Transformaciones lineales — Guía breve

Ejercicios seleccionados del TP 3.1

Ejercicios 6, 7(b) y 7(f)

Esta versión breve resume las ideas principales para resolver algunos ejercicios seleccionados del TP 3.1. Si algún paso no queda claro, conviene mirar la **versión desarrollada**, donde hay más detalle.

Herramientas mínimas

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

1. **Linealidad:**
$$T(u+v) = T(u) + T(v), \qquad T(cu) = cT(u).$$
2. **Combinaciones lineales:**
$$T(c_1v_1 + \cdots + c_pv_p) = c_1T(v_1) + \cdots + c_pT(v_p).$$
3. **Núcleo:**
$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}.$$
Es lo que la transformación manda al cero del codominio.
4. **Imagen:**
$$\operatorname{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\}.$$
Es todo lo que la transformación puede producir.
5. **Teorema de la dimensión:**
$$\dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(V).$$
En particular,
$$\dim(\operatorname{Im}(T)) \leq \dim(V).$$

Ejercicio 6

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal, con
$$T(-1,3) = (-2,-4,2), \qquad T(0,-1) = (0,1,-1).$$
Queremos hallar $T(-1,1)$, la ley de T y una preimagen.

Paso 1: ¿los vectores dados forman una base?

Tomamos
$$B = \{(-1,3),(0,-1)\}.$$
Calculamos
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) - 0 \cdot 3 = 1 \neq 0.$$
Entonces B es una base de $\mathbb{R}^2$.

Paso 2: descomponer un vector genérico

Buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que
$$(x,y) = \alpha(-1,3) + \beta(0,-1).$$
Como
$$\alpha(-1,3) + \beta(0,-1) = (-\alpha, 3\alpha - \beta),$$
resulta
$$x = -\alpha, \qquad y = 3\alpha - \beta.$$
Por lo tanto,
$$\boxed{\alpha = -x, \qquad \beta = -3x - y.}$$
Así,
$$\boxed{(x,y) = (-x)(-1,3) + (-3x-y)(0,-1).}$$

Ley de la transformación

Usando linealidad:

$$T(x,y) = (-x)T(-1,3) + (-3x-y)T(0,-1).$$

Sustituimos los datos:

$$T(x,y) = (-x)(-2,-4,2) + (-3x-y)(0,1,-1).$$

Entonces

$$T(x,y) = (2x,4x,-2x) + (0,-3x-y,3x+y),$$

y por lo tanto

$$\boxed{T(x,y) = (2x, x-y, x+y).}$$

Inciso a)

$$T(-1,1) = \big(2(-1), -1-1, -1+1\big) = (-2,-2,0).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{T(-1,1) = (-2,-2,0).}$$

Imagen de esta transformación

Si $(a,b,c) = T(x,y)$, entonces

$$(a,b,c) = (2x, x-y, x+y).$$

Luego

$$\begin{cases} 2x = a, \\ x-y = b, \\ x+y = c. \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible se tiene que todo vector de la imagen cumple con $a = b + c$. Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}.}$$

Una preimagen

Elegimos

$$w = (2,-1,3).$$

Como

$$2 = -1 + 3,$$

se tiene $w \in \operatorname{Im}(T)$. Buscamos (x,y) tal que

$$T(x,y) = (2,-1,3).$$

Usando la ley:

$$(2x, x-y, x+y) = (2,-1,3).$$

Así,

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ x-y = -1, \\ x+y = 3. \end{cases}$$

De aquí

$$x = 1, \qquad y = 2.$$

Entonces

$$\boxed{T(1,2) = (2,-1,3).}$$

Por lo tanto, $(1,2)$ es una preimagen de $(2,-1,3)$.

Ejercicio 7(b)

El ítem dice:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7 \text{ lineal } \implies \dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 4.$$

Resolución

Por el teorema de la dimensión,

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(N(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4.$$

Como $\dim(N(T)) \geq 0$, se obtiene

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 4.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\text{la proposición es verdadera.}}$$

Lectura rápida

Aunque el codominio sea $\mathbb{R}^7$, la transformación recibe vectores de un dominio de dimensión 4. Por eso la imagen no puede tener más de 4 direcciones independientes.
Como regla rápida, si $T : V \to W$ es lineal, entonces:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \min\{\dim(V), \dim(W)\}.$$

Por ejemplo, si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$, entonces

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 5.$$

Ejercicio 7(f)

El ítem dice: si $T(X) = AX$, con A matriz de orden 3×3, y $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$, entonces A es no inversible.

Aclaración

Como A es de orden 3×3, interpretamos

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(X) = AX.$$

Resolución

Para una transformación matricial,

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = O\}.$$

Si

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\},$$

entonces el sistema homogéneo

$$AX = O$$

tiene solo la solución trivial $X = O$.
Como A es cuadrada, se cumple:

$$AX = O \text{ tiene solo solución trivial } X = O \iff A \text{ es inversible.}$$

Por lo tanto, no es cierto que A sea no inversible.

Cuidado

La conclusión "A es inversible" depende de que A sea cuadrada. Si A es rectangular, la transformación $T(X) = AX$ puede tener núcleo trivial o no, pero no corresponde decir que A es inversible en el sentido usual del curso.

$$\boxed{\text{La proposición es falsa.}}$$

Tabla final de respuestas

Resultados centrales

Ej.	Idea	Resultado
6	Reconstruir T desde una base	$T(x,y) = (2x, x-y, x+y)$; $T(-1,1) = (-2,-2,0)$; una preimagen de $(2,-1,3)$ es $(1,2)$.
7(b)	Dimensión de la imagen	Verdadero: $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 4$.
7(f)	Núcleo trivial e invertibilidad	Falso: $N(T) = \{0\}$ implica que A es inversible, si A es cuadrada.

Errores frecuentes

Para revisar antes de entregar

1. Que $T : V \to W$ no significa necesariamente que $\mathrm{Im}(T) = W$. La imagen puede ser un subespacio más chico.
2. Un vector $w \in W$ tiene preimagen solo si $w \in \mathrm{Im}(T)$.
3. Para A cuadrada, si $T(X) = AX$, entonces
$$N(T) = \{0\} \iff A \text{ es inversible.}$$
4. Si T es la transformación nula, entonces
$$N(T) = V, \qquad \mathrm{Im}(T) = \{0_W\}.$$
5. En general,
$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$$
da generadores. Para decir que son base, además hay que verificar independencia lineal.

Idea final: estudiar una transformación lineal es mirar cómo actúa sobre una base, qué puede producir y qué manda al cero.