide con la rampa de peralte.
Clotoide (Espiral de Cornu) $A^2 = R \cdot L$	Ventajas: Curvatura exactamente lineal con la longitud. Coincide perfectamente con la rampa de peralte. Válida para cualquier ángulo.	✓ *Estándar ferroviario internacional*

Definición matemática de la clotoide

1. Curvatura de cualquier curva plana

$$\kappa = 1/R = d\theta/ds$$

2. Condición de linealidad (definición de clotoide)

$$\kappa = s / A^2 \quad \rightarrow \quad 1/R = s / A^2$$

3. Ángulo acumulado de la tangente

$$\varphi = \int_{s}^{s_o} \frac{s}{A^2}\, ds = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{A}\right)^2 \; ; \; d\varphi = \frac{s}{A^2}\, ds$$

4. Coordenadas (integrales de Fresnel)

$$\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_o} \rho \cos\varphi \, d\varphi \\ y &= \int_{\varphi}^{\varphi_o} \rho \sin\varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

$$x = \int_{s_0}^{s} \frac{A^2}{s} \times cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{s}{A}\right)^2\right) \times \frac{s}{A^2} ds$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \frac{A^2}{s} \times sen\left(\frac{1}{2}\left(\frac{s}{A}\right)^2\right) \times \frac{s}{A^2} ds$$

En el punto de enlace F
(s = L):

$$A^2 = R \cdot L$$

A = parámetro de escala
R = radio del arco circular
L = longitud de transición

¿De dónde sale la constante A?

1. Condición de diseño

Se impone que $1/R$ varíe linealmente con s (longitud recorrida). Esto garantiza que la fuerza centrífuga y el peralte crezcan al mismo ritmo.

2. Constante de proporcionalidad

La única forma de escribir $1/R = k \cdot s$ con unidades correctas es:
$1/R = s/A^2$ → A^2 es la constante de proporcionalidad.

3. Integración

Integrando $1/R = s/A^2$ se obtiene $\theta = s^2/(2A^2)$. Eso da las coordenadas $x(s)$ e $y(s)$ como integrales de Fresnel, con A^2 dentro del argumento.

4. Resultado en el punto F

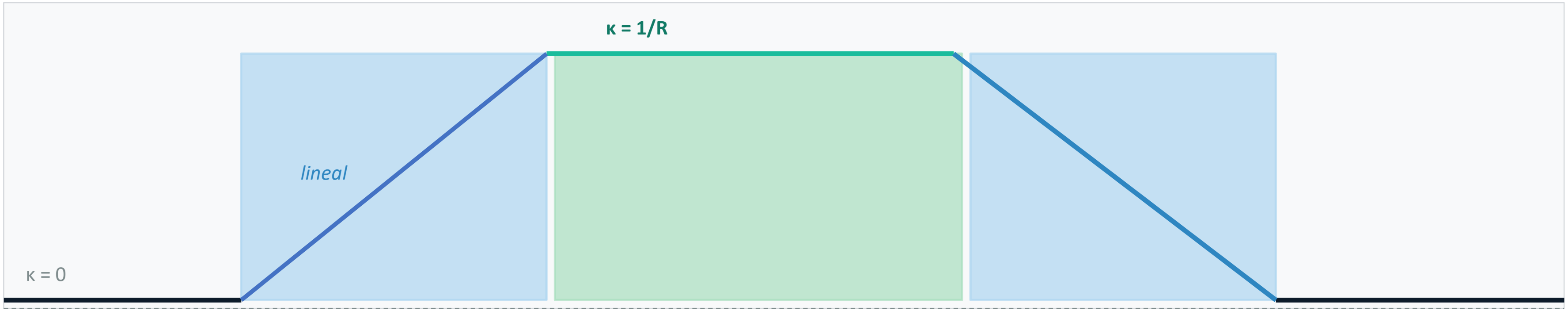
Al llegar al radio de proyecto R con longitud L: $R \cdot L = A^2$
A no se elige libremente — queda determinado por R y L.

$A = \sqrt{(R \cdot L)}$ → se calcula una vez definidos R y L en el proyecto.

Geometría en planta del trazado

Recta (R = ∞)	**Clotoide (R varía)**	Arco circular (R = cte.)	**Clotoide (R varía)**	Recta (R = ∞)

Variación de curvatura (1/R) a lo largo del trazado:



Datos de diseño:

Variable	Símbolo	Unidad
Radio de curvatura	R	m

Coincidencia con la rampa de peralte

Peralte h

Diferencia de altura entre carriles exterior e interior. Compensa la fuerza centrífuga.

$h = V^2 \cdot e / (g \cdot R)$

Rampa de peralte

El peralte debe crecer de forma lineal a lo largo de la transición para evitar efectos de torsión brusca.

$dh/ds = cte.$

Clotoide: 1/R lineal

Como la fuerza centrífuga es proporcional a 1/R, y la clotoide hace que 1/R varíe linealmente, la rampa de peralte puede ser exactamente proporcional a s.

$1/R = s/A^2 \rightarrow h \propto s$

Clave

La clotoide es la única curva donde la variación de curvatura es exactamente lineal en toda su longitud, no solo para ángulos pequeños.

Esto la hace compatible de forma natural con la rampa de peralte lineal exigida por las normativas ferroviarias.

Curvatura ∝ Peralte ∝ Longitud

Ejemplo numérico

Diseño de una transición para una curva ferroviaria de alta velocidad:

$R = 3\,000$ m · $V = 200$ km/h · Peralte máximo = 150 mm · Rampa de peralte = 1 mm/m

1 **Longitud mínima por rampa de peralte**

$L \geq h_{max} / \text{rampa} = 150 \text{ mm} / (1 \text{ mm/m}) = 150 \text{ m}$

$L = 150$ m

2 **Parámetro de la clotoide**

$A = \sqrt{(R \cdot L)} = \sqrt{(3\,000 \times 150)} = \sqrt{450\,000}$

$A = 671$ m

3 **Verificación de curvatura al inicio**

$\kappa(0) = 0/A^2 = 0 \rightarrow$ inicio en recta ✓

$\kappa_0 = 0$

4 **Curvatura al final de la transición**

$\kappa(L) = L/A^2 = 150/450\,000 = 1/3\,000$

$\kappa_F = 1/R$ ✓

Resumen

$\kappa \propto s$

Linealidad exacta

La curvatura 1/R varía linealmente con la longitud s, no solo de forma aproximada.

$\int$Fresnel

Integrales de Fresnel

Las coordenadas x(s) e y(s) se obtienen de las integrales de Fresnel con parámetro A.

$A^2=RL$

Ecuación fundamental

$A^2 = R \cdot L$ conecta el radio de diseño, la longitud de transición y la forma de la espiral.

$h \propto s$

Compatibilidad con peralte

Curvatura y peralte varían al mismo ritmo: la clotoide es la solución natural.

EN 13803

Estándar internacional

Adoptada por las normativas ferroviarias europeas (EN 13803) y latinoamericanas.

$A=\sqrt{RL}$

Diseño práctico

Dados R y L, el parámetro A se calcula directamente: $A = \sqrt{(R \cdot L)}$.

La Clotoide

Curva de Transición Ferroviaria

Gracias

$$A^2 = R \cdot L$$

la elegancia de
la ingeniería ferroviaria