

## Intenciones Educativas : Práctico de Integrales Múltiples

**Consideraciones Generales:** Selección de ejercicios de temas de la Unidad 3, Funciones de varias variables - Integración. Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables” de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con los Jefes de Trabajos Prácticos y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (\*), que cada estudiante puede elegir si lo resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

**Objetivos:** al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de:

- Modelizar y calcular magnitudes geométricas y físicas (como áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos, masas y centros de masa) mediante el planteo de integrales dobles y triples.
- Evaluar integrales múltiples sobre regiones generales utilizando estrategias analíticas como la inversión del orden de integración y la descomposición de regiones de integración.
- Optimizar el cálculo de integrales múltiples mediante la selección y aplicación de cambios de variables adecuados, incluyendo coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
- Comunicar con solvencia técnica y lenguaje matemático preciso la resolución de problemas de ingeniería, tanto de forma escrita, como oral.
- Reconocer y representar regiones de integración en el plano y en el espacio, identificando su influencia en la formulación de integrales múltiples.
- Formular integrales dobles y triples para modelar magnitudes físicas y geométricas relevantes en ingeniería.
- Aplicar técnicas de cálculo en distintos sistemas de coordenadas, seleccionando el procedimiento más eficiente.
- Interpretar los resultados obtenidos y evaluar su coherencia con el problema planteado.
- Justificar decisiones metodológicas y comunicar el proceso con claridad técnica.
- Favorecer el trabajo colaborativo y la gestión autónoma del aprendizaje.

### Jacobianos para cambios de variables:

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (\underbrace{r \cos(\theta)}_{x(r, \theta)}, \underbrace{r \sin(\theta)}_{y(r, \theta)}); \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\mathbf{r}(r, \theta, z) = (\underbrace{r \cos(\theta)}_{x(r, \theta, z)}, \underbrace{r \sin(\theta)}_{y(r, \theta, z)}, \underbrace{z}_{z(r, \theta, z)}); \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, \theta) = (\underbrace{\rho \sin(\phi) \cos(\theta)}_{x(\rho, \phi, \theta)}, \underbrace{\rho \sin(\phi) \sin(\theta)}_{y(\rho, \phi, \theta)}, \underbrace{\rho \cos(\phi)}_{z(\rho, \phi, \theta)}); \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin(\phi)$$

|                                         | Medida                                   | Valor Medio de $f$                               | Masa                         |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------|
| SÓLIDO $D$                              | $\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dV$       | $\frac{1}{\text{Vol}(D)} \iiint_D f \, dV$       | $\iiint_D \delta \, dV$      |
| CAPA DELGADA $S$                        | $\text{área}(S) = \iint_S 1 \, d\sigma$  | $\frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S f \, d\sigma$  | $\iint_S \delta \, d\sigma$  |
| Caso especial: $S \subset \mathbb{R}^2$ | $\text{Área}(S) = \iint_S 1 \, dx \, dy$ | $\frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S f \, dx \, dy$ | $\iint_S \delta \, dx \, dy$ |

|                                                             | Primeros Momentos                                      |                                                        |                                                        | Coord. centro masa |                    |                    |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|                                                             | $M_{yz}$                                               | $M_{xz}$                                               | $M_{xy}$                                               | $\bar{x}$          | $\bar{y}$          | $\bar{z}$          |
| SÓLIDO $D$                                                  | $\iiint_D x \delta dV$                                 | $\iiint_D y \delta dV$                                 | $\iiint_D z \delta dV$                                 | $\frac{M_{yz}}{M}$ | $\frac{M_{xz}}{M}$ | $\frac{M_{xy}}{M}$ |
| CAPA DELGADA $S$<br>Caso especial: $S \subset \mathbb{R}^2$ | $\iint_S x \delta d\sigma$<br>$\iint_S x \delta dx dy$ | $\iint_S y \delta d\sigma$<br>$\iint_S y \delta dx dy$ | $\iint_S z \delta d\sigma$<br>$\iint_S z \delta dx dy$ |                    |                    |                    |
| VARILLA FINA $C$                                            | $\int_C x \delta ds$                                   | $\int_C y \delta ds$                                   | $\int_C z \delta ds$                                   |                    |                    |                    |

## 1. Integrales dobles

### 1.1. Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos

1. Calcule:

a) (r)  $\int_1^2 \int_0^4 2xy dy dx$

b) (r)  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy$

c) (o)  $\iint_R (6y^2 - 2x) dA$ , donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

d) (r)  $\iint_R xy \cos y dA$ , donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$

2. (r) Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide de ecuación  $z = x^2 + y^2$  y abajo por el cuadrado  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  (es decir,  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ).

3. (r) Calcule la integral de la función dada por  $f(x, y) = 2 \sin x \cos y$  sobre el rectángulo  $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ . Analice si el valor obtenido representa o no un volumen; en caso afirmativo, describa el sólido.

### 1.2. Integrales dobles sobre regiones generales

4. (o) Trace las siguientes regiones de integración:

a)  $-1 \leq x \leq 2, x - 1 \leq y \leq x^2$ .

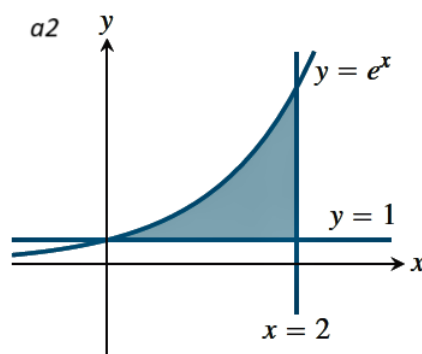
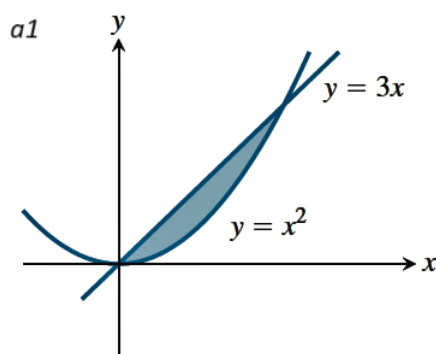
b)  $-2 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$ .

c)  $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y$ .

d)  $1 \leq x \leq e^2, 0 \leq y \leq \ln x$ .

5. (o) Escriba la integral iterada  $\iint_R dA$  sobre la región descrita usando (i) secciones transversales verticales y (ii) secciones transversales horizontales.

a)



b) Región acotada por  $y = e^{-x}$ ,  $y = 1$  y  $x = \ln 3$ .

6. Trace la región de integración y evalúe la integral.

a) (r)  $\int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} y \, dy \, dx.$

b) (r)  $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx \, dy.$

c) (r)  $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx \, dy.$

d) (o)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds.$

e) (o)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sec(t)} 3 \cos t \, du \, dt.$

7. (r) Calcule la integral  $\iint_R f(s, t) \, dA$  para  $f(s, t) = e^s \ln t$  sobre la región del primer cuadrante del plano  $st$  que está arriba de la curva  $s = \ln t$  desde  $t = 1$  hasta  $t = 2$ . Atención al orden de las variables  $s$  y  $t$ .

8. (r) Trace la región de integración y escriba una integral doble equivalente, con el orden de integración inverso.

a)  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy \, dx.$

b)  $\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} 16x \, dy \, dx.$

c)  $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, dy \, dx.$

9. (r) Trace la región de integración, invierta el orden de integración y evalúe la integral:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy \, dx}{y^4 + 1}.$$

10. (o) Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro de ecuación  $z = x^2$  y abajo por la región encerrada por la parábola  $y = 2 - x^2$  y la recta  $y = x$  en el plano  $xy$ .

11. (r) Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $z + y = 3$ .

12. (r) Calcule el volumen del sólido cortado de la columna cuadrada  $|x| + |y| \leq 1$  por los planos  $z = 0$  y  $3x + z = 3$ .

13. (r) Trace la región de integración y el sólido cuyo volumen está dado por la integral

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

14. (r) Evalúe la integral impropia  $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy \, dx$  como si fuese una integral iterada.

15. (o) Un sólido tiene su base  $R$  sobre el plano  $xy$  y está acotado por arriba por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$ . El volumen de dicho sólido es

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

Grafique la región base  $R$  y exprese el volumen del sólido como una integral iterada simple con el orden de integración invertido. Luego evalúe la integral para determinar el volumen.

16. (o) ¿Qué región  $R$  en el plano  $xy$  maximiza el valor de  $\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) \, dA$ . Justifique su respuesta.

17. (r) ¿Es posible evaluar la integral de una función continua  $f(x, y)$  sobre una región rectangular en el plano  $xy$  y obtener respuestas diferentes dependiendo del orden de integración? Justifique su respuesta.
18. (r) Pruebe que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \int_0^b e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

### 1.3. Áreas por doble integración

19. (r) Trace la región acotada por las rectas y las curvas dadas. Expresé el área de la región como una integral doble iterada y evalúe la integral.
- Las rectas  $x = 0$ ,  $y = 2x$  y  $y = 4$ .
  - La parábola  $x = -y^2$  y la recta  $y = x + 2$ .
  - La curva  $y = e^x$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $x = \ln 2$ .
  - Las parábolas  $x = y^2 - 1$  y  $x = 2y^2 - 2$ .

20. Las siguientes integrales y sumas de integrales dan áreas de regiones en el plano  $xy$ . Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan, luego calcule el área de la región.

a) (o)  $\int_0^6 \int_{\frac{y^2}{3}}^{2y} dx dy.$       c) (r)  $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx dy.$

b) (o)  $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1-x} dy dx.$

21. (r) Calcule el valor promedio de  $f(x, y) = \sin(x + y)$  sobre

- el rectángulo  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ ;
- el rectángulo  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

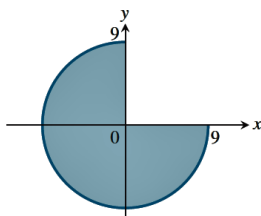
22. (r)

- ¿Qué será mayor, el valor promedio de  $f(x, y) = xy$  sobre el cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  o el valor promedio de  $f$  sobre el cuarto de círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  en el primer cuadrante? Calcúlelos.
- Calcule los valores medios de  $f(x, y) = xy$  sobre los dos cuadrados  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  y  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 0$  y sobre el disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Compare los valores obtenidos entre sí y con los del inciso anterior.

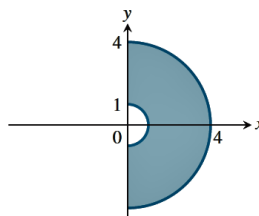
### 1.4. Integrales dobles en forma polar

23. En los ejercicios dados a continuación, describa, en coordenadas polares, la región dada.

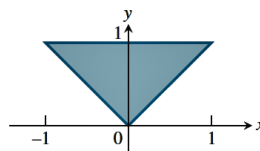
1. (o)



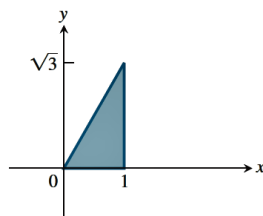
2. (o)



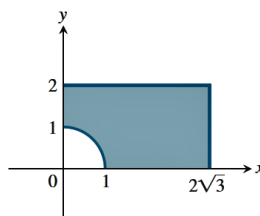
3. (r)



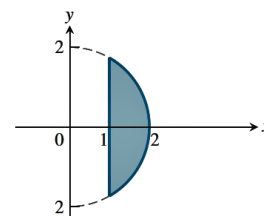
4. (o)



5. (r)



6. (o)



24. (o) Cambie la integral cartesiana por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

a)  $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$

b)  $\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^y dx dy.$

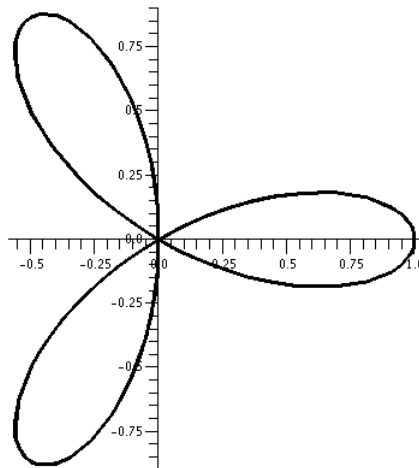
c)  $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx.$

d)  $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dy dx.$

25. (r) Dada:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$ , expresada en coordenadas polares, grafique la región de integración y exprese la misma integral usando coordenadas cartesianas. No evalúe la integral.

26. (r) Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar  $r = 1 + \cos \theta$  y fuera de la circunferencia  $r = 1$ .

27. (o) Obtenga el área encerrada en el pétalo de una rosa  $r = \cos(3\theta)$ , en coordenadas polares.



28. (o) Determine la altura promedio de la superficie hemisférica  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  sobre el disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$  en el plano  $xy$ .

29. (r) Obtenga la distancia promedio desde un punto  $P(x, y)$  del disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$  hasta el origen.

30. (r) Integre  $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$  sobre la región  $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$ .

31. (r) La región que se encuentra dentro de la cardioide de ecuación polar  $r = 1 + \cos \theta$  y afuera de la circunferencia  $r = 1$  es la base de un cilindro recto sólido. La parte superior del cilindro está en el plano  $z = x$ . Determine el volumen del cilindro.

32. (r) La manera usual de evaluar la integral impropia  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  es calcular primero su cuadrado:

$$I^2 = \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Evalúe la última integral usando coordenadas polares y despeje  $I$  de la ecuación resultante (recuerde lo visto en el ejercicio 18).

### 1.5. Momentos y centros de masa de placas planas

33. (r) Calcule el centro de masa de una placa delgada de densidad  $\delta = 3$  acotada por las rectas  $x = 0$ ,  $y = x$  y la parábola  $y = 2 - x^2$  en el primer cuadrante.
34. (r) Determine el centroide (centro de masa en un sólido de densidad constante) de la placa fina ubicada en el primer cuadrante, acotada por el eje  $x$ , la parábola  $y^2 = 2x$  y la recta  $x + y = 4$ .
35. (r) Calcule la masa de una placa delgada que ocupa la pequeña región determinada por la elipse  $x^2 + 4y^2 = 12$  y por la parábola  $x = 4y^2$  si la densidad es  $\delta(x, y) = 5x$ .
36. (r) Calcule el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje  $y$ , de una placa rectangular delgada cortada en el primer cuadrante por las rectas  $x = 6$  y  $y = 1$ , si  $\delta(x, y) = x + y + 1$ .
37. (o) Plantee y (r) calcule el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje  $y$ , de una placa delgada acotada por la recta  $y = 1$  y la parábola  $y = x^2$  si la densidad es  $\delta(x, y) = y + 1$ . Además:
  - (r) Justifique el orden de integración elegido.
  - (r) Verifique lo obtenido, usando por ejemplo Geogebra o Python.

## 2. Integrales triples

### 2.1. Integrales triples en coordenadas rectangulares

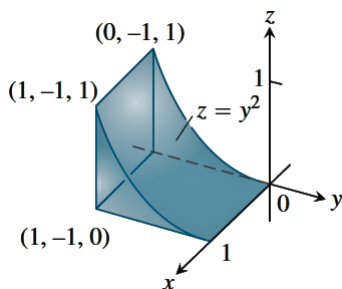
38. Escriba seis diferentes integrales triples iteradas que permitan calcular el volumen de:
  - a) (r) el sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos  $x = 1$ ,  $y = 2$  y  $z = 3$ . Evalúe una de ellas.
  - b) (o) El tetraedro determinado en el primer octante por el plano  $6x + 3y + 2z = 6$ . Evalúe una de las integrales.
39. (o) Sea  $D$  la región acotada por los paraboloides  $z = 8 - x^2 - y^2$  y  $z = x^2 + y^2$ . Escriba dos integrales triples que permitan calcular el volumen de  $D$ . Evalúe una de ellas.
40. (r) Represente el sólido correspondiente a la región de integración y calcule cada integral:

a)  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx.$

b)  $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz dy dx.$

c)  $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx.$

41. (o) La siguiente es la región de integración de la integral  $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx.$



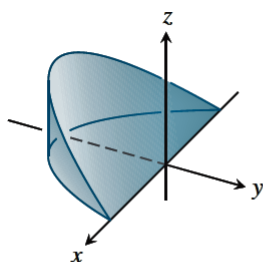
Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden:

- a)  $dy dz dx.$
- b)  $dx dy dz.$

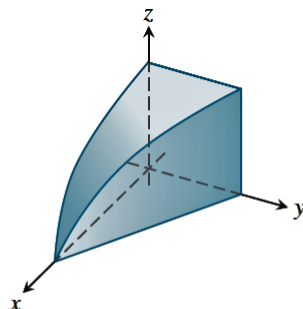
c)  $dz dx dy$ .

42. (r) Calcule el volumen de

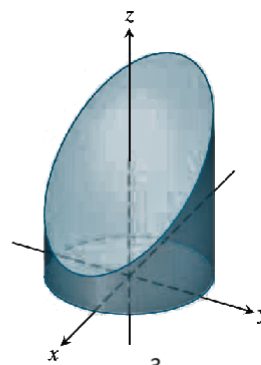
- la cuña definida en el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  por los planos  $z = -y$  y  $z = 0$  (gráfico 1);
- la región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano  $y = 1 - x$  y la superficie  $z = \cos(\pi x/2)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (gráfico 2);
- la región cortada en el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  por el plano  $z = 0$  y el plano  $x + z = 3$  (gráfico 3).



1



2



3

43. (r) Calcule el valor promedio de  $f$  en la región dada:

- $f(x, y, z) = x^2 + 9$  sobre un cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos  $x = 2$ ,  $y = 2$  y  $z = 2$ .
- $f(x, y, z) = x + y - z$  sobre un sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos  $x = 1$ ,  $y = 1$  y  $z = 2$ .

44. (r) Evalúe la siguiente integral cambiando el orden de integración de manera adecuada:

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz.$$

## 2.2. Integrales en coordenadas cilíndricas y esféricas

45. Evalúe las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas:

- (o)  $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz r dr d\theta$  y represente gráficamente la región de integración.
- (r)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\theta}{2\pi}} \int_0^{3+24r^2} dz r dr d\theta$ .
- (o)  $\int_0^\pi \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z dz r dr d\theta$ .
- (r)  $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} r^3 dr dz d\theta$  y represente gráficamente la región de integración.

46. (r) Sea  $D$  la región acotada abajo por el plano  $z = 0$ , arriba por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , y a los lados por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Enuncie las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de la región  $D$ , usando los siguientes órdenes de integración:

- $dz dr d\theta$ .
- $dr dz d\theta$ .

47. (r) Dé los límites de integración para evaluar la integral  $\iiint_D f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$  como una integral sobre la región acotada abajo por el plano  $z = 0$ , a los lados por el cilindro  $r = \cos \theta$  y arriba por el paraboloide  $z = 3r^2$ .

48. (o) Convierta la integral  $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy$  en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

49. En los siguientes ejercicios, enuncie la integral iterada para evaluar  $\iiint_D f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$  sobre la región  $D$  dada.

- (r)  $D$  es la región acotada abajo por el plano  $z = 0$ , a los lados por el cilindro  $r = \cos \theta$  y arriba por el paraboloides  $z = 3r^2$ .
- (r)  $D$  es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia  $r = 2 \sin \theta$  en el plano  $xy$  cuya parte superior está en el plano  $z = 4 - y$ . (Figura 1.)
- (r)  $D$  es el cilindro recto sólido cuya base es la región del plano  $xy$  que está dentro de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$  fuera de la circunferencia  $r = 1$  y cuya parte superior está en el plano  $z = 4$ . (Figura 2.)
- (o)  $D$  es el cilindro recto sólido cuya base es la región entre las circunferencias  $r = \cos \theta$  y  $r = 2 \cos \theta$  y cuya parte superior está en el plano  $z = 3 - y$ . (Figura 3.)

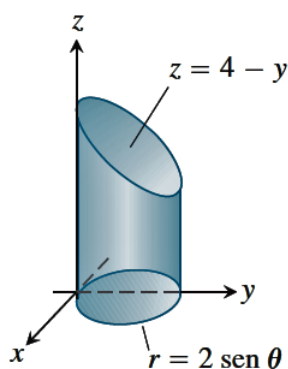


Figura 1

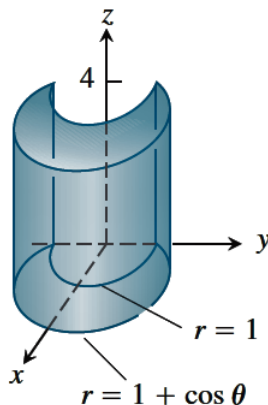


Figura 2

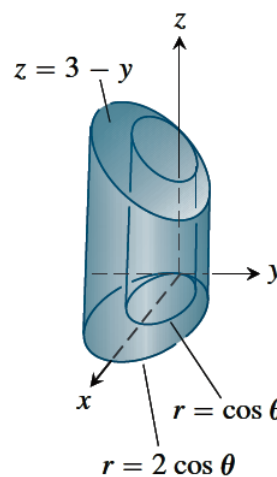


Figura 3

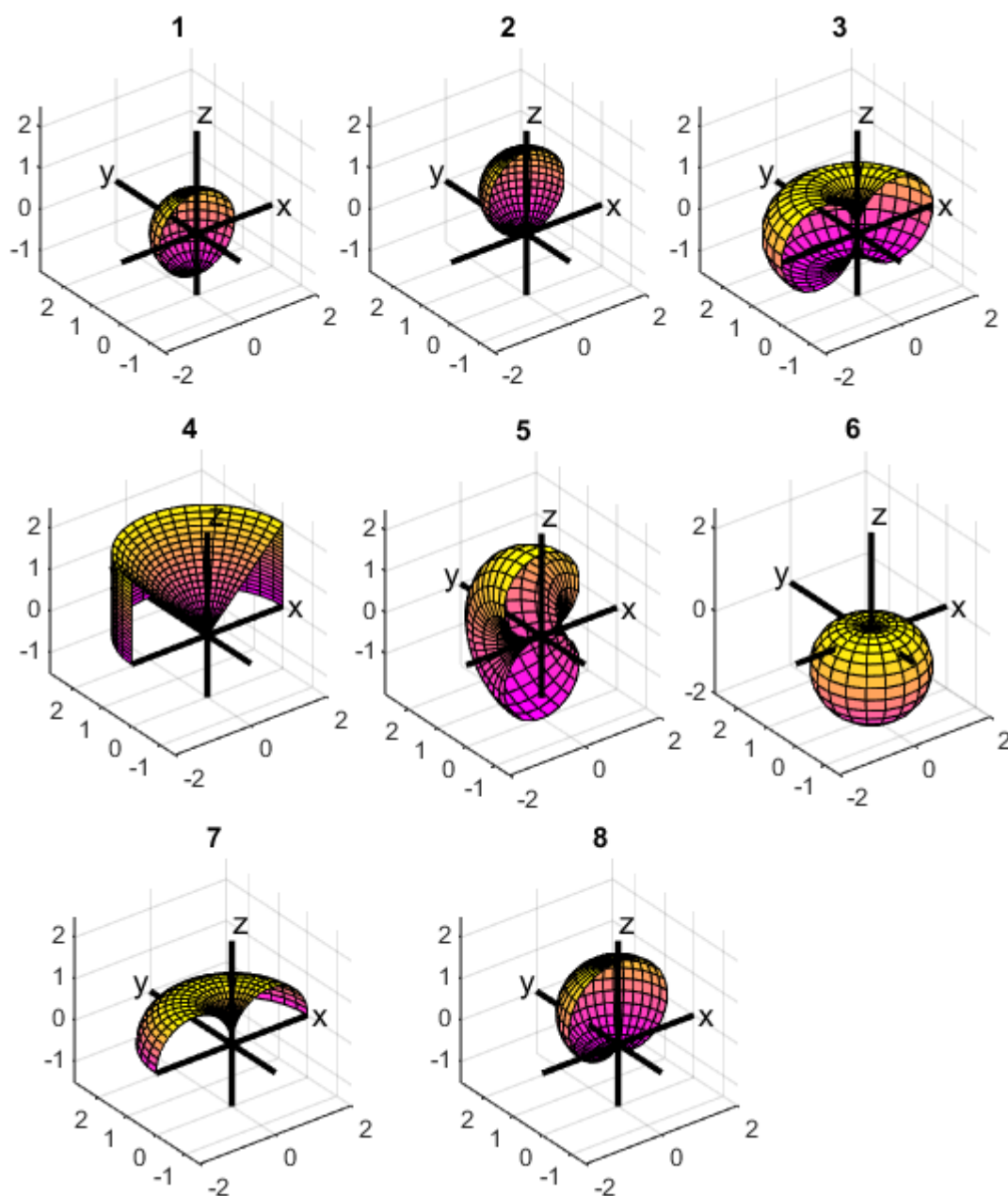
50. (r) Evalúe las siguientes integrales (dadas en coordenadas esféricas) y represente gráficamente la región de integración en cada caso. Como ayuda se brinda una imagen en la que se encuentran contenidos los gráficos de algunas superficies frontera de estos sólidos (se ven huecos, para facilitar la comprensión).

a)  $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$

c)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{1-\cos\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$

b)  $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\sin\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$

d)  $\int_0^2 \int_0^\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin(2\phi) d\phi d\theta d\rho.$



51. Sea  $D$  la región del ejercicio 46. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que dan el volumen de  $D$ , usando los siguientes órdenes de integración:

- $(r) \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ .
- $(*) \, d\phi \, d\rho \, d\theta$ .

52. (o) Para cada uno de los siguientes sólidos, determine los límites en coordenadas esféricas para la integral que da el volumen del sólido dado y evalúe la integral.

- El sólido entre la esfera  $\rho = \cos \phi$  y el hemisferio  $\rho = 2, z \geq 0$  (Figura 4).
- El sólido acotado abajo por la esfera  $\rho = 2 \cos \phi$  y arriba por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (Figura 5).

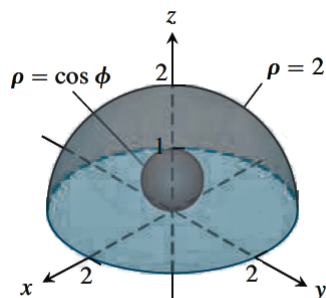


Figura 4

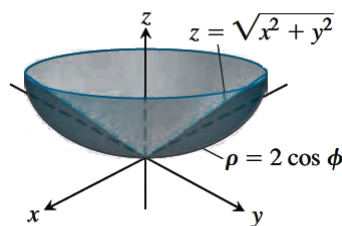
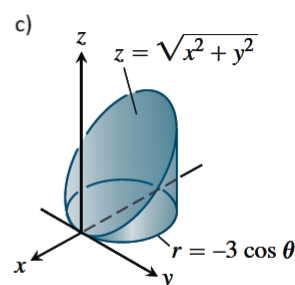
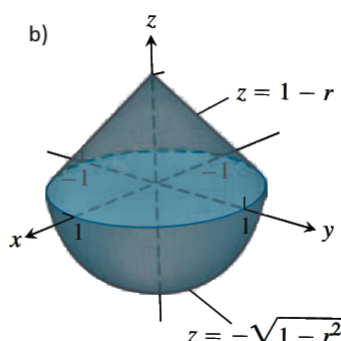
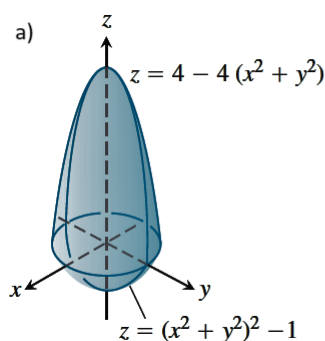


Figura 5

53. (r) Plantee las integrales triples para calcular el volumen de la esfera de ecuación esférica  $\rho = 2$  en coordenadas esféricas, cilíndricas y rectangulares.
54. (r) Calcule los volúmenes de los sólidos cuyos gráficos se muestra a continuación.



55. (r) Calcule el volumen de cada una de las regiones sólidas dadas a continuación:
- La región sólida más pequeña dentro de la esfera de ecuación esférica  $\rho \leq 2$  cortada por el plano  $z = 1$ .
  - Sólido encerrado por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  entre los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .
  - Región que está dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  y fuera del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
  - Región encerrada por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y por los planos  $z = 0$  y  $x + y + z = 4$ .
  - Región del cilindro sólido  $x^2 + y^2 \leq 1$  dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
  - Región acotada arriba por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  y abajo por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$ .
56. (r) Calcule el valor promedio de la función dada por  $f(r, \theta, z) = r$ , en coordenadas cilíndricas, sobre la región acotada por el cilindro  $r = 1$  que se encuentra entre los planos  $z = -1$  y  $z = 1$ .
57. (r) Calcule el valor promedio de la función dada por  $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$ , en coordenadas esféricas, sobre la bola sólida  $\rho \leq 1$ .
58. (r) ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma  $r = f(z)$  en coordenadas cilíndricas? ¿Y si la ecuación es  $\rho = f(\phi)$ , en coordenadas esféricas? Justifique su respuesta.

### 2.3. Sustitución en integrales múltiples (r)

59. a) Resuelva el sistema

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

para  $x$  y  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ . Luego obtenga el valor del jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ .

- b) Encuentre la imagen bajo la transformación  $u = x - y$ ,  $v = 2x + y$  de la región triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(1, -2)$  en el plano  $xy$ . Trace la región transformada en el plano  $uv$ .

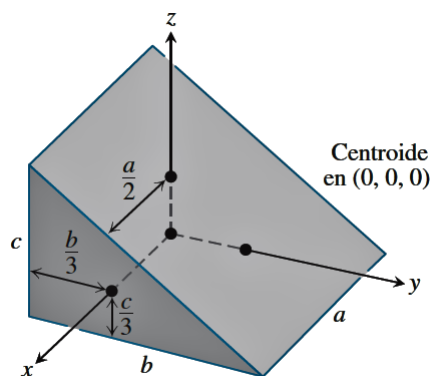
c) Use la transformación anterior para evaluar la integral

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2) dx dy$$

para la región  $R$  del primer cuadrante, acotada por las rectas  $y = -2x + 4$ ,  $y = -2x + 7$ ,  $y = x - 2$ ,  $y = x + 1$ .

## 2.4. Momentos y centros de masa de cuerpos sólidos

60. (r) Determine el momento de inercia de una esfera sólida de radio  $a$  con respecto a un diámetro (use  $\delta = 1$ ).
61. (r) Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura  $h$  y base de radio  $a$ , con respecto a su eje. (Sugerencia: ponga el cono con su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje  $z$ .)
62. (r) Obtenga los momentos de inercia del prisma sólido delimitado por los planos coordenados y los planos  $x = a$ ,  $y = b$  y  $z = c$  ( $a, b$  y  $c$  positivos) con respecto a sus aristas mediante el cálculo de  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ .
63. (o) Un sólido con densidad constante está acotado abajo por la superficie  $z = 4y^2$ , arriba por el plano  $z = 4$  y en los extremos por los planos  $x = 1$  y  $x = -1$ . Obtenga el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los tres ejes.
64. (r)
  - a) Calcule el centro de masa de un sólido de densidad constante acotado abajo por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y arriba por el plano  $z = 4$ .
  - b) Encuentre el plano  $z = c$  que divide al sólido en dos partes de igual volumen. Este plano no pasa por el centro de masa.
65. (r) La cuña de la figura tiene las siguientes dimensiones:  $a = 4$ ,  $b = 6$  y  $c = 3$ . Trace una gráfica para convencerse de que el cuadrado de la distancia de un punto típico  $(x, y, z)$  de la cuña a la recta  $L : z = 0, y = 6$  es  $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$ . Luego calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a  $L$ .



66. (o) Plantee y (r) calcule la masa, el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje  $x$ , de la región sólida  $D$  en el primer octante, dentro del semiespacio  $x \geq 1$ , que está acotada por los planos  $y = 0$ ,  $z = 0$  y el plano  $x + y + z = 2$ , si la densidad del sólido es  $\delta(x, y, z) = 2x$ .

## 3. Ejercicios de refuerzo (sección no obligatoria)

En esta sección se ofrece una lista de ejercicios para ampliar la práctica de integrales múltiples. Se incluye algunos ejercicios que han sido tomados en exámenes.

67. Dada la integral  $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$ ,

a) Cambie a coordenadas esféricas.

- b) Cambie a coordenadas cilíndricas.  
c) Evalúe la integral.
68. Escriba una integral triple iterada para integrar  $f(x, y, z) = 6 + 4y$  sobre la región del primer octante acotada por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y los planos coordenados en coordenadas rectangulares, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. Luego determine la integral de  $f$  evaluando una de las integrales triples.
69. Las integrales triples que implican formas esféricas no siempre requieren coordenadas esféricas para evaluarse de manera conveniente, algunos cálculos se realizan más fácilmente con coordenadas cilíndricas. Como ejemplos:
- a) Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  y abajo por el plano  $z = 2$  usando (i) coordenadas cilíndricas y (ii) coordenadas esféricas.  
b) Un tazón semiesférico de  $5\text{cm}$  de radio se llena con agua hasta  $3\text{cm}$  de la parte superior. Calcule el volumen de agua en el tazón.
70. La base de un sólido cubre la región  $R$  del plano  $xy$  acotada por la parábola  $x^2 + y = 6$  y la recta  $y = x$ . La altura del sólido en cada punto  $(x, y) \in R$  está dada por  $x^2$ . Expresar el volumen del sólido como (i) una integral doble (ii) una integral triple. Luego calcule el volumen de dicho sólido.
71. Se perfora un agujero cilíndrico circular en una esfera sólida, donde el eje del agujero es un diámetro de la esfera. El volumen del sólido restante es

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

- a) Determine el radio del agujero y el de la esfera.  
b) Evalúe la integral.
72. (\*) La función gamma,  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ , amplía la función factorial de los números naturales a otros valores reales y es de amplio uso en estadística. De particular interés es el número

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \quad (1)$$

- a) Demuestre que  $I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . (Recuerde el ejercicio 32.)  
b) Sustituya  $y = \sqrt{t}$  en la ecuación (1) para demostrar que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}$ .
73. En los primeros tres ítems, indique, justificando su respuesta, si la integral dada representa el volumen de algún sólido. En caso afirmativo, describa el sólido y halle el volumen. En caso contrario, explique por qué no.
- a)  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^3 dz \, dy \, dx.$   
b)  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{3-x-y} dz \, dy \, dx.$   
c)  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x-y} dz \, dy \, dx.$   
d) En general, para la integral  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{m-x-y} dz \, dy \, dx$ , indique, justificando su respuesta, cuál debe ser el mínimo valor de  $m$  para que la integral represente el volumen de un sólido.  
e) Finalmente, dada la integral  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x-y} (x^2 + y^2)z \, dz \, dy \, dx$ , indique, cuál es la región de integración y explique si ésta es o no un sólido.

## 4. Ejercicios extras integradores (\*)

74. Considere la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ .
- Describa las superficies de nivel  $f(x, y, z) = k$ , para  $k = 1, 0$  y  $-1$ .
  - Halle los valores extremos de  $f$ , si solo se consideran los puntos de la superficie dada por la ecuación  $y^2 + z^2 = 1$ .
  - Halle, si existe, la diferencial (total) de  $f$  en el punto  $(1, 0, 0)$ .
  - Calcule  $\iiint_E f dV$ , cuando  $E$  es el sólido comprendido entre el cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  y los planos  $z = 0$  y  $z = 2$ .

75. Convierta la siguiente integral (dada en coordenadas rectangulares) a cilíndricas:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x y z^2 dz dy dx.$$

76. Dada  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$ ,

- Represente la región de integración.
  - Calcule la integral planteada.
  - Interprete el valor obtenido en b.
77. Plantee una integral para hallar la masa del sólido que está en el semiespacio  $y \geq 0$ , comprendido entre las superficies  $y = 4 - x^2 - z^2$  y  $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$ .
78. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) ☐  $\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{x+y} (x^2 + y^2) z dz dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^{r(\sin \theta + \cos \theta)} r^3 z dz dr d\theta.$

- b) ☐ La masa del sólido que es la parte del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  sobre el plano  $z = 0$  y bajo la superficie  $z = 9 - x^2 - y^2$ , cuya densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$  se puede calcular como

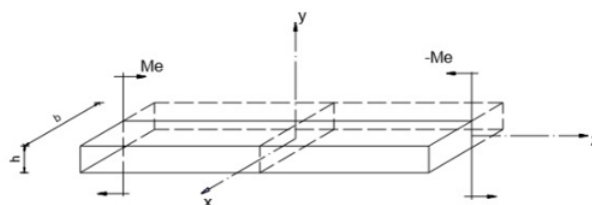
$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( \int_0^5 \delta(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz + \int_5^{9-r^2} \delta(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right) r dr d\theta.$$

## 5. Aplicaciones

79. **Flexión de una viga.** En ingeniería estructural, el segundo momento de área, también denominado segundo momento de inercia o momento de inercia de área, es una propiedad geométrica de la sección transversal de elementos estructurales. Físicamente el segundo momento de inercia está relacionado con las tensiones y deformaciones máximas que aparecen por flexión en un elemento estructural y, por tanto, junto con las propiedades del material determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión.



Consideramos una pieza prismática de eje recto y sección transversal cualquiera, sometida a la acción de dos pares iguales y opuestos, actuantes en un plano que también contiene al eje de la pieza.

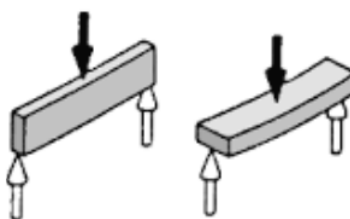


Bajo dicha sollicitación se dice que la pieza está sometida a **flexión pura**. En este ejemplo se llama **eje neutro de la pieza** al lugar geométrico de los baricentros de las secciones transversales. Se puede probar que el momento de las fuerzas internas (que se producen en esta flexión) respecto al eje neutro es proporcional al momento de inercia de la sección transversal respecto al eje  $x$ .

Si la sección transversal plana  $S$  considerada se parametriza mediante coordenadas rectangulares  $(x, y)$ , entonces podemos definir dos momentos de inercia asociados a la flexión según  $x$  o según  $y$  mediante:

$$I_x = \iint_S y^2 dx dy; \quad I_y = \iint_S x^2 dy dx.$$

Físicamente representa una magnitud que cuanto mayor sea, corresponde a una menor deformación de la pieza, cuando ésta es sollicitada a flexión, con  $x$  como eje neutro. La misma depende de la configuración de la sección transversal de la pieza prismática.



Para cada una de las siguientes piezas, ponga medidas genéricas ( $b$  y  $h$  para el rectángulo,  $R$  para el radio y en el último llame a la base,  $b$ , a la altura,  $h$ , y al espesor,  $c$ ) y calcule los momentos de inercia de las secciones transversales de cada una, respecto al eje  $x$ . Use una computadora para comparar los valores de  $I_x$  dando distintos valores a las dimensiones de cada pieza. Extraiga conclusiones.

