4.2 DIAGONALIZACIÓN

INGENIERÍA Y LCC

IMPORTANTE

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.
De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

Diagonalización

Definición

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D.
Es decir, si existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D,

$$P^{-1}AP = D$$

En este caso, decimos que P diagonaliza a A.

Observación: Son equivalentes las expresiones $P^{-1}AP = D$, $A = PDP^{-1}$ y $AP = PD$.

Ejemplo

Veamos que $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, pues

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de matrices

Teorema

Sea A una matriz de orden n.
A es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.
Más aún,

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n}\end{bmatrix}^{-1} & A & \begin{bmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n}\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ P^{-1} & A & P & = & D \end{array}$$

con $\mathbf{v_i}$ vector propio de A asociado a λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostrar.

Este teorema provee una herramienta para encontrar la matriz P que diagonaliza a A siempre que se cumplan ciertas condiciones.

Observaciones

Observaciones importantes:

- No todas las matrices cuadradas son diagonalizables.
- Si no existen n autovectores linealmente independientes, A no es diagonalizable.
- El orden de los autovectores usado para formar la matriz P, determina el orden que deben tener los autovalores en la matriz D.
- La matriz P que diagonaliza a A no es única. ¿Por qué?

Pasos para diagonalizar

Sea A una matriz $n \times n$

1. Determinar n autovectores linealmente independientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ con autovalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
2. Formar la matriz P con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ como sus columnas.
3. La matriz diagonal $D = P^{-1}AP$ está formada por los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal principal.

Ejemplo

De ser posible, diagonalice las siguientes matrices

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si alguna de ellas es diagonalizable, proponga una matriz distinta que también la diagonalice con el mínimo de cuentas posibles.

Propiedades

Teorema

Una matriz cuadrada A de orden n es diagonalizable si y sólo la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor son iguales.

Existe una relación entre diagonalización y los valores propios de la matriz.

Teorema

Si una matriz cuadrada A de orden n tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Propiedades

Corolario

Si A es diagonalizable por P, o sea, $A = PDP^{-1}$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces $A^k = PD^kP^{-1}$.

¿De qué Proposición es corolario? ¿Cómo justificaría su validez? Demostrar.

Teorema

Sean A y B matrices de orden n semejantes.
Si λ es valor propio de A entonces también es valor propio de B.
Equivalentemente, si $P(\lambda)$ es polinomio característico de A, también es el polinomio característico de B.

Demostrar en práctica

Matriz ortogonal

Definición

Una matriz cuadrada Q se denomina ortogonal si es inversible y si

$$Q^{-1} = Q^T$$

Ejemplo

- La matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es ortogonal porque $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ coincide con P^T.
- La matriz $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Observaciones

Propiedad

Una matriz Q de orden n es ortogonal si y sólo si sus vectores columna forman un conjunto ortonormal.

Ortonormal: Indica que los vectores cumplen dos condiciones:

- Son ortogonales dos a dos.
- la norma de cada vector es 1.

Teorema

Sea A una matriz simétrica de orden n.
Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de A entonces sus autovectores correspondientes x_1 y x_2 son ortogonales.

Diagonalización ortogonal

Definición

Sea A una matriz de orden n.
Se dice que A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal.

Teorema

Sea A una matriz de orden n.
A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Teorema espectral

Teorema

Si A una matriz de orden n simétrica entonces existe una matriz Q ortogonal de orden n que diagonaliza ortogonalmente a A.
Más aún,

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{bmatrix}^T & A & \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ Q^T & A & Q & = & D \end{array}$$

con $\mathbf{v_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ vectores propios ortonormales de A asociado a λ_i respectivamente.

Ejemplo

Ejemplo

Diagonalizar ortogonalmente la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Teorema importante

Teorema

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes.

1. *A es inversible.*
2. *A es un producto de matrices elementales.*
3. *A es equivalente por filas a la matriz identidad I.*
4. *La forma escalonada reducida de A es la identidad I.*
5. *El rango de A es n.*
6. *$det(A) \neq 0$.*
7. *El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es compatible determinado para todo vector $b \in \mathbb{R}^n$.*
8. *El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial.*

Teorema importante (continuación)

Teorema

9. *El operador T de matriz asociada estándar A es un isomorfismo.*
10. *La nulidad del operador T es 0.*
11. *El rango del operador T es n.*
12. *0 no es un autovalor de A.*

Ejemplo para interpretación y síntesis

Veamos en un ejemplo cómo se relacionan los temas vistos con anterioridad.
Tomemos como ejemplo la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Se mostró en el primer ejemplo que la matriz $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a A.
Ahora definamos una TL $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = Ax$.
La matriz estándar asociada a la transformación es A.
Hallemos la matriz M asociada a la transformación, respecto a la base

$$B_a = \{(4,1)(3,1)\}$$

Ejemplo para interpretación y síntesis

$$T(4,1) = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(4,1)]_{B_a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(3,1) = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(3,1)]_{B_a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Así,

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo para interpretación y síntesis

$$
\begin{tikzcd}
{[v]_{Bc}} \arrow[r, "A"] & {[T(v)]_{Bc}} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[v]_{B_a}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "M"] & {[T(v)]_{B_a}}
\end{tikzcd}
$$

Como sabemos,

$$P^{-1}AP[v]_{B_a} = M[v]_{B_a}$$

Siendo la matriz M una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los autovalores de A y la base tomada B_a es la base de autovectores de A.