

## 1.3 COMBINATORIA

INGENIERÍA Y LCC



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD  
DE INGENIERÍA

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

## 1 Regla de la suma y regla del producto

- Regla de la suma
- Regla del producto

## 2 Permutaciones

## 3 Combinaciones

- Teorema del binomio

## Ejemplo

Si en la biblioteca de la facultad dispone de 7 libros de distintos autores par el estudio del Álgebra Lineal; en la Biblioteca Central hay otros 5 libros de autores diferentes del mismo tema.

¿Cuántas opciones para elegir libro de estudio tiene un estudiante que va a preparar Álgebra Lineal?

**Regla de la suma:** Suponga que algún evento  $A$  puede ocurrir en  $m$  formas y que un segundo evento  $B$  puede ocurrir en  $n$  formas, pero ambos eventos no pueden ser simultáneos. Entonces  $A$  o  $B$  puede ocurrir en  $m + n$  formas.

**Regla de la suma:** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos tales que  $A \cap B = \emptyset$  (es decir que no tienen elementos en común), entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

## Ejemplo

Para un almuerzo se puede elegir entre 3 platos principales diferentes, 2 tipos de bebida y sólo 1 fruta fresca disponible. Cada comensal debe elegir uno de cada categoría.

- ¿De cuántas formas diferentes puede hacer su elección?
- ¿Cómo se modifica el resultado para el día siguiente si disponen de dos tipos de fruta fresca?

¿De cuántas formas diferentes puede hacer su elección?

**Regla del producto** Si una tarea puede dividirse en dos etapas y hay  $m$  resultados posibles para la primera etapa y para cada uno de estos hay  $k$  resultados posibles para la segunda etapa, entonces la tarea puede ser realizada de  $m \cdot k$  modos diferentes.

**Regla del producto** Si  $A, B$  son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

# Factorial, querido factorial

Para muchos problemas de conteo resulta útil la siguiente definición.

## Definición

El factorial de un entero no negativo  $n$  (es decir,  $n \geq 0$ ) que se denota por el símbolo  $n!$ , se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \cdot (n - 1)! \end{cases}$$

## Ejemplo

Si se quiere calcular  $4!$ , por definición, se tiene  $4! = 4 \cdot 3!$ , pero

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \cdot 3! && \text{recursivamente, por def.} \\ &= 4 \cdot (3 \cdot 2!) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1!) && \text{por definición: } 1! = 1 \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \end{aligned}$$

De la pág 4: 1, 3.

## Definición

Sea  $A$  un conjunto finito no vacío.

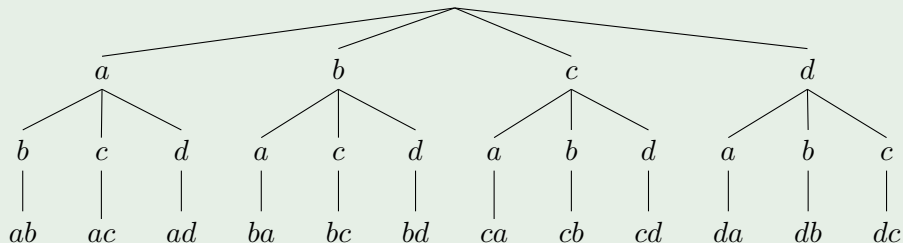
Una  $k$ -permutación de  $A$  es un arreglo ordenado de  $k$  elementos distintos de  $A$ .

Se usa el símbolo  $P_{n,k}$  ó  $nPk$  ó  $P(n,k)$  para denotar el número de  $k$ -permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos.

**Observación:** Dado que en la definición anterior, el número  $n$  es la cantidad de elementos del conjunto  $A$ , este será un número natural (no tiene sentido en este contexto que  $A$  sea el conjunto vacío, por eso descartamos el 0). Además,  $1 \leq k \leq n$ , siendo  $k$  también un número natural no nulo.

## Ejemplo

Sea  $A = \{a, b, c, d\}$ . Todas las 2-permutaciones de elementos de  $A$  se pueden obtener a partir del siguiente diagrama de árbol.



## Ejemplo

Entre 7 cuadros se debe elegir 5 para armar una exposición en el ECA, colgados uno a continuación del otro. ¿Cuántas disposiciones diferentes son posibles para la muestra?

¿Y si hubiera que elegir 35 entre 85 disponibles?

## Teorema

*El número de  $k$ -permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos, es*

$$P_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \quad \text{ó} \quad P_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

## Corollary

*Una permutación de un conjunto  $A$ , que tiene  $n$  elementos, es un arreglo ordenado de todos los elementos de  $A$ .*

*El número de permutaciones de  $A$  es igual a  $P_{n,n} = n!$*

Equivalentemente, una permutación de elementos de  $A$  es una función biyectiva de  $A$  en sí mismo.

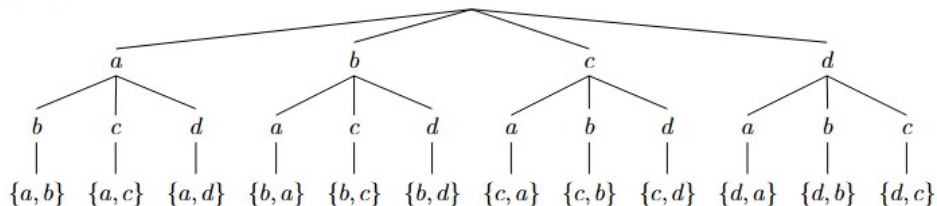
## Ejemplo

Si hay 12 invitados especiales a una obra de teatro que deberán ubicarse en las 12 butacas de la primera fila, habrán entonces  $P_{12,12} = 12!$  formas distintas de ubicarlos en ellas.

- 1 Un sistema acepta códigos en sólo uno de estos dos formatos:
  - Formato A: 3 letras distintas de nuestro alfabeto.
  - Formato B: 2 dígitos distintos (0–9) seguidos de 1 letra consonante.¿Cuántos códigos válidos hay en total?
- 2 ¿ De cuántas maneras distintas se pueden elegir 3 estudiantes distintos de un curso de 65 para asumir la responsabilidad de ser, delegado en el Centro de estudiantes, delegado de Deportes y el tercero, delegado de viajes a Potre; si se tiene en cuenta que
  - 1 no hay condicionamientos?
  - 2 el séptimo de la lista debe ser el delegado de viajes a Potre?
  - 3 sólo del primero al décimo de la lista pueden ser electos como delegado de Deporte?
  - 4 el tercero, el quinto y los 3 últimos de la lista no pueden ser electos para función alguna?
  - 5 el primero no puede ser electo si el decimocuarto estudiante ya está entre los elegidos y recíprocamente?

## Ejemplo

Sea  $A = \{a, b, c, d\}$ . ¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene  $A$ ?



Muchos de ellos son iguales ya que en un conjunto no importa el orden en que aparecen los elementos:  $\{ab\} = \{b, a\} = \{a, b, a, b, b, b\}$

## Definición

Sea  $A$  un conjunto finito.

Una  $k$ -combinación de  $A$  es un subconjunto de  $A$  con  $k$  elementos, o sea, una parte del conjunto  $A$  que tiene  $k$  elementos.

Se usa el símbolo  $C(n, k)$  ó  $nCk$  ó  $\binom{n}{k}$  para denotar el número de  $k$ -combinaciones de un conjunto que tiene  $n$  elementos en total.

**Observación:** Definir las combinaciones como subconjuntos de cierto cardinal implica que no importa el orden en que esos elementos se consideren y que no pueden repetirse pues, por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales y tienen 4 elementos:

$$\{3, 5, 7, 9\} = \{3, 9, 7, 3, 5, 5\}.$$

## Teorema

Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos (es decir,  $|A|$ ). La cantidad de subconjuntos distintos y de  $k$  elementos que se pueden considerar en  $A$ , está dada por

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = \frac{P(n, k)}{k!}$$

## Ejemplo

Verifique la última fórmula con los subconjuntos de 3 elementos que tiene el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$

## Ejemplo

¿Cuántas manos diferentes puede recibir cada jugador de truco?

Ejercicios: pág 10: 2, 4, 5

# Teorema del binomio

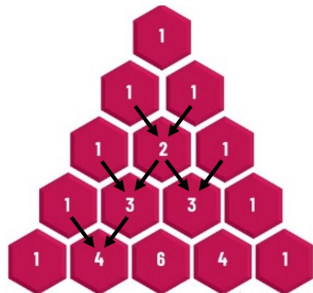
$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$



## Teorema

Si  $x$  e  $y$  son variables y  $n$  es un número entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.\end{aligned}$$

**Observación:** La conclusión del teorema puede enunciarse de forma equivalente, usando propiedades del número combinatorio, como sigue:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

## Ejemplo

$$(x + y)^4 = \underbrace{(x + y)}_{\text{1er factor}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{\text{2do factor}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{\text{3er factor}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{\text{4to factor}}$$

y a distribuir se ha dicho, o.....

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \\ &\binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^{4-1}y^1 + \binom{4}{2}x^{4-2}y^2 + \binom{4}{3}x^1y^{4-1} + \binom{4}{4}x^0y^4 \\ &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Ejercicios (pág.12) 2, 3, 4.