

## 4.1 VALORES Y VECTORES PROPIOS

INGENIERÍA Y LCC



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD  
DE INGENIERÍA

El presente material es sólo una *guía de los contenidos abordados en Álgebra*, utilizada por los docentes en sus clases.

Puede resultar de apoyo para estudiar, pero de ninguna forma es la bibliografía principal de la materia ni abarca todos los contenidos a estudiar.

## 1 Introducción

## 2 Valores y vectores propios

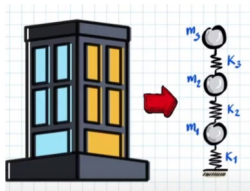
- Definiciones
- Interpretación geométrica de vectores propios
- Propiedades
- Ejemplos

## 3 Espacio propio de un valor propio de $A$

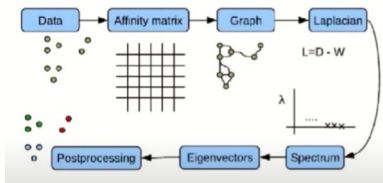
- Propiedades

# ¿En qué contexto se hacen necesarios?

## Sistemas masa-resorte



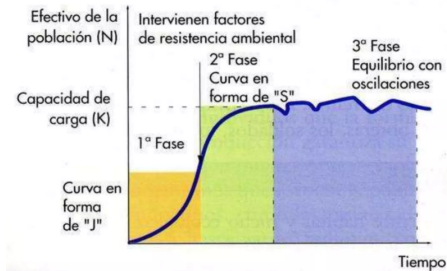
## Reconocimiento facial



## Diseño de videojuegos



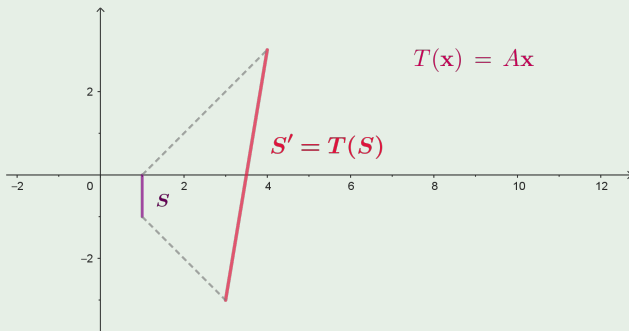
## Estudio de crecimiento poblacional



# Ejemplo

## Ejemplo

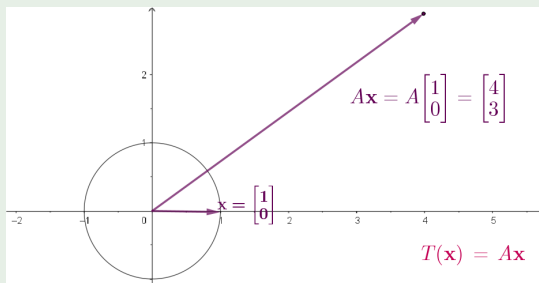
Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ , la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(\mathbf{x}) = A \mathbf{x}$  tiene la propiedad de ser lineal.



# Ejemplo

## Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ , la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(\mathbf{v}) = A \mathbf{v}$  tiene la propiedad de ser lineal.



¿Qué sucede con el resto de los vectores unitarios cuando se les aplica  $T$ ?

Antes de responder la última pregunta, veamos otro ejemplo

Sea  $T$  un automorfismo en  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- ¿Qué tipo de transformación geométrica es?
- Analice la imagen de  $(-x, 0)$ . ¿Qué observa?
- Analice la imagen de  $(0, y)$ . ¿Qué observa?
- ¿Habrán otros vectores para los que sucede lo mismo al compararlos con su transformado por  $T$ ?
- Analice la imagen de  $(3, 4)$ . ¿Qué observa?

## Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ , la transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  tiene la propiedad de ser lineal.

¿Qué sucede con el resto de los vectores unitarios cuando se les aplica  $T$ ?

**Ayuda:** Abrir archivo "av-av"

## Definición ( Valor y Vector Propio )

Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ . Un vector  $\mathbf{x}$  no nulo de  $\mathbb{R}^n$ , es **vector propio de  $A$** , si existe un escalar  $\lambda$  tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

El escalar  $\lambda$  que verifica esta igualdad es **valor propio de  $A$**  y se dice que  $\mathbf{x}$  es un **vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda$** .

En la bibliografía se encuentra este tema con distintos nombres:

- Valor característico y vector característico.
- Autovalor y autovector.
- Eigenvalor y eigenvector.

### Observaciones:

- $A$  es la matriz asociada estándar del operador lineal  $T$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .
- La ecuación  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  tiene dos incógnitas,  $\lambda$  y  $\mathbf{x}$ .

## Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

1.  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  es un vector propio de  $A$ . ¿Cuál es el valor propio al que está asociado?
2. ¿ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ , es vector propio de  $A$ ? ¿Qué conjetura se puede hacer? ¿Puede demostrarla?
3.  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  NO es un vector propio de  $A$ .

Revisamos geoméricamente cuántos vectores propios (linealmente independientes) tiene la matriz  $A$ , en el siguiente gif

En la definición pedimos que el vector propio verifique:

$$\underbrace{A\mathbf{x}}_{T(\mathbf{x})} = \underbrace{\lambda\mathbf{x}}_{\text{múltiplo del vector } \mathbf{x}}$$

Es decir, que los vectores propios son aquellos cuya dirección permanece invariante bajo la transformación lineal de matriz asociada  $A$ .

## ¿Cómo se calculan los valores y vectores propios?

Por definición, un vector propio  $\mathbf{x}$  de una matriz  $A_n$ , es un vector de  $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  asociado a  $\lambda \in \mathbb{R}$  que cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{para algún escalar } \lambda$$

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda(I_n\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si  $\mathbf{x}$  fuera un vector propio de  $A$ , el sistema homogéneo que queda planteado tendría al menos una solución no trivial (el vector propio  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ), y por lo tanto, infinitas soluciones.

Luego:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

## Teorema

*Teorema Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ .*

- 1. Si un escalar  $\lambda$  es valor propio de  $A$  entonces*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

- 2. Los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda$  son las soluciones no nulas del sistema*

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

**Demostrar 1:** Hecho en la diapositiva anterior.

## Definición

La ecuación  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  se llama **ecuación característica** de  $A$ . Cuando se desarrolla en forma de polinomio, se llama **polinomio característico**:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

- Que el sistema homogéneo de ecuaciones tenga soluciones diferentes de cero es equivalente a que la matriz de coeficientes  $A - \lambda I_n$  no sea inversible, por eso  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .
- Los valores propios de  $A$ , de orden  $n$ , son las raíces de su polinomio característico. Como este polinomio siempre es de grado  $n$ , tiene  $n$  raíces. Entonces  $A$  tiene  $n$  valores propios que pueden ser todos diferentes, repetidos o, inclusive, complejos.
- El sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene infinitas soluciones, siendo todas sus soluciones no nulas vectores propios de  $A$  asociados al valor propio  $\lambda$ .

# Ejemplo 1

## Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

Primero hallamos el polinomio característico de  $A$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 6 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(6 - \lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 7)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica de  $A$  es

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

De donde se obtienen los valores propios de  $A$ :  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = 3$ . Ambos tienen multiplicidad algebraica 1:

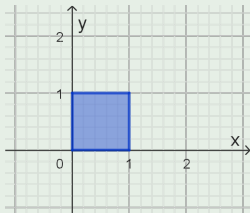
$$m_{a_7} = 1 \quad \text{y} \quad m_{a_3} = 1$$

## Ejemplo 2

### Ejemplo

Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que tiene como matriz asociada a  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. Hallar la imagen del cuadrado de la figura y graficarla:



2. De ser posible, clasificar geoméricamente a  $T$ .
3. A partir de la observación de las gráficas, ¿puede encontrar algún vector propio de  $A$ ?
4. Si encontró algún vector propio, encuentre el valor propio  $\lambda$  que le corresponde.

## Ejemplo

Dadas las matrices:

$$a) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la ecuación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Indique, si es que corresponde, cuál de los siguientes es vector propio de alguna/s matriz/ces del inciso (1) y a cuál de sus valores propios corresponde:

$$I) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad II) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad III) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 4

### Ejemplo

Dadas las matrices: a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la ecuación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Analizar si los siguientes vectores son o no vectores propios de la matriz correspondiente:

a)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

## Definición

Si un valor propio  $\lambda_i$  aparece como una raíz múltiple (repetida  $k$  veces) del polinomio característico, entonces se dice que  $\lambda$  tiene **multiplicidad algebraica**  $k$ . Esto se escribe:  $\mathbf{m}_{a\lambda} = k$

## Definición

Espacio propio de un valor propio El **Espacio Propio de un valor propio**  $\lambda$ , de una matriz  $A$  de orden  $n$ , es el conjunto de los vectores propios correspondientes a  $\lambda$ , junto con el vector nulo.

Este espacio vectorial es siempre un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ , y se denota con  $E_\lambda$ :

$$E_\lambda = \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ es vector propio de } \lambda\}$$

La dimensión de este subespacio se llama **multiplicidad geométrica de**  $\lambda$  y se designa con  $\mathbf{m}_{g\lambda}$

# Ejemplo 1

## Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

Los valores propios de  $A$ :  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = 3$ . Para obtener sus vectores propios, debe resolver dos veces el sistema lineal homogéneo de matriz  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , una vez para  $\lambda_1 = 7$  y otra para  $\lambda_2 = 3$ .

Para  $\lambda_1 = 7$ , la matriz aumentada asociada al sistema  $(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  resulta  $\begin{bmatrix} -3 & 1 & : & 0 \\ 3 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$  De su solución, se deduce que cada vector propio

asociado a  $\lambda_1 = 7$  es de la forma  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ , con  $t \neq 0$ .

Con esto,  $E_7 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(resulta  $\lambda_1 = 7$  con  $\mathbf{m}_{g7} = \mathbf{m}_{a7} = 1$ )

# Ejemplo 1

## Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

Los valores propios de  $A$ :  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = 3$ .

Repita el procedimiento anterior para hallar  $E_3$ .

El espacio propio de  $\lambda_2 = 3$  es

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta  $\lambda_2 = 3$  con  $\mathbf{m}_{g_3} = \mathbf{m}_{a_3} = 1$ )

## Ejemplo

$$\text{Dada } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[ P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 & -3 \\ 0 & 4 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^3 \right] \text{ Así,}$$

la ecuación característica de  $A$  es  $(4 - \lambda)^3 = 0$ .

De donde, el único valor propio de  $A$  es  $\lambda = 4$ .

Al buscar los vectores propios de 4 como soluciones no nulas del sistema  $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } t \neq 0$$

## Ejemplo

El espacio propio de  $\lambda = 4$  es

$$E_4 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta  $\lambda = 4$  multiplicidad geométrica igual a 1)

En este ejemplo,

- $\mathbf{m}_{a_4} = 3$
- $\mathbf{m}_{g_4} = 1$

¿Casualidad? NO

## Teorema

*Si  $A$  es una matriz de orden  $n$ , entonces:*

*La multiplicidad geométrica de un valor propio  $\lambda$  de  $A$ , verifica la siguiente desigualdad:*

$$1 \leq \mathbf{m}_{g\lambda} \leq \mathbf{m}_{a\lambda} \leq n.$$

**Observación:** Del teorema anterior se desprende que si la multiplicidad algebraica de  $\lambda$  es 1, entonces la multiplicidad geométrica también es necesariamente 1.

## Teorema

*Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ .*

*Si  $A$  tiene  $n$  valores propios distintos, entonces  $A$  tiene un conjunto de  $n$  vectores propios LI.*

## Teorema

Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ .

1. La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de dicha matriz.
2. El producto de los valores propios de una matriz  $A$  es igual  $\det(A)$ .

## Teorema (Valores propios de matrices especiales)

1.  $A$  es inversible si y sólo si  $\lambda = 0$  no es un valor propio de  $A$ .
2. Si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz inversible  $A$ , entonces  $\frac{1}{\lambda}$  es valor propio de  $A^{-1}$ .
3. Si  $A$  es una matriz triangular (superior, inferior o diagonal) los elementos de su diagonal principal son sus valores propios.
4. Si  $A$  es matriz simétrica, entonces sus valores propios son reales y los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.

**Demostrar 2, 3**

## Propiedad

*Se cumplen las siguientes propiedades para una matriz  $A$  de orden  $n$*

- 1. Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$  entonces  $\lambda$  es valor propio de  $A^T$ .*
- 2. Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$  entonces  $k\lambda$  ( $k \neq 0$ ) es valor propio de  $kA$ .*
- 3. Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  con vector propio  $\mathbf{x}$  y sea  $k$  un entero positivo. Entonces  $\lambda^k$  es un valor propio de  $A^k$  y  $\mathbf{x}$  es un vector propio correspondiente.*

**Demostrar 1, 2 y 3 para  $k = 2$  y  $k = 3$**