

# Ejercicios resueltos — Transformaciones lineales, imagen y núcleo

Versión desarrollada

Material asincrónico basado en el Trabajo Práctico 3.1

Ejercicios 6, 7(b) y 7(f)

## Cómo leer este material

Este material desarrolla algunos ejercicios seleccionados del Trabajo Práctico 3.1 sobre transformaciones lineales. Está pensado para estudiar de manera autónoma, por eso cada resolución se presenta con más detalle que una solución usual.

En cada bloque vamos a separar:

- qué dato da el ejercicio;
- qué concepto teórico se usa;
- cómo se organiza la resolución;
- qué errores conviene evitar.

No conviene leer solamente las cajas de resultado final. Lo importante es seguir el camino:

datos  $\rightarrow$  herramienta  $\rightarrow$  resolución  $\rightarrow$  interpretación.

## Mapa de los ejercicios

Ejercicio	Tema principal	Idea clave
6	Transformación conocida en una base	Reconstruir $T$ usando linealidad
7(b)	Dimensión de la imagen	$\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(V)$
7(f)	Núcleo trivial e invertibilidad	$N(T) = \{0\} \Rightarrow A$ invertible

## Idea general

Todos estos ejercicios giran alrededor de tres preguntas:

¿qué conserva  $T$ ?

¿qué produce  $T$ ?

¿qué manda  $T$  al cero?

## Herramientas mínimas

### Herramienta 1: linealidad

Sea  $T : V \rightarrow W$ . Decimos que  $T$  es una transformación lineal si, para todo  $u, v \in V$  y todo  $c \in \mathbb{R}$ , se cumple

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(cu) = cT(u).$$

### Traducción

Una transformación lineal respeta sumas y múltiplos escalares. Es decir, si primero sumamos en el dominio y después aplicamos  $T$ , obtenemos lo mismo que si aplicamos  $T$  a cada vector y luego sumamos en el codominio.

### Herramienta 2: imagen de una combinación lineal

A partir de la linealidad se obtiene que

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_pT(v_p).$$

### Herramienta 2: núcleo

El núcleo de una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  es

$$N(T) = \text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}.$$

### Traducción

El núcleo es el conjunto de todos los vectores del dominio que su imagen es el cero del codominio. En particular,

$$N(T) \subseteq V.$$

El núcleo vive en el dominio.

### Herramienta 4: imagen

La imagen de una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  es

$$\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\}.$$

### Traducción

$$\boxed{\text{Im}(T) = \text{todo lo que la transformación puede producir.}}$$

La primera escritura sirve para decidir si un vector  $w$  pertenece a la imagen: hay que preguntarse si existe una preimagen  $v$  tal que  $T(v) = w$ . La segunda escritura sirve para construir la imagen: se miran todos los valores posibles  $T(v)$ .

### Herramienta 5: teorema de la dimensión

Para una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  se cumple

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(V).$$

También puede escribirse como

$$\text{rg}(T) + \text{null}(T) = \dim(V).$$

## Ejercicio 6

**Enunciado.** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal y supóngase que

$$T(-1, 3) = (-2, -4, 2), \quad T(0, -1) = (0, 1, -1).$$

Se pide:

- hallar  $T(-1, 1)$ ;
- encontrar la ley de la transformación lineal;
- elegir un vector de  $\mathbb{R}^3$  y determinar su preimagen.

### Idea central

Si conocemos  $T$  sobre una base de  $\mathbb{R}^2$ , podemos conocer  $T$  sobre cualquier vector de  $\mathbb{R}^2$ .

La razón es que cualquier vector del dominio se puede escribir como combinación lineal de los vectores de una base, y una transformación lineal respeta combinaciones lineales.

Es decir, si

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

entonces

$$T(v) = T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2).$$

### Paso 1: identificar los vectores conocidos

El ejercicio nos da las imágenes de dos vectores del dominio:

$$v_1 = (-1, 3), \quad v_2 = (0, -1).$$

Y conocemos:

$$T(v_1) = T(-1, 3) = (-2, -4, 2),$$

$$T(v_2) = T(0, -1) = (0, 1, -1).$$

Visualmente:

$$(-1, 3) \xrightarrow{T} (-2, -4, 2), \quad (0, -1) \xrightarrow{T} (0, 1, -1).$$

### Pregunta clave

¿Alcanza conocer  $T$  en estos dos vectores para conocer  $T$  en todo  $\mathbb{R}^2$ ?

La respuesta es sí, pero porque esos dos vectores forman una base de  $\mathbb{R}^2$ . No alcanza con conocer  $T$  en dos vectores cualquiera.

### Paso 2: verificar que los vectores dados forman una base

Queremos ver si

$$B = \{(-1, 3), (0, -1)\}$$

es una base de  $\mathbb{R}^2$ .

Como son dos vectores en  $\mathbb{R}^2$ , basta verificar que sean linealmente independientes. Una forma rápida es calcular el determinante de la matriz que los tiene como columnas:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) - 0 \cdot 3 = 1.$$

Como

$$1 \neq 0,$$

los vectores son linealmente independientes. Por lo tanto,

$$B = \{(-1, 3), (0, -1)\} \text{ es una base de } \mathbb{R}^2.$$

### Comentario didáctico

Conocer  $T$  sobre una base alcanza para reconstruir toda la transformación, porque cualquier vector  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se puede escribir de manera única como combinación lineal de los vectores de esa base.

### Paso 3: escribir un vector genérico como combinación de la base

Queremos encontrar la ley de  $T$ . Para eso tomamos un vector genérico

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como  $B = \{(-1, 3), (0, -1)\}$  es base, existen escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que

$$(x, y) = \alpha(-1, 3) + \beta(0, -1).$$

### Plan

$$(x, y) \longrightarrow \text{lo escribimos en la base dada} \longrightarrow \text{aplicamos } T \text{ usando linealidad}$$

Ahora hacemos la cuenta:

$$\alpha(-1, 3) = (-\alpha, 3\alpha), \quad \beta(0, -1) = (0, -\beta).$$

Entonces

$$\alpha(-1, 3) + \beta(0, -1) = (-\alpha, 3\alpha) + (0, -\beta).$$

Sumando coordenada a coordenada:

$$\alpha(-1, 3) + \beta(0, -1) = (-\alpha, 3\alpha - \beta).$$

Por lo tanto,

$$(x, y) = (-\alpha, 3\alpha - \beta).$$

Dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  son iguales si coinciden coordenada a coordenada. Entonces:

$$\begin{cases} x = -\alpha, \\ y = 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -x.$$

Sustituimos  $\alpha = -x$  en la segunda ecuación:

$$y = 3(-x) - \beta = -3x - \beta.$$

Despejamos  $\beta$ :

$$\beta = -3x - y.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\alpha = -x, \quad \beta = -3x - y.}$$

### Interpretación

Los números  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas de  $(x, y)$  en la base dada:

$$(x, y) = (-x)(-1, 3) + (-3x - y)(0, -1).$$

Este paso es el corazón del ejercicio.

### Paso 4: aplicar la transformación lineal

Como

$$(x, y) = (-x)(-1, 3) + (-3x - y)(0, -1),$$

aplicamos  $T$  a ambos lados:

$$T(x, y) = T((-x)(-1, 3) + (-3x - y)(0, -1)).$$

Ahora usamos que  $T$  es lineal:

$$T(x, y) = (-x)T(-1, 3) + (-3x - y)T(0, -1).$$

Sustituimos los datos del enunciado:

$$T(x, y) = (-x)(-2, -4, 2) + (-3x - y)(0, 1, -1).$$

Calculamos cada parte por separado:

$$(-x)(-2, -4, 2) = (2x, 4x, -2x),$$

$$(-3x - y)(0, 1, -1) = (0, -3x - y, 3x + y).$$

Entonces:

$$T(x, y) = (2x, 4x, -2x) + (0, -3x - y, 3x + y).$$

Sumamos coordenada a coordenada:

$$T(x, y) = (2x, 4x - 3x - y, -2x + 3x + y).$$

Simplificando:

$$T(x, y) = (2x, x - y, x + y).$$

### Resultado del inciso b)

$$\boxed{T(x, y) = (2x, x - y, x + y).}$$

### Mini chequeo 1: verificar que la ley respeta los datos

Con la ley encontrada:

$$T(-1, 3) = (2(-1), -1 - 3, -1 + 3) = (-2, -4, 2),$$

$$T(0, -1) = (2 \cdot 0, 0 - (-1), 0 + (-1)) = (0, 1, -1).$$

La fórmula reproduce correctamente los valores dados.

### Paso 5: resolver el inciso a)

Queremos hallar  $T(-1, 1)$ . Como ya tenemos la ley,

$$T(x, y) = (2x, x - y, x + y),$$

sustituimos  $x = -1$  e  $y = 1$ :

$$T(-1, 1) = (2(-1), -1 - 1, -1 + 1).$$

Por lo tanto:

$$T(-1, 1) = (-2, -2, 0).$$

### Resultado del inciso a)

$$T(-1, 1) = (-2, -2, 0).$$

### Otra forma de resolver el inciso a)

También se puede hallar  $T(-1, 1)$  sin encontrar primero toda la ley. Buscamos

$$(-1, 1) = \alpha(-1, 3) + \beta(0, -1).$$

Como antes,

$$\alpha(-1, 3) + \beta(0, -1) = (-\alpha, 3\alpha - \beta).$$

Entonces:

$$(-1, 1) = (-\alpha, 3\alpha - \beta).$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} -1 = -\alpha, \\ 1 = 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

De la primera ecuación,  $\alpha = 1$ . Luego,

$$1 = 3(1) - \beta \Rightarrow \beta = 2.$$

Por lo tanto,

$$(-1, 1) = 1(-1, 3) + 2(0, -1).$$

Aplicando linealidad:

$$T(-1, 1) = T(-1, 3) + 2T(0, -1).$$

Entonces:

$$T(-1, 1) = (-2, -4, 2) + 2(0, 1, -1) = (-2, -2, 0).$$

### ¿Cuándo conviene cada forma?

Para hallar un valor puntual, basta descomponer ese vector. Para hallar la ley de la transformación, hay que descomponer un vector genérico  $(x, y)$ .

### Paso 6: preparar el inciso c)

El inciso c) pide elegir un vector de  $\mathbb{R}^3$  y determinar su preimagen. Antes de elegir un vector, hay que aclarar algo importante.

La transformación es

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Entonces:

- el dominio es  $\mathbb{R}^2$ ;
- el codominio es  $\mathbb{R}^3$ ;
- la imagen está dentro de  $\mathbb{R}^3$ , pero no necesariamente es todo  $\mathbb{R}^3$ .

Es decir,

$$\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3,$$

pero no siempre

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3.$$

### Preimagen

Un vector  $w \in \mathbb{R}^3$  tiene preimagen si existe algún  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x, y) = w.$$

En otras palabras,

$$w \text{ tiene preimagen} \iff w \in \text{Im}(T).$$

### Paso 7: describir la imagen de esta transformación

Como

$$T(x, y) = (2x, x - y, x + y),$$

un vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  está en la imagen si existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$(a, b, c) = (2x, x - y, x + y).$$

Luego

$$\begin{cases} 2x = a, \\ x - y = b, \\ x + y = c. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible se tiene que todo vector de la imagen cumple con  $a = b + c$ . Por lo tanto,

$$\boxed{\text{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}.$$

### Interpretación geométrica

La condición  $a = b + c$  describe un plano que pasa por el origen en  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, la imagen no es todo  $\mathbb{R}^3$ , sino un plano dentro de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Paso 8: elegir un vector con preimagen

Para evitar elegir un vector que no tenga preimagen, elegimos uno que cumpla la condición  $a = b + c$ . Por ejemplo:

$$w = (2, -1, 3).$$

Verificamos:

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 3.$$

Entonces:

$$b + c = -1 + 3 = 2 = a.$$

Por lo tanto,

$$(2, -1, 3) \in \text{Im}(T),$$

y tiene preimagen.

#### Paso 9: hallar la preimagen de $(2, -1, 3)$

Queremos encontrar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x, y) = (2, -1, 3).$$

Como

$$T(x, y) = (2x, x - y, x + y),$$

planteamos

$$(2x, x - y, x + y) = (2, -1, 3).$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ x - y = -1, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = 1.$$

Usamos la segunda:

$$1 - y = -1 \quad \Rightarrow \quad -y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Verificamos con la tercera:

$$x + y = 1 + 2 = 3.$$

Entonces:

$$T(1, 2) = (2, -1, 3).$$

### Resultado del inciso c)

Elegimos el vector

$$w = (2, -1, 3).$$

Como

$$T(1, 2) = (2, -1, 3),$$

una preimagen de  $w$  es

$$\boxed{(1, 2)}.$$

### Comentario sobre unicidad

En este ejemplo, la preimagen encontrada es única. Si

$$T(x, y) = (0, 0, 0),$$

entonces

$$(2x, x - y, x + y) = (0, 0, 0).$$

De  $2x = 0$  resulta  $x = 0$ , y luego de  $x - y = 0$  resulta  $y = 0$ . Por lo tanto,

$$N(T) = \{(0, 0)\} = \{(0, 0)\}.$$

No hace falta usar esto para resolver el inciso c), pero ayuda a entender qué está pasando.

### No confundir codominio con imagen

En este ejercicio el codominio es  $\mathbb{R}^3$ , pero la imagen es

$$\text{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3.$$

### Resumen del ejercicio 6

$$\boxed{T(x, y) = (2x, x - y, x + y)}.$$

$$\boxed{T(-1, 1) = (-2, -2, 0)}.$$

$$\boxed{(2, -1, 3) \in \text{Im}(T) \text{ y una preimagen es } (1, 2)}.$$

$$\boxed{\text{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}}.$$

$$\boxed{N(T) = \{(0, 0)\} = \{(0, 0)\}}.$$

### Mini chequeo para estudiar solo

1. ¿Por qué los vectores  $(-1, 3)$  y  $(0, -1)$  forman una base de  $\mathbb{R}^2$ ?
2. Usando la ley encontrada, verificá  $T(-1, 3) = (-2, -4, 2)$  y  $T(0, -1) = (0, 1, -1)$ .
3. Decidí si  $(1, 1, 1)$  tiene preimagen. Ayuda: debe cumplirse  $a = b + c$ .

## Ejercicio 7(b)

**Enunciado.** Si  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$  es una transformación lineal, entonces la dimensión de la imagen de  $T$  es como máximo 4.

Queremos decidir si esta proposición es verdadera o falsa.

### Idea clave

La imagen no puede tener más direcciones independientes que el dominio.

La transformación recibe vectores de  $\mathbb{R}^4$ . Eso significa que el dominio tiene dimensión 4. Aunque los vectores transformados viven en  $\mathbb{R}^7$ , no pueden generar más de 4 direcciones independientes, porque salen de un espacio que originalmente solo tiene 4 grados de libertad.

### Codominio grande no significa imagen grande

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^7.$$

El codominio es  $\mathbb{R}^7$ , pero la imagen es solo lo que efectivamente se puede producir:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in \mathbb{R}^4\}.$$

### Primera justificación: teorema de la dimensión

Para una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$ , el teorema de la dimensión dice:

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(V).$$

En este caso,

$$V = \mathbb{R}^4, \quad \dim(V) = 4.$$

Por lo tanto,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = 4.$$

Ahora usamos que la dimensión del núcleo no puede ser negativa:

$$\dim(N(T)) \geq 0.$$

Entonces necesariamente

$$\dim(\text{Im}(T)) \leq 4.$$

### Conclusión

La proposición es verdadera.

### Segunda justificación: imagen de una base

La base canónica de  $\mathbb{R}^4$  tiene cuatro vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Todo vector  $v \in \mathbb{R}^4$  puede escribirse como

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4.$$

Como  $T$  es lineal,

$$T(v) = a_1T(e_1) + a_2T(e_2) + a_3T(e_3) + a_4T(e_4).$$

Por lo tanto,

$$\text{Im}(T) = \text{gen}\{T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\}.$$

Un espacio generado por cuatro vectores tiene dimensión como máximo 4.

#### Comentario didáctico

Aunque  $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$  son vectores de  $\mathbb{R}^7$ , siguen siendo solamente cuatro vectores. Un conjunto generado por cuatro vectores puede tener dimensión 0, 1, 2, 3 o 4, pero nunca 5, 6 o 7.

#### Respuesta final del 7(b)

Verdadero.

Justificación breve:

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4.$$

Como  $\dim(N(T)) \geq 0$ , se concluye que

$$\dim(\text{Im}(T)) \leq 4.$$

#### Mini chequeo: cambiar los números para entender la idea

Supongamos ahora que

$$T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

es una transformación lineal.

1. ¿Cuál es el máximo valor posible de  $\dim(\text{Im}(T))$ ?
2. Si además se sabe que  $\dim(N(T)) = 2$ , ¿cuánto vale  $\dim(\text{Im}(T))$ ?
3. ¿Puede ocurrir que  $\dim(\text{Im}(T)) = 6$ ? ¿Qué lo impide?
4. ¿Puede ocurrir que  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^5$ ?

**Respuestas esperadas.** Como

$$\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^5,$$

se tiene

$$\dim(\text{Im}(T)) \leq 5.$$

Además, por el teorema de la dimensión,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(\mathbb{R}^7) = 7.$$

Si  $\dim(N(T)) = 2$ , entonces

$$\dim(\text{Im}(T)) = 5.$$

Por eso no puede ocurrir que  $\dim(\text{Im}(T)) = 6$ : lo impide el codominio, porque la imagen es un subespacio de  $\mathbb{R}^5$ . En cambio, sí puede ocurrir que  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^5$ , porque en ese caso  $\dim(\text{Im}(T)) = 5$ .

## Ejercicio 7(f)

**Enunciado.** Si  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la transformación lineal dada por  $T(X) = AX$ , siendo  $A$  una matriz fija de orden  $3 \times 3$ , y  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ , entonces  $A$  es no invertible.

Queremos decidir si esta proposición es verdadera o falsa.

### Idea clave

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}$$

significa que el único vector de  $\mathbb{R}^3$  que cae en el cero de  $\mathbb{R}^3$  es el vector cero.

Como  $A$  es una matriz de orden  $3 \times 3$ , la expresión  $T(X) = AX$  se interpreta con  $X \in \mathbb{R}^3$ , es decir,

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Para esta transformación matricial,

$$T(X) = AX,$$

el núcleo es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$$AX = O.$$

Entonces,

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}$$

significa que el sistema homogéneo  $AX = O$  tiene solamente la solución trivial  $X = O$ . Pero para una matriz cuadrada  $3 \times 3$ , eso equivale a que  $A$  sea invertible.

### Cuidado frecuente

La frase  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$  no significa que la transformación “aplastó” el espacio. Significa exactamente lo contrario: ningún vector no nulo es enviado al cero.

$$X \neq 0 \Rightarrow T(X) \neq 0.$$

## Justificación 1: usando el sistema homogéneo

Como

$$T(X) = AX,$$

el núcleo es

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = O\}.$$

El enunciado dice que

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Entonces:

$$\{X \in \mathbb{R}^3 : AX = O\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Esto significa que el sistema homogéneo

$$AX = O$$

tiene solo la solución trivial  $X = O$ .

Ahora usamos una condición equivalente para **matrices cuadradas**:

$$AX = O \text{ tiene solo solución trivial } X = O \iff A \text{ es invertible.}$$

Por lo tanto,

$A$  es inversible.

Pero el enunciado afirma que  $A$  es no inversible. Eso contradice lo anterior.

### Conclusión

La proposición es falsa.

### Cadena lógica completa

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}$$

$\iff$

$AX = 0$  tiene solo la solución trivial

$\iff$

$A$  es inversible

$\implies$

no es cierto que  $A$  sea no inversible.

### Justificación 2: contraejemplo inmediato

También podemos refutar la proposición con un ejemplo. Tomemos

$$A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$T(X) = I_3 X = X.$$

Esta es la transformación identidad en  $\mathbb{R}^3$ .

Veamos su núcleo:

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3 : T(X) = (0, 0, 0)\}.$$

Como  $T(X) = X$ , tenemos

$$T(X) = (0, 0, 0) \iff X = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto,

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Se cumple la hipótesis del enunciado. Sin embargo,  $I_3$  es inversible, pues

$$I_3^{-1} = I_3.$$

Entonces la proposición es falsa.

### Respuesta final del 7(f)

Falso.

Como  $T(X) = AX$ , se tiene

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = O\}.$$

Si  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ , entonces  $AX = O$  tiene solo la solución trivial  $X = O$ . Como  $A$  es cuadrada de orden 3, esto implica que  $A$  es invertible. Por lo tanto, es falso que  $A$  sea no invertible.

### Otra forma de verlo

Si  $A$  fuera no invertible, entonces el sistema homogéneo  $AX = O$  tendría alguna solución no trivial. Es decir, existiría un  $X \neq (0, 0, 0)$  tal que  $AX = O$ . Pero entonces  $X \in N(T)$  y el núcleo no sería  $\{(0, 0, 0)\}$ . Por lo tanto, no puede ocurrir simultáneamente que  $A$  sea no invertible y  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ .

### Mini chequeo anti-error: cuadrada vs. rectangular

1. Si  $A$  es una matriz de orden  $3 \times 3$  y el sistema homogéneo

$$AX = O$$

tiene solo la solución trivial  $X = O$ , ¿ $A$  es invertible o no invertible?

2. Si  $A$  es una matriz de orden  $5 \times 3$ , entonces la transformación matricial asociada es

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad T(X) = AX.$$

Si en este caso  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ , ¿corresponde decir que  $A$  es invertible?

3. Si  $A$  es una matriz de orden  $3 \times 5$ , entonces la transformación matricial asociada es

$$T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(X) = AX.$$

¿Puede ocurrir que  $N(T) = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$ ?

### Respuestas esperadas.

1. Si  $A$  es de orden  $3 \times 3$  y  $AX = O$  tiene solo la solución trivial  $X = O$ , entonces  $A$  es **invertible**. Por lo tanto, no es correcto decir que  $A$  es no invertible.
2. No. Si  $A$  es de orden  $5 \times 3$ , entonces  $A$  es rectangular, no cuadrada. Por eso no corresponde decir que  $A$  es invertible en el sentido usual del curso. Lo que sí podemos decir es que  $T$  es monomorfismo, porque  $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$ .
3. No. Si  $A$  es de orden  $3 \times 5$ , entonces  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En este caso no puede ocurrir que  $N(T) = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$ , porque una transformación lineal desde un espacio de dimensión 5 hacia uno de dimensión 3 no puede ser monomorfismo. Por el teorema de la dimensión,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(N(T)) = 5,$$

y como  $\dim(\text{Im}(T)) \leq 3$ , resulta que

$$\dim(N(T)) \geq 2.$$

## Resumen final

Ejercicio	Idea clave	Resultado central
6	TL determinada por una base	$T(x, y) = (2x, x - y, x + y)$
7(b)	$\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(V)$	Verdadero
7(f)	$N(T) = \{0\} \Rightarrow A$ inversible	Falso

### Mensaje final

Estudiar una transformación lineal es estudiar qué conserva, qué produce y qué manda al cero.

conserva combinaciones lineales

produce su imagen

manda al cero su núcleo

## Errores frecuentes

### Error 1: confundir codominio con imagen

Que  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  no implica que  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ . Solo sabemos que  $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

### Error 2: pensar que cualquier vector del codominio tiene preimagen

Un vector  $w \in W$  tiene preimagen si y solo si

$$w \in \text{Im}(T).$$

Equivalente:

$$\exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w.$$

### Error 3: creer que $N(T) = \{0\}$ implica que $A$ no es inversible

Para una matriz cuadrada,

$$N(T) = \{0\}$$

significa que

$$AX = 0$$

tiene solo solución trivial. Por lo tanto,  $A$  es inversible.

### Error 4: confundir transformación nula con núcleo trivial

Si  $T$  es la transformación nula, entonces

$$T(v) = 0_W \text{ para todo } v \in V.$$

Por lo tanto,

$$N(T) = V,$$

no  $\{0\}$ .

### Error 5: no distinguir ceros de distintos espacios

En una transformación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ ,

$$(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El núcleo vive en el dominio, pero la imagen vive en el codominio.

### Error 6: decir que las imágenes de una base siempre son base de la imagen

Siempre se cumple que

$$\text{Im}(T) = \text{gen}\{T(e_1), \dots, T(e_n)\},$$

pero esos vectores podrían ser linealmente dependientes. Son generadores; no necesariamente son una base.

## Mini chequeo final

### Preguntas de cierre

1. Si  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$  es lineal, ¿puede pasar que  $\dim(\text{Im}(T)) = 6$ ?
2. Si  $T(X) = AX$  con  $A$  cuadrada y  $N(T) = \{0\}$ , ¿qué podemos decir de  $A$ ?
3. Para  $T(x, y) = (x + y, x, y)$ , calculá  $T(1, 0)$  y  $T(0, 1)$ .
4. Para la transformación nula  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ , ¿cuál es el núcleo?
5. Para esa misma transformación nula, ¿cuál es la imagen?

### Respuestas breves

1. No. La dimensión de la imagen es como máximo 4.
2.  $A$  es invertible.
3.  $T(1, 0) = (1, 1, 0)$  y  $T(0, 1) = (1, 0, 1)$ .
4.  $N(T) = \mathbb{R}^3$ .
5.  $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ .