

Trabajo Práctico N° 4: VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS. DIAGONALIZACIÓN

1. a) Grafique el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Grafique el vector $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 b) Grafique los vectores Au y Av siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c) Luego de analizar las gráficas de los incisos (a) y (b), responda:
- 1) ¿Es u un vector característico de A ? ¿Es v un vector característico (de A)? Justifique.
 - 2) Una vez que conocemos un vector propio de A , ¿cuál es el valor característico λ asociado a ese vector propio?
 - 3) El escalar λ ¿Es el único valor propio que tiene la matriz A ? Justifique sin calcular.
- d) Encuentre la ecuación característica de A .
 e) Calcule todos los valores propios de A .

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

encuentre el valor de x si se sabe que $\lambda = 2$ es un valor propio de A .

3. Si la ecuación característica es $|A - \lambda I| = 0$ para una matriz A de orden 2, indique qué valores deben tomar los elementos de A para que los valores propios sean números reales distintos o números reales iguales.
4. Dadas las siguientes matrices, encuentre sus valores y vectores característicos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Puede corroborar los resultados en el siguiente enlace: <https://matrixcalc.org/es>.

5. a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x + y, 2y)$ una transformación lineal.
 b) Sin efectuar cálculos, indique cuáles son los valores propios de la matriz estándar asociada a la transformación lineal T . Justifique.
 c) Indique la traza y el determinante de la matriz estándar asociada a T .
 d) Realice el mismo procedimiento para:

- 1) La matriz estándar de la transformación lineal *desplazamiento cortante* en el eje x con $k = 2$.
 - 2) La matriz M asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x, y + x, -2x)$ con base $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -2)\}$ en dominio y codominio.
6. Calcula los valores propios de una matriz A de orden 2 si su traza es igual a 5 y su determinante es igual a 6.
- a) Indique los valores propios de A^3 .
 - b) Indique los valores propios de A^{-1} .
 - c) Indique los valores propios de la matriz $B = -2A$.
7. a) Indique si las matrices del ejercicio 4 son diagonalizables. Justifique.
 b) Para aquellas que son diagonalizables, encuentre la matriz P que las diagonaliza.
 c) Identifique la matriz diagonal en cada caso.
8. Sea A una matriz de orden 2. Los conjuntos dados a continuación tienen por elementos cada valor propio de A y un vector propio linealmente independiente asociado al mismo.

$$\left\{ \lambda_1 = 4, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad y \quad \left\{ \lambda_2 = 1, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- a) Encuentre la matriz P que diagonaliza a A .
- b) Encuentre la matriz A .

Realice lo mismo para A de orden 3 con:

$$\left\{ \lambda_1 = 1, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \lambda_2 = -2, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \lambda_3 = 3, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

- a) ¿Qué tipo de matrices son? ¿Son diagonalizables? Justifique.
 - b) Encuentre los espacios característicos y arme la matriz P que diagonaliza *ortogonalmente* a
 - c) Actividad grupal: Piense en un ejemplo en el cual la matriz A sea diagonalizable ortogonalmente y la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a A sea la identidad.
10. Una matriz A de orden 4 tiene los siguientes espacios característicos:

$$E_1 = \{(x, 2x, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}, \quad E_2 = \{(-y, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Complete las proposiciones para que resulten verdaderas:

- a) La matriz A tiene _____ valores propios.
 - b) La multiplicidad algebraica de cada valor propio es _____.
 - c) La matriz A tiene _____ vectores propios linealmente independientes, estos son _____.
 - d) La matriz A _____ (es/no es) diagonalizable.
11. Demuestre:
- a) Si A y B son matrices semejantes entonces tienen los mismos valores propios.

- b) Si λ es valor propio de A entonces λ^2 es valor propio de A^2 .
- c) Si u y v son vectores propios asociados a una matriz A y al mismo valor propio λ , entonces $(tu + kv) \neq 0$ es vector propio asociado al mismo valor propio λ , siendo t y k números reales.
12. Sea A una matriz de orden 2 cuyos valores propios son 3 y 1. Complete o responda según corresponda:
- a) $\det(A) =$ _____
- b) ¿Qué puede asegurar acerca de $\det(A - 3I)$? _____
- c) Los valores propios de $B = 4A$ son _____.
- d) Los valores propios de A^T son _____.
- e) $\det(A^T - I)$ es _____.
- f) Si B es una matriz semejante a A , entonces sus valores propios son _____.
- g) ¿ A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores propios de A^{-1} son _____.
- h) $\text{tr}(A) =$ _____
- i) ¿ A es diagonalizable? Justifique su respuesta. _____

Ejercicio de aplicación

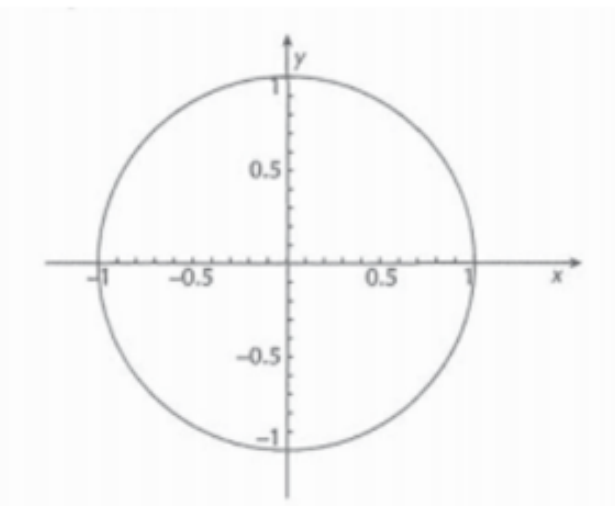
Al aplicar una transformación de rotación a puntos del plano, algunos de ellos rotan y otros conservan su dirección. Consideremos una membrana clásica circular, de radio 1, de modo que si elegimos un sistema de coordenadas cartesianas con centro coincidente con el centro de la membrana, la ecuación de los puntos de la membrana es

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

y la ecuación de los puntos frontera de la membrana es

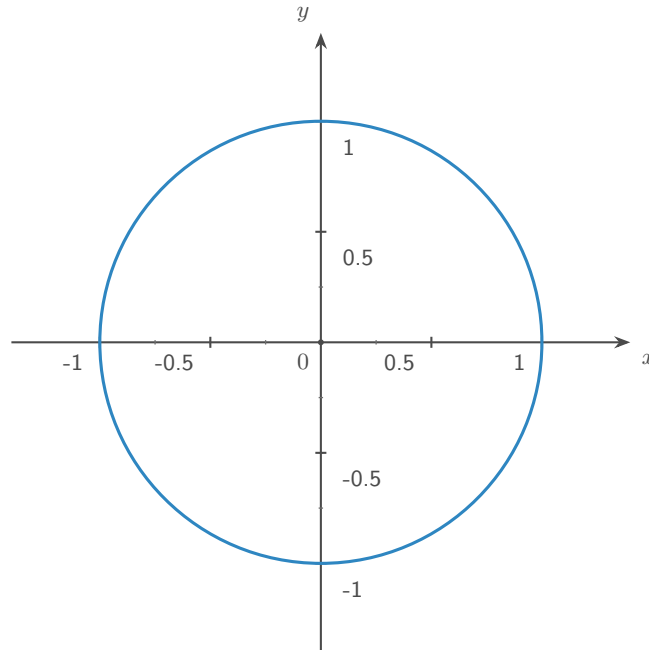
$$x^2 + y^2 = 1.$$

La membrana es sometida a una deformación tal que cada punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ se transforma en el



punto $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ por la transformación lineal

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2y_1 \\ 2x_1 + 4y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

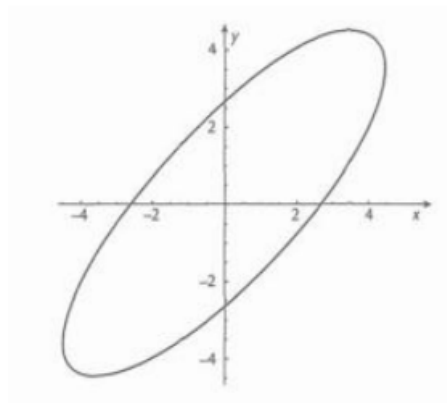


Los puntos de la circunferencia son $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Si aplicamos la transformación a estos puntos, tenemos:

$$T\left(\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha \\ 2 \cos \alpha + 4 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

La deformación de la frontera de la membrana está dada por la curva parametrizada

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(\alpha) = (4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha, 2 \cos \alpha + 4 \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$



Si superponemos los gráficos de la membrana original y de la membrana deformada, tendremos una representación de cómo la transformación altera la frontera.

¿Habrá puntos de la membrana que no roten durante la deformación? Es decir, puntos que se mantengan en la misma recta (conservando su sentido o tomando el sentido opuesto), con expansión o contracción, o manteniendo su distancia al origen. (Kozak et. al, 2007, pág 613).

