Trabajo Práctico 3.1: Transformaciones Lineales

1. En cada una de las siguientes funciones determina si es o no una transformación lineal. Completa el conjunto dominio y/o codominio en los casos donde falte.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y, z) = (2x - z, y)$

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2} \quad T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 2c & a \end{bmatrix}$

   c) $T : ..... \to ...... \quad T(x, y, z) = x + 2z$

   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y) = (2x - 1, y)$

   e) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad T(u) = A_{m\times n} \quad u$

   f) $T : P_2 \to ..... \quad T(ax^2 + bx + c) = (a, b - c)$

   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x, y) = (\sqrt[2]{x}, y, 2x)$

   h) $T : ..... \to P_2 \quad T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \text{a x}^3 + (3b - c)$

2. Para las funciones del ejercicio 1 que sean transformaciones lineales:

   a) Determine el núcleo y la imagen. Para el ítem e) considere A= $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo. En caso de ser posible, interprete geométricamente dichos espacios vectoriales.

   c) Encuentre una base y la dimensión de la imagen. Verifique el teorema de la dimensión en cada caso.

   d) Clasifique las transformaciones según sean endomorfismo, monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

3. ¿Qué estructura tiene el conjunto núcleo y el conjunto imagen de una Transformación Lineal? Comprueba que el conjunto núcleo del ítem c del punto 1, es un sub espacio de $\mathbb{R}^3$

4. Sea R el triángulo con vértices en $(0, 0); (-1, 2); (3, 1)$. ¿Cuál es la imagen de R bajo la multiplicación por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$? Grafica a R y su imagen. ¿Qué nombre recibe dicha transformación? ¿Puedes determinar a partir del gráfico el conjunto núcleo e imagen de la transformación?

5. Actividad grupal: Sabiendo que T es una transformación lineal y que:

   $\text{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ y π : x-3y+5z=0

   a) Analiza si el vector T(2,4) pertenece a π.

   b) ¿Cómo harías para determinar si T transforma vectores de $\mathbb{R}^2$ en el plano π?

6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y supóngase que

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

   a) Halle la transformación de $(-1, 1)$.

b) Encuentre la ley de la transformación lineal.

c) Elija un vector de $\mathbb{R}^3$ y determine su preimagen.

7. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   a) Si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces puede ocurrir que $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4$.

   b) Si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces la dimensión de la imagen de T es como máximo 4.

   c) Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal, entonces la nulidad de T puede ser 0.

   d) La función derivación es una transformación lineal.

   e) La función integración es una transformación lineal.

   f) Si T es una transformación lineal tal que $T(X) = AX$, siendo $A_{3\times3}$ una matriz fija, tal que $\mathrm{N}(T) = \{0\}$, entonces A es no invertible.

8. Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

   a) Sean las proposiciones p: *" el transformado del vector nulo del dominio es igual al vector nulo del* ***codominio****"* y q: *"T sea transformación lineal"*. Escriba entre ellas una implicación que siempre sea verdadera ....

   b) La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x, y)$ tiene por imagen el espacio generado por el conjunto ....

   c) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x) = A \cdot x$, entonces los posibles valores del rango de T son ...

   d) El núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es .... y $\mathrm{Im}(T) =$ ....

   e) El operador lineal en $\mathbb{R}^2$ reflexión respecto al eje de ordenadas representado en forma matricial es ....