

Trabajo Práctico 3.2: Matriz Asociada

Ejercicio 1. Encuentre la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales:

- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x, z + y)$
- b) $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(ax^2 + bx + c) = (2a, -b + c, -c)$
- c) $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & 2c & 0 \\ 0 & -a & c \\ -b & b & -b \end{bmatrix}$
- d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (-x, 0, 0)$
- e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & -y \\ x & y & 0 \end{bmatrix}$
- f) $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(ax^2 + bx + c) = (b, -c)$
- g) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$, $T(a, b, c) = (2a)x^2 - bx - b$

Ejercicio 2. Encuentre la imagen de los siguientes vectores

- a) $T(2x^2 - x + 3)$, utilizando la transformación matricial del ejercicio 1b y 1c.
- b) $T(1, -3, 4)$, utilizando la transformación matricial del ejercicio 1g.

Ejercicio 3. Complete los siguientes enunciados:

- a) Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, el orden de la matriz asociada es _____.
- b) Si la matriz asociada a una transformación lineal es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces la transformación lineal es $T : P_{\dots} \rightarrow \mathbb{R}^{\dots}$.

- c) Si el rango de una matriz A de orden 3, asociada a una transformación lineal, es 2, entonces la nulidad de T es _____ y el rango de T es _____.
- d) Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es monomorfismo, entonces el rango de la matriz asociada a T es _____.

Ejercicio 4.

- a) Halle la matriz asociada a $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x, -y)$, considerando la base $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ en el dominio y la base $B' = \{(1, 0), (0, -1)\}$ en el codominio.
- b) Halle la matriz asociada a $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (-x, x + y, 2x)$, considerando la base $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ en el dominio y la base $B' = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ en el codominio.

Ejercicio 5. Encuentre la matriz de pasaje:

- a) De la base $B = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ a la base $B' = \{(1, 0), (0, 2)\}$. ¿Qué transformación lineal debe utilizar?
- b) De la base $B = \{(1, -1), (0, 2)\}$ a la base $B' = \{(1, 0), (1, -1)\}$.
- c) De la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ a la base $B' = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 1, 2)\}$.
- d) De la base $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ a la base $B' = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Ejercicio 6.

- a) Encuentre la matriz estándar A de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-x, 3y)$.
- b) Encuentre la matriz asociada M de la transformación anterior respecto a la base $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ en dominio y codominio.
- c) Encuentre la matriz de pasaje P' de la base canónica al conjunto de partida a la base B en el conjunto de llegada.
- d) Encuentre la matriz de pasaje P de la base B en el conjunto de partida a la base canónica en el conjunto de llegada.
- e) Analice:
- 1) ¿Qué relación existe entre P' y P ?
 - 2) A partir de $P'AP$, ¿qué relación existe entre A y M ?
- f) Calcule $T(3, -2)$ utilizando A y M . Extraiga conclusiones.

Ejercicio 6.1. Halle la matriz estándar A de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (-3x, x + y, -y)$. Luego halle la matriz M respecto a $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$ en el dominio y $B' = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, -1)\}$ en el codominio. ¿Se podrá encontrar M a partir de A mediante matrices de pasaje? ¿ A y M serán semejantes?

Ejercicio 7.

- a) Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ asociada a una transformación lineal respecto a $B = \{(1, -1), (2, 1)\}$ y $B' = \{(0, 1), (-1, 1)\}$. Encuentre la matriz estándar A .
- b) Sea $G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ asociada a una transformación respecto a $B = \{(0, -1), (1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. Encuentre la matriz estándar A .
- c) Sea $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ asociada a una transformación respecto a $B = \{(1, -1), (-1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 0), (0, -1)\}$. Encuentre la matriz estándar A .

Ejercicio 8. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) Si la matriz asociada A de una transformación lineal es la matriz nula de orden 3, entonces la nulidad es 0.
- b) Si A y M son semejantes e inversibles, entonces A^{-1} es semejante a M^{-1} .
- c) Si A y M tienen el mismo determinante, entonces A y M son semejantes.
- d) La matriz de pasaje de $\{(2, 1), (0, 1)\}$ a $\{(1, 0), (0, -1)\}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- e) Si A y B son matrices asociadas a una misma transformación lineal, entonces A y B son semejantes.