UNIDAD 4

Índice

1. Valores y Vectores Propios **1**
- 1.1. Valores y vectores propios . . . 1
- 1.2. Interpretación geométrica de vectores propios . . . 2
- 1.3. Propiedades . . . 2
- 1.4. Ejemplos . . . 3
- 1.5. Espacio propio de un valor propio de A . . . 5
- 1.6. Propiedades . . . 6

2. Diagonalización de Matrices **10**
- 2.1. Diagonalización . . . 10
- 2.2. Criterio de diagonalización de matrices . . . 12

3. Diagonalización ortogonal **13**
- 3.1. Matriz ortogonal . . . 13
- 3.2. Diagonalización ortogonal . . . 13

1. Valores y Vectores Propios

1.1. Valores y vectores propios

Definición 1.1

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Un vector $\mathbf{x}$ no nulo de $\mathbb{R}^n$, es vector propio de A, si existe un escalar λ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

El escalar λ que verifica esta igualdad es valor propio de A y se dice que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

En la bibliografía se encuentra este tema con distintos nombres:

- Valor característico y vector característico.
- Autovalor y autovector.
- Eigenvalor y eigenvector.

Observaciones:

- A es la matriz asociada estándar del operador lineal T sobre $\mathbb{R}^n$.
- La ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ tiene dos incógnitas, λ y $\mathbf{x}$.

Ejemplo 1.1 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A. ¿Cuál es el valor propio al que está asociado?
2. ¿$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$, es vector propio de A? ¿Qué conjetura se puede hacer? ¿Puede demostrarla?
3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ NO es un vector propio de A.

Revisamos geométricamente cuántos vectores porpios (linealmente independientes tiene la matriz A, en el siguiente link: ver gif "av-av"

1.2. Interpretación geométrica de vectores propios

En la definición pedimos que el vector propio verifique:

$$\underbrace{A\mathbf{x}}_{T(\mathbf{x})} \quad = \quad \underbrace{\lambda\mathbf{x}}_{\text{múltiplo del vector } \mathbf{x}}$$

Es decir, que los vectores propios son aquellos cuya dirección permanece invariante bajo la transformación lineal de matriz asociada A.

1.3. Propiedades

¿Cómo se calculan los valores y vectores propios?

Por definición, un vector propio $\mathbf{x}$ de una matriz A_n, es un vector de $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ que cumple:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{para algún escalar } \lambda$$

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda(I_n\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{x}$ fuera un vector propio de A, el sistema homogéneo que queda planteado tendría al menos una solución no trivial (el vector propio $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), y por lo tanto, infinitas soluciones.

Luego:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Lo que se acaba de analizar es la demostración de la siguiente propiedad, que además provee un método para hallar los valores propios y vectores propios asociados a ellos, para una matriz A de orden n.

Teorema 1.1

Sea A una matriz de orden n.

1. Si un escalar λ es valor propio de A entonces
$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$
2. Los vectores propios de A asociados a λ son las soluciones no nulas del sistema
$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Demostración:

- La demostración de la primera propiedad está hecha antes del enunciado del teorema
- Para demostrar la segunda propiedad se debe tener en cuenta que si una matriz cuadrada (en este caso $A - \lambda I_n$) es singular, entonces el sistema del cual ella es la matriz de coeficientes
$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$
tiene infinitas soluciones, una de ellas es a trivial ($\mathbf{0}$). Pero las restantes infinitas no triviales son los vectores propios asociados al valor propio λ dado que:
$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{equivale a} \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

■

Definición 1.2

La ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se llama **ecuación característica** de A. Cuando se desarrolla en forma de polinomio, se llama **polinomio característico**:
$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

- Que el sistema homogéneo de ecuaciones tenga soluciones diferentes de cero es equivalente a que la matriz de coeficientes $A - \lambda I_n$ no sea inversible, por eso $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Los valores propios de A, de orden n, son las raíces de su polinomio característico. Como este polinomio siempre es de grado n, tiene n raíces. Entonces A tiene n valores propios que pueden ser todos diferentes, repetidos o, inclusive, complejos.
- El sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones, siendo todas sus soluciones no nulas vectores propios de A asociados al valor propio λ.

1.4. Ejemplos

Ejemplo 1.2 Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Primero hallamos el polinomio característico de A

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(6-\lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 21 \;=\; (\lambda - 7)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica de A es

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

De donde se obtienen los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$. Ambos tienen multiplicidad algebraica 1:

$$m_{a_7} = 1 \qquad \text{y} \qquad m_{a_3} = 1$$

Ejemplo 1.3 Dadas las matrices:

$$a) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la euación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Indique, si es que corresponde, cuál de los siguientes es vector propio de alguna/s matriz/ces del inciso (1) y a cuál de sus valores propios corresponde:

$$I) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad II) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad III) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4 Dadas las matrices: $a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la euación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Analizar si los siguientes vectores son o no vectores propios de la matriz correspondiente:

$$a) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.5. Espacio propio de un valor propio de A

Definición 1.3

Si un valor propio λ_i aparece como una raíz múltiple (repetida k veces) del polinomio característico, entonces se dice que λ tiene **multiplicidad algebraica** k. Esto se escribe: $\mathbf{m}_{a_\lambda} = k$

Definición 1.4

Espacio propio de un valor propio El Espacio Propio de un valor propio λ, de una matriz A de orden n, es el conjunto de los vectores propios correspondientes a λ, junto con el vector nulo.
Este espacio vectorial es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y se denota con E_λ:

$$E_\lambda = \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ es vector propio de } \lambda\}$$

Definición 1.5

La dimensión del Espacio Propio de un valor propio λ de una matriz cuadrada A se llama **multiplicidad geométrica de** λ y se designa con $\mathbf{m}_{g_\lambda}$.

Ejemplo 1.5 Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$. Para obtener sus vectores propios, debe resolver dos veces el sistema lineal homogéneo de matriz a $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, una vez para $\lambda_1 = 7$ y otra para $\lambda_2 = 3$.

Para $\lambda_1 = 7$, la matriz aumentada asociada al sistema $(A-7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ resulta $\left[\begin{array}{cc:c} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$

De su solución, se deduce que cada vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$ es de la forma $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, con $t \neq 0$. Con esto, $E_7 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

(resulta $\lambda_1 = 7$ con $\mathbf{m}_{g_7} = \mathbf{m}_{a_7} = 1$)

Ejemplo 1.6 Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$.
Repita el procedimiento anterior para hallar E_3.

El espacio propio de $\lambda_2 = 3$ es

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta $\lambda_2 = 3$ con $\mathbf{m}_{g_3} = \mathbf{m}_{a_3} = 1$)

Ejemplo 1.7

Dada $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^3$$

Así, la ecuación característica de A es $(4-\lambda)^3 = 0$. Por lo que $\lambda = 4$ es el único valor propio de A con $\mathbf{m}_{a_4} = 3$.

Al buscar los vectores propios de 4 como soluciones no nulas del sistema $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } t \neq 0$$

Ejemplo 1.8 El espacio propio de $\lambda = 4$ es

$$E_4 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta $\lambda = 4$ multiplicidad geométrica igual a 1)

En este ejemplo,

$$\mathbf{m}_{a_4} = 3 \qquad \mathbf{m}_{g_4} = 1$$

Esta desigualdad no es casual. De hecho es una generalidad que se enuncia en la siguiente propiedad.

1.6. Propiedades

Teorema 1.2

Si A es una matriz de orden n, entonces:

La multiplicidad geométrica de un valor propio λ de A, verifica la siguiente desigualdad:

$$1 \leq \mathbf{m}_{g_\lambda} \leq \mathbf{m}_{a_\lambda} \leq n.$$

Observación: Del teorema anterior se desprende que si la multiplicidad algebraica de λ es 1, entonces la multiplicidad geométrica también es necesariamente 1.

Teorema 1.3

Sea A una matriz de orden n.
Si A tiene n valores propios distintos, entonces A tiene un conjunto de n vectores propios LI.

Teorema 1.4

Sea A una matriz de orden n.

1. La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de dicha matriz.
2. El producto de los valores propios de una matriz A es igual $\det(A)$.

Teorema 1.5: Valores propios de matrices especiales

1. A es inversible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.
2. Si λ es un valor propio de la matriz inversible A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.
3. Si A es una matriz triangular (superior, inferior o diagonal) los elementos de su diagonal principal son sus valores propios.
4. Si A es matriz simétrica, entonces sus valores propios son reales y los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.

Demostración: Se demostrarán sólo algunas de las proposiciones que enuncia el teorema.

2. Sea A una matriz inversible de orden n. Por la propiedad anterior sus autovalores son distintos de 0 y verifican: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Además, cualquiera sea λ, autovalor de A entonces $\frac{1}{\lambda} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\lambda}(A\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{x}) && \text{si se multiplica ambos miembros por un mismo escalar, se mantiene la igualdad.}\\
A\left(\tfrac{1}{\lambda}\mathbf{x}\right) &= \left(\tfrac{1}{\lambda}\lambda\right)\mathbf{x} && \text{por propiedades de producto de escalar por matriz}\\
A^{-1}A\left(\tfrac{1}{\lambda}\mathbf{x}\right) &= A^{-1}(1\mathbf{x}) && \text{premultiplicando ambos miembros por } A^{-1}\\
I_n\left(\tfrac{1}{\lambda}\mathbf{x}\right) &= A^{-1}\mathbf{x} && \text{por inversos para producto de matrices e identidad en el producto de reales}\\
\tfrac{1}{\lambda}\mathbf{x} &= A^{-1}\,\mathbf{x} && \text{por identidad en el producto de matrices}
\end{aligned}$$

De la última igualdad obtenida se concluye que $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1} (y con los mismos valores propios que λ tenía asociados como autovalor de A).

3. Esta propiedad se prueba fácilmente a partir de la propiedad de determinantes que dice que:

> Si B es matriz triangular, entonces $\det(B)$ coincide con el producto de los elementos de su diagonal principal.

Dado que A es triangular (diagonal) de orden n y λI_n es matriz escalar de orden que n, su diferencia

$$B = A - \lambda I_n,$$

es también una matriz triangular (diagonal). Por lo tanto, el polinomio característico se obtiene como producto de los elementos de su diagonal principal:

$$P(\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda\ 1) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda),$$

cuyas raíces son cada uno de los valores a_{ii} ya que cada uno de ellos anula un factor del polinomio de grado n factorizado. ■

Los valores propios de una matriz se relacionan con los de ciertas matrices obtenidas a partir de ella y la propiedad que sigue explica de qué modo lo hacen.

Propiedad 1.6

Se cumplen las siguientes propiedades para una matriz A de orden n

1. Si λ es valor propio de A entonces λ es valor propio de A^T.
2. Si λ es valor propio de A entonces $k\lambda$ $(k \neq 0)$ es valor propio de kA.
3. Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{x}$ y sea k un entero positivo. Entonces λ^k es un valor propio de A^k y $\mathbf{x}$ es un vector propio correspondiente.

Demostración:

1. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Dado un valor propio de ella, λ, por Teorema 1.1 se cumple que $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I_n) \\
&= \det(A - \lambda I_n)^T && \text{ya que al ser matriz cuadrada, su det. no cambia al transponerla} \\
&= \det(A^T - (\lambda I_n)^T) && \text{por propiedad de determinante de una suma matricial} \\
&= \det(A^T - \lambda\, I_n^T) && \text{por propiedad de det. de un producto de escalar por matriz} \\
&= \det(A^T - \lambda I_n) && \text{dado que la matriz identidad es simétrica}
\end{aligned}$$

   Luego $\det(A^T - \lambda I_n) = 0$, o sea, λ es autovalor de A^T (y es el mismo λ, autovalor de A). Esto es que el polinomio característico de A y de A^T tiene las mismas raíces, o sea, los mismos autovalores.

2. Sea A una matriz de orden n, λ uno de sus autovalores y $\mathbf{x}$ un autovalor asociado a él, y sea $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Se verifica por definición:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

   Si se premultiplica ambos miembros de la igualdad por k, ésta no cambia

$$k(A\mathbf{x}) = k(\lambda\mathbf{x})$$

$$(kA)\mathbf{x} = (k\lambda)\mathbf{x}, \tag{1}$$

   por propiedades de producto de escalares por matrices.
   Pero lo que dice la ecuación (1) es que $k\lambda$ es un autovalor de kA, tal como se quería demostrar.

3. La demostración de esta propiedad requiere un método que no se aborda en este curso. Haremos enonces, sólo una verificación para el caso $k = 2$.
   Sea A una matriz cuadrada de orden n y sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector propio asociado a él. Ellos cumplen que:

$A\mathbf{x}$	$=$	$\lambda\mathbf{x}$	según la definición 1.1
$A(A\mathbf{x})$	$=$	$A(\lambda\mathbf{x})$	la igualdad se mantiene si premultiplicamos ambos miembros por A
$A^2\mathbf{x}$	$=$	$\lambda(A\mathbf{x})$	por asociativa del producto de matrices y asociatividad mixta
$A^2\mathbf{x}$	$=$	$\lambda(\lambda\mathbf{x})$	nuevamente por definición 1.1
$A^2\mathbf{x}$	$=$	$\lambda^2\mathbf{x}$	

Esto es, que λ^2 es valor propio de A^2. Con el método de Inducción Matemática se puede extender la demostración de esta propiedad a cualquier natural $k \geq 2$. ■

Teorema 1.7

Sean A y B matrices de orden n semejantes.Entonces se cumplen:

1. Si λ es valor propio de A entonces también es valor propio de B.
2. Si $P(\lambda)$ es polinomio característico de A, también es el polinomio característico de B.

Demostración:
Se demuestra la priera proposición:
Sean A y B matrices semejantes y λ un valor propio de A:

$\det(A - \lambda I_n) = 0$	por propiedad de autovalor de la matriz A
$\det(P^{-1}BP - \lambda I_n) = 0$	por hipótesis de semejanza de A y B.
$\det(P^{-1}BP - \lambda(P^{-1}PI_n)) = 0$	como P es inversible: $P^{-1}P = I_n$.
$\det(P^{-1}BP - \lambda(P^{-1}I_nP) = 0$	dado que $P\ I_n = I_n\ P$.
$\det(P^{-1}(B - \lambda I_n)P) = 0$	por prop. distributiva del producto de matrices.
$\det(P^{-1})\det(B - \lambda I_n)\det(P) = 0$	por prop. del determinante del producto de matrices.
$\frac{1}{\det(P)}\det(B - \lambda I_n)\det(P) = 0$	por prop. del determinante de la inversa de una matriz.
$\det(B - \lambda I_n) = 0$	ya que $\det(P) \neq 0$, el producto con su inverso es 1.

Luego, λ es valor propio de B. ■

2. Diagonalización de Matrices

2.1. Diagonalización

Definición 2.1

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D.
Es decir, si existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D,

$$P^{-1}AP = D$$

En este caso, decimos que P diagonaliza a A.

Observación: Son equivalentes las expresiones $P^{-1}AP = D$, $A = PDP^{-1}$ y $AP = PD$.

Ejemplo 2.1

Veamos que $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, pues

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema provee una forma concreta de evaluar si una matriz es diagonalizable o no (dado que es una equivalencia).

Teorema 2.1

Sea A una matriz de orden n.
A es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Demostración:

Este teorema tiene una hipótesis general: A es una matriz de orden n y por lo tanto debe ser considerada para probar cada una de las implicaciones en las que se descompone la demostración de la equivalencia que enuncia. Primero se probará la implicación:

Si Una matriz A de orden n es diagonalizable, entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Sea A una matriz de orden n diagonalizable, es decir que existen una matriz P, inversible, y una matriz D diagonal de orden n tales que :

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{o equivalentemente} \qquad AP = PD.$$

Esta última expresión es la que nos conviene usar para la prueba, y para ello se evalúa las características de la i-ésima columna de ambas matrices.

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ columnas de } P \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & \dots & A\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \qquad \text{realizando el producto de matrices.} \end{aligned}$$

Es decir que la i-ésima columna del producto AP es

$$A\mathbf{p}_i. \tag{2}$$

Por otro lado, la i-ésima columna del otro producto PD es:

$$\begin{aligned} PD &= P\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \dots & \mathbf{D}_n\end{bmatrix} \qquad \text{donde } \mathbf{D}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ son las columnas de } D. \\ &= P\begin{bmatrix}d_{11}\mathbf{e}_1 & d_{22}\mathbf{e}_2 & \dots & d_{nn}\mathbf{e}_n\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta última igualdad se debe a que cada columna de la matriz diagonal, $\mathbf{D}_i$ se obtiene como el producto del i-ésimo elemento de la diagonal principal ($d_{ii} \in \mathbb{R}$) por el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$ (el vector $\mathbf{e_i}$). Por lo que la i-ésima columna de este producto es:

$$P(d_{ii}\mathbf{e}_i) = d_{ii}(P\mathbf{e}_i) = d_{ii}\mathbf{p}_i \tag{3}$$

Entonces, si $AP = PD$, sus respectivas columnas son iguales y según (2) y (3):

$$A\mathbf{p}_i = d_{ii}\mathbf{p}_i,$$

que indica que $\mathbf{p}_i$ es vector propio de A asociado al valor propio d_{ii}.
Además, como P es inversible, se sabe que sus n columnas (que son vectores propios de A) son linealmente independientes, tal como se quería probar.

La demostración de la otra implicación:

Si A es una matriz de orden n, con n vectores propios linealmente independientes, entonces A es diagonalizable.

se desprende del hecho de que cada uno de los n vectores propios de A asociados a un autovalor, cumple la igualdad

$$A\mathbf{x}_i = \lambda\mathbf{x}_i \quad \text{con } \ i = 1, 2, \dots, n$$

Así, si cada vector $A\mathbf{x}_i$ se usa como columna de una matriz y los respectivos $\lambda\mathbf{x}_i$ como columnas de otra, las matrices obtenidas serán iguales:

$$\begin{bmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \dots & A\mathbf{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\mathbf{x}_1 & \lambda\mathbf{x}_2 & \dots & \lambda\mathbf{x}_n\end{bmatrix} \tag{4}$$

Si la igualdad (3), se reformula para la matriz de la derecha, llamando Q a la matriz cuyas columnas son los vectores propios, la ecuación (4) queda:

$$\begin{bmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \dots & A\mathbf{x}_n\end{bmatrix} = Q \ \begin{bmatrix}\lambda_{11}\mathbf{e}_1 & \lambda_{22}\mathbf{e}_2 & \dots & \lambda_{nn}\mathbf{e}_n\end{bmatrix}$$

$$A\ Q = Q \begin{bmatrix}\lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{nn}\end{bmatrix}$$

Esto es, A es diagonalizable dado que se ha encontrado una matriz Q que la diagonaliza. ■

De la demostración del teorema anterior se deduce que, con los valores y vectores propios de A, bajo las condiciones dadas, es posible encontrar fácilmente una matriz P inversible que diagonalice a A y la matriz diagonal correspondiente:

Corolario 2.1

Si A es una matriz de orden n entonces una matriz D diagonal y una P inversible que verifican la definición son:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{bmatrix}^{-1} & A & \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\ P^{-1} & A & P & = & & D & \end{array}$$

con $\mathbf{v_i}$ vector propio de A asociado a λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Observaciones importantes:

- No todas las matrices cuadradas son diagonalizables.
- Si no existen n autovectores linealmente independientes, A no es diagonalizable.
- El orden de los autovectores usado para formar la matriz P, determina el orden que deben tener los autovalores en la matriz D.
- La matriz P que diagonaliza a A no es única. ¿Por qué?

Ejemplo 2.2 De ser posible, diagonalice las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si alguna de ellas es diagonalizable, proponga una matriz distinta que también la diagonalice con el mínimo de cuentas posibles.

2.2. Criterio de diagonalización de matrices

Teorema 2.2

Una matriz cuadrada A de orden n es diagonalizable si y sólo la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor son iguales.

Existe una relación entre diagonalización y los valores propios de la matriz.

Teorema 2.3

Si una matriz cuadrada A de orden n tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Propiedad 2.4

Si A es diagonalizable por P, o sea, $A = PDP^{-1}$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces $A^k = PD^kP^{-1}$.

3. Diagonalización ortogonal

3.1. Matriz ortogonal

Definición 3.1

Una matriz cuadrada Q se denomina ortogonal si es inversible y si

$$Q^{-1} = Q^T$$

Ejemplo 3.1

- La matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es ortogonal porque $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ coincide con P^T.
- La matriz $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Propiedad 3.1

Una matriz Q de orden n es ortogonal si y sólo si sus vectores columna forman un conjunto ortonormal.

Ortonormal: Indica que los vectores cumplen dos condiciones:

- Son ortogonales dos a dos.
- la norma de cada vector es 1.

Teorema 3.2

Sea A una matriz simétrica de orden n.
Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de A entonces sus autovectores correspondientes x_1 y x_2 son ortogonales.

3.2. Diagonalización ortogonal

Definición 3.2

Sea A una matriz de orden n.
Se dice que A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{\check{}1}AP = D$ es diagonal.

Teorema 3.3

Sea A una matriz de orden n.
A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Teorema 3.4

Si A una matriz de orden n simétrica entonces existe una matriz Q ortogonal de orden n que diagonaliza ortogonalmente a A.
Más aún, con $\mathbf{v_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vectores propios ortonormales de A asociado a λ_i respectivamente.

Ejemplo 3.2 Diagonalizar ortogonalmente la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Teorema 3.5

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes.

1. A es inversible.
2. A es un producto de matrices elementales.
3. A es equivalente por filas a la matriz identidad I.
4. La forma escalonada reducida de A es la identidad I.
5. El rango de A es n.
6. $det(A) \neq 0$.
7. El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es compatible determinado para todo vector $b \in \mathbb{R}^n$.
8. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial.
9. El operador T de matriz asociada estándar A es un isomorfismo.
10. La nulidad del operador T es 0.
11. El rango del operador T es n.
12. 0 no es un autovalor de A.
13. Los vectores fila de A son linealmente independientes.
14. Los vectores columna de A son linealmente independientes.
15. Los vectores fila de A generan $\mathbb{R}^n$.
16. Los vectores columna de A generan $\mathbb{R}^n$.
17. Los vectores fila de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
18. Los vectores columna de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.3 Ejemplo para interpretación y síntesis
Veamos en un ejemplo cómo se relacionan los temas vistos con anterioridad.

Tomemos la matriz del Ejemplo 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Recordemos que $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a A.
Ahora definamos una TL $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = Ax$.
La matriz estándar asociada a la transformación es A.
Hallemos la matriz M asociada a la transformación, respecto a las bases

$$B_a = \{(4,1)(3,1)\}$$

$$T(4,1) = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(4,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(3,1) = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(3,1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Así,

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{v}]_{B_C} & \xrightarrow{\quad A \quad} & [T(\mathbf{v})]_{B_C} \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ [\mathbf{v}]_{B_a} & \xrightarrow{\quad M \quad} & [T(\mathbf{v})]_{B_a} \end{array}$$

Como sabemos,

$$P^{-1}AP[v]_{B_a} = M[v]_{B_a}$$

Siendo la matriz M una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los autovalores de A y la base tomada B_a es la base de autovectores de A.