UNIDAD 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Parte A: Introducción y Parte B: EDOs de primer orden

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

$$P'(t) = kP(t)$$

Ejercicios del TP 5

9. (r) Considere el modelo de crecimiento poblacional de Malthus dado por la EDO autónoma $\frac{dP}{dt} = kP$, con $k > 0$ constante.
   1. Represente gráficamente la solución $P(t) = P_0 e^{kt}$ en el intervalo $t \geq 0$.
   2. Interprete la derivada $P'(t)$ y discuta a partir de la gráfica las limitaciones físicas de este modelo a largo plazo cuando $t \to \infty$.
10. (o) El modelo malthusiano básico para el crecimiento de una población en el instante t está dado por $P'(t) = kP(t)$, donde k es una constante de proporcionalidad. Modifique o adapte esta ecuación diferencial para modelar cada uno de los siguientes escenarios:
    1. Se incorpora a la población un flujo constante de inmigración de I_0 individuos por unidad de tiempo.
    2. La población posee una tasa de natalidad proporcional a la población P (con constante k_1) y una tasa de mortalidad proporcional al cuadrado de la población P^2 (con constante k_2).
    3. Se considera una población de peces que reúne las condiciones planteadas en el ítem anterior, pero se le añade una tasa

Ejercicio del TP 5

Adaptado del ejercicio 13: Sean la ecuación

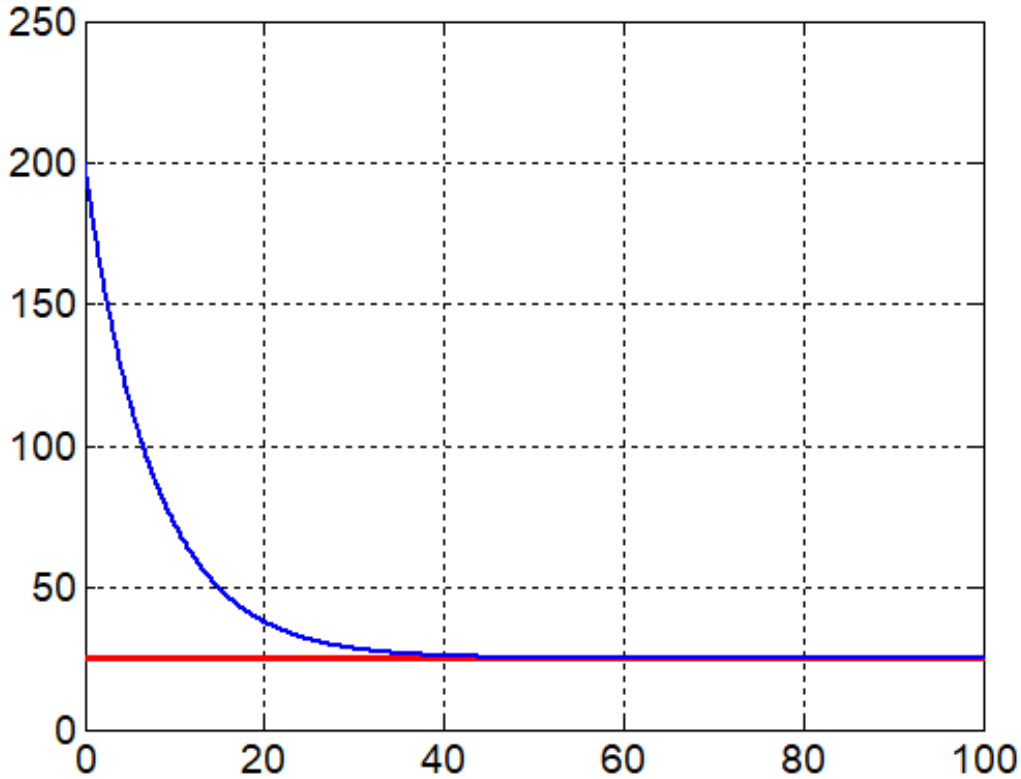
$$T'(t) = k(T(t) - T_m),$$

y el siguiente gráfico de la función T.

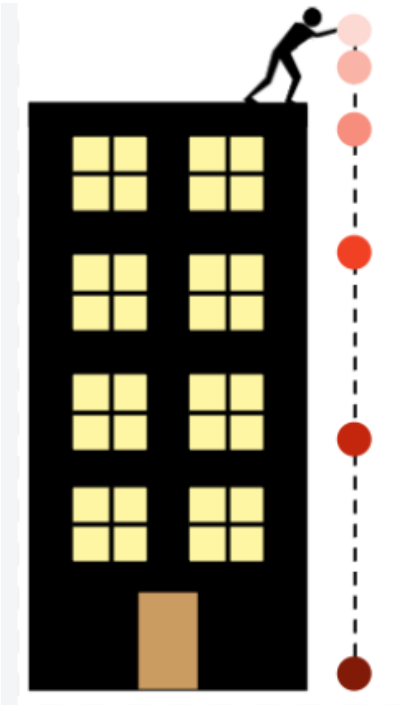
1. Reconozca:

   $$T(0) \text{ y } T_m.$$

2. Indique cuál es el $\lim_{t \to \infty} T(t)$.
3. Determine el signo de k.



Modelos: movimiento vertical y caída libre

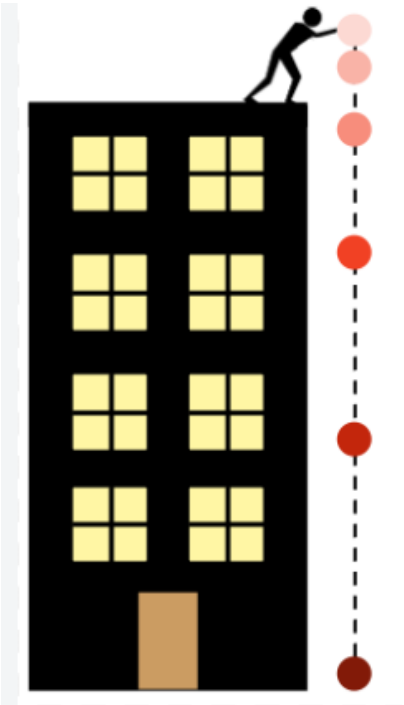


(Considerando dirección hacia abajo como positiva)

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Modelos: movimiento vertical y caída libre



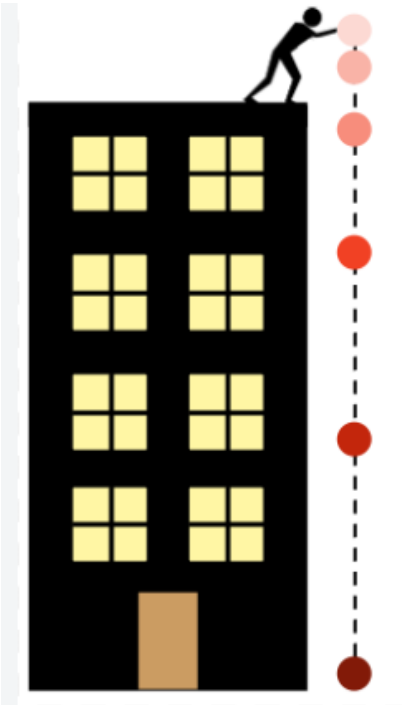
(Considerando dirección hacia abajo como positiva)

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F_{\text{peso}} + F_{\text{resistencia}}$$

Modelos: movimiento vertical y caída libre

Ecuación (diferencial) del movimiento vertical de un cuerpo.



(Considerando dirección hacia abajo como positiva)

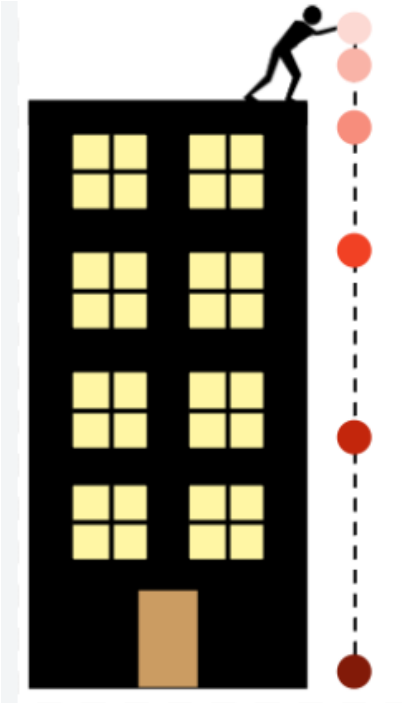
Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F_{\text{peso}} + F_{\text{resistencia}}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^n$$

Modelos: movimiento vertical y caída libre

Ecuación (diferencial) del movimiento vertical de un cuerpo.



(Considerando dirección hacia abajo como positiva)

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F_{\text{peso}} + F_{\text{resistencia}}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^n$$

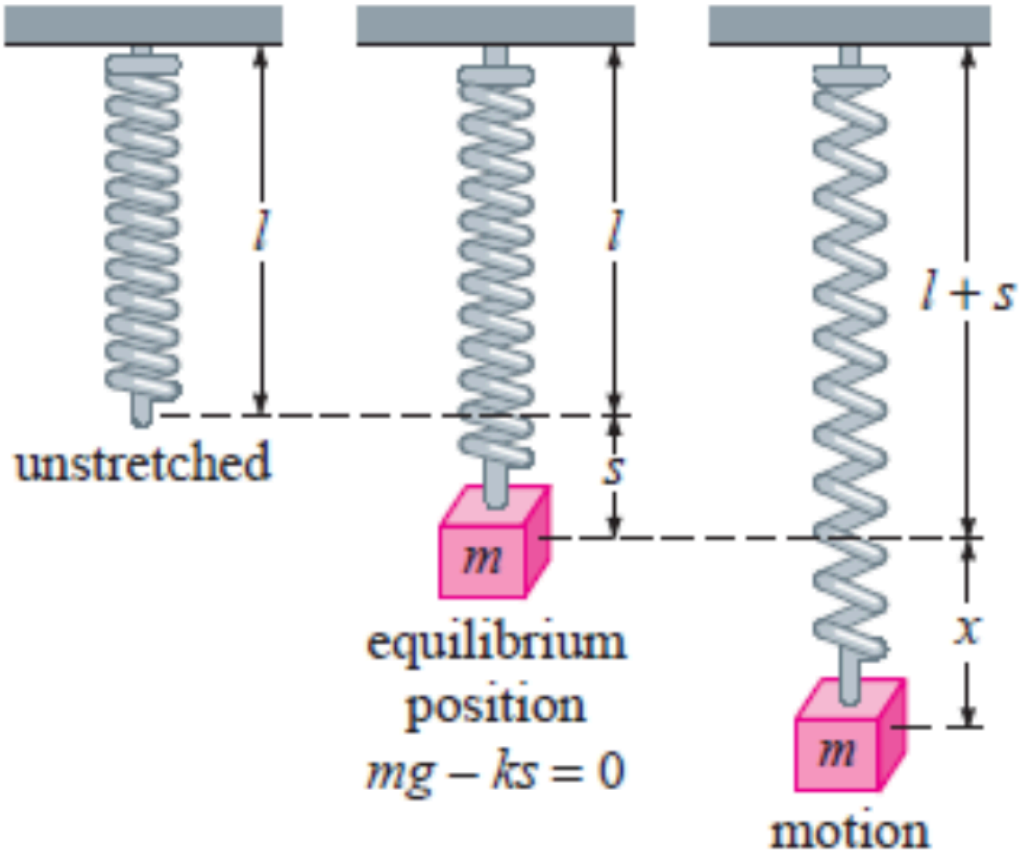
Si se desprecia la resistencia del aire ($k = 0$):

$$\frac{dv}{dt} = g \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

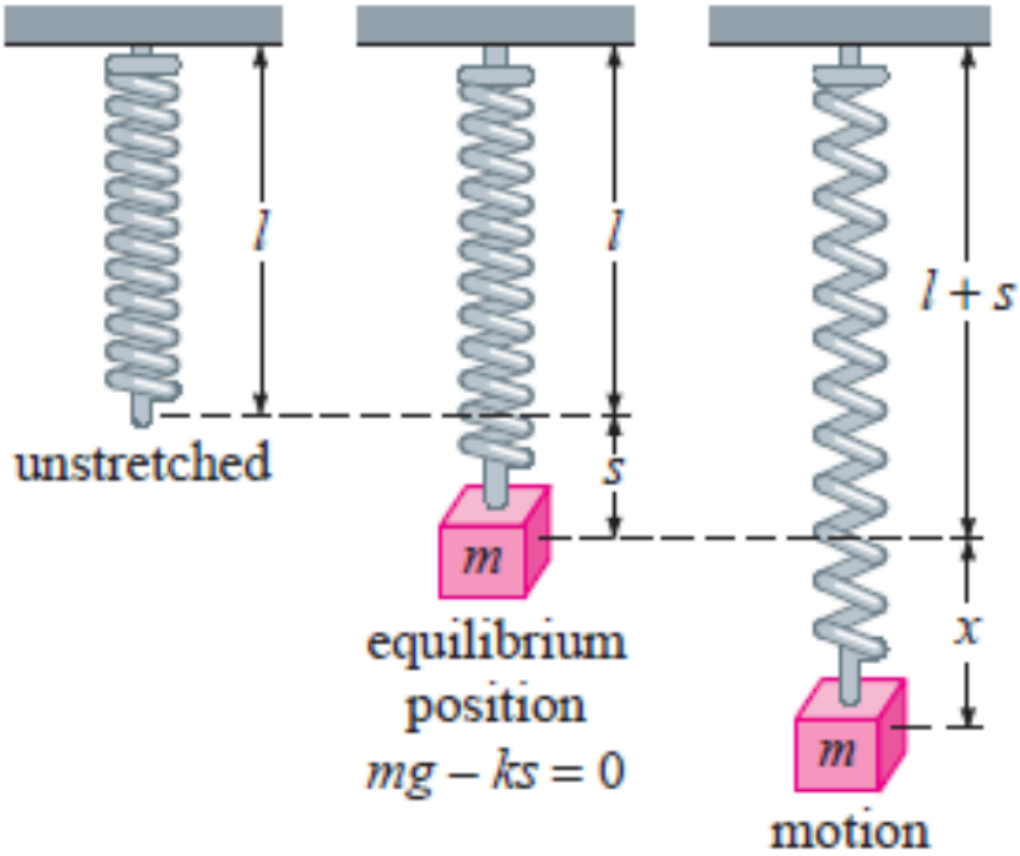
Ya las han resuelto en Física I:

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_1 \Rightarrow y = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

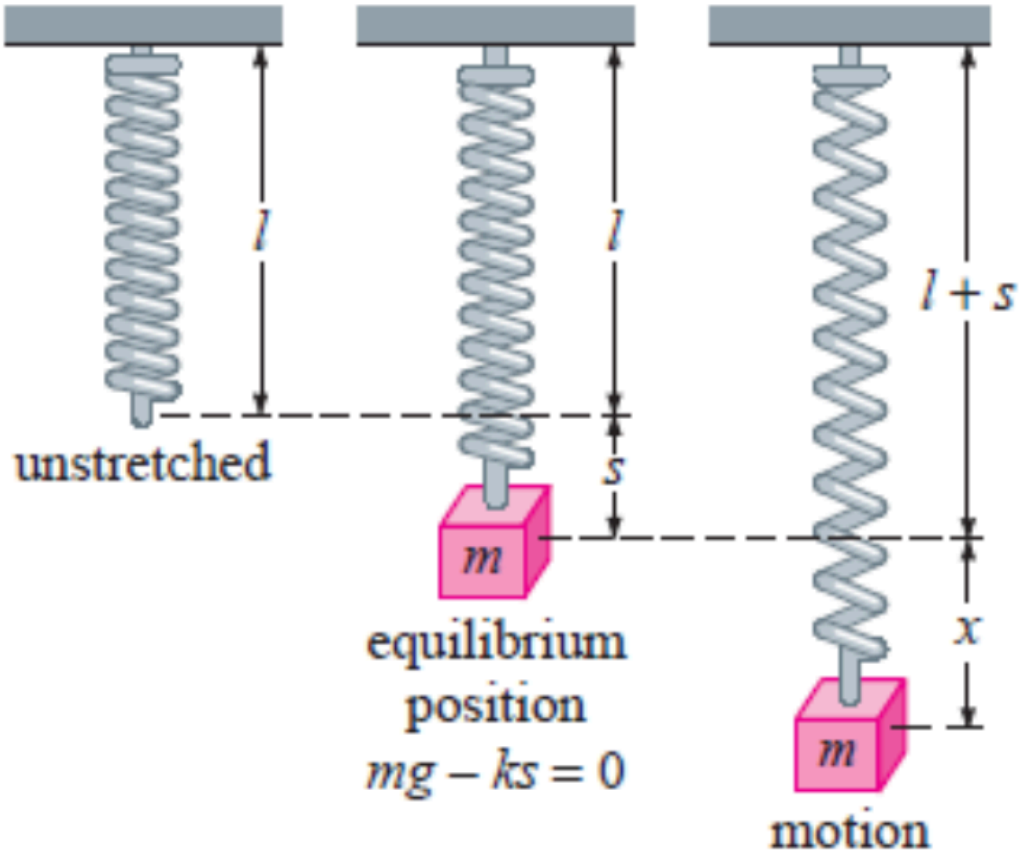
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

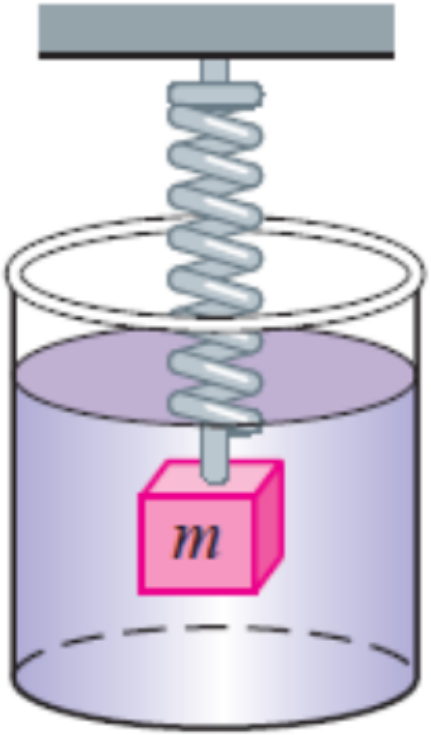
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

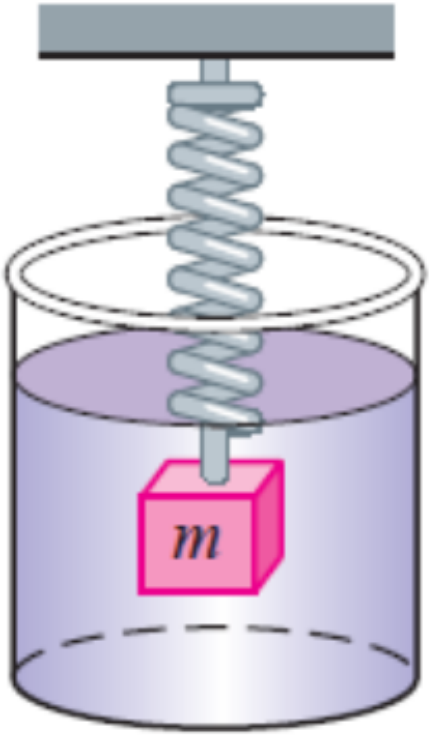
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

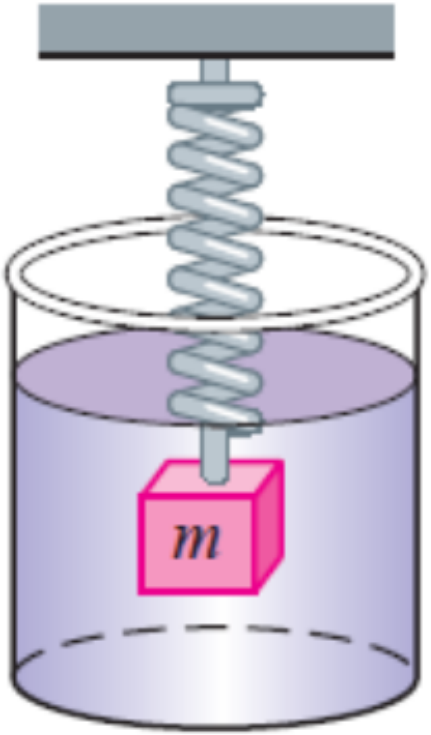
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



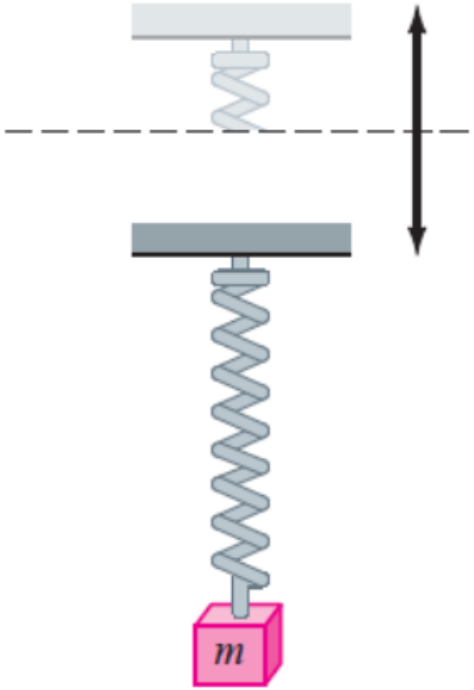
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

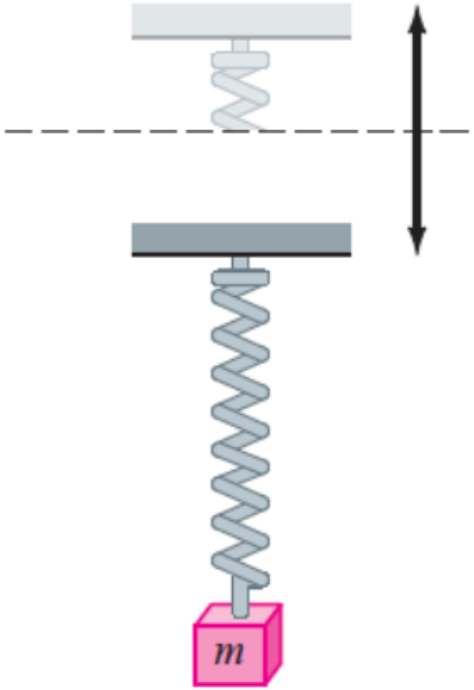
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

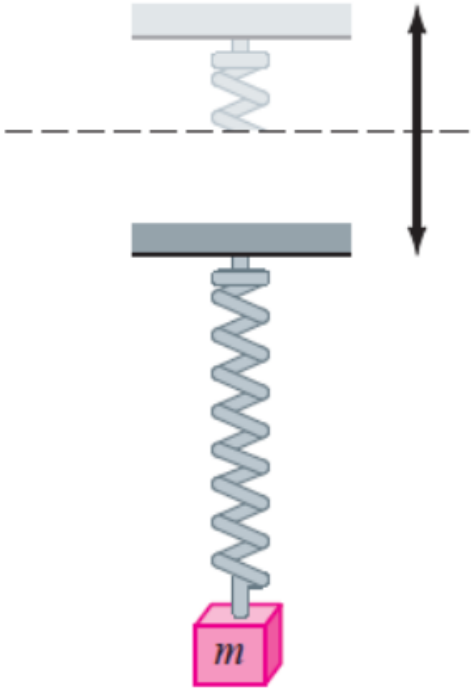
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Definición

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Clasificación

Clasificación de las ED:

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ejercicios del TP5

1. (o) Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden; distinga variable dependiente y variable independiente.

$a)$ $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x.$

$b)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}.$

$c)$ $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10.$

$d)$ $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy.$

$e)$ $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x.$

$f)$ $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t.$

$g)$ $(2x+y+1)y' = 1.$

$h)$ $(2x+\ln x+1)y' = 1.$

$i)$ $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x.$

$j)$ $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0.$

$k)$ $(\operatorname{sen}\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2.$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.
- $y = xe^y + 5$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1-xe^y}$ en el intervalo $(8, +\infty)$.

Ejercicios del TP 5

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la EDO dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.
   $a)$ (o) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$.
   $b)$ (r) $y' + 20y = 24;\ y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$.
   $c)$ (o) $(y - x)y' = y - x + 8;\ y = x + 4\sqrt{x + 2}$.
3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la EDO dada.
   $a)$ (o) $y' = (y - 1)(1 - 2y);\ \ln\dfrac{2y - 1}{y - 1} = x$.
   $b)$ (r) $2xy + (x^2 - y)y' = 0;\ -2x^2y + y^2 = 1$.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed $xy' + y = 0$, una solución es $y = \frac{1}{x}$. Estudiar el dominio.

Ejercicios del TP 5

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

$a)$ (o) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

$b)$ (r) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 5\frac{dy}{dx} - 4y - x^2$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\, e^x$$

PVI

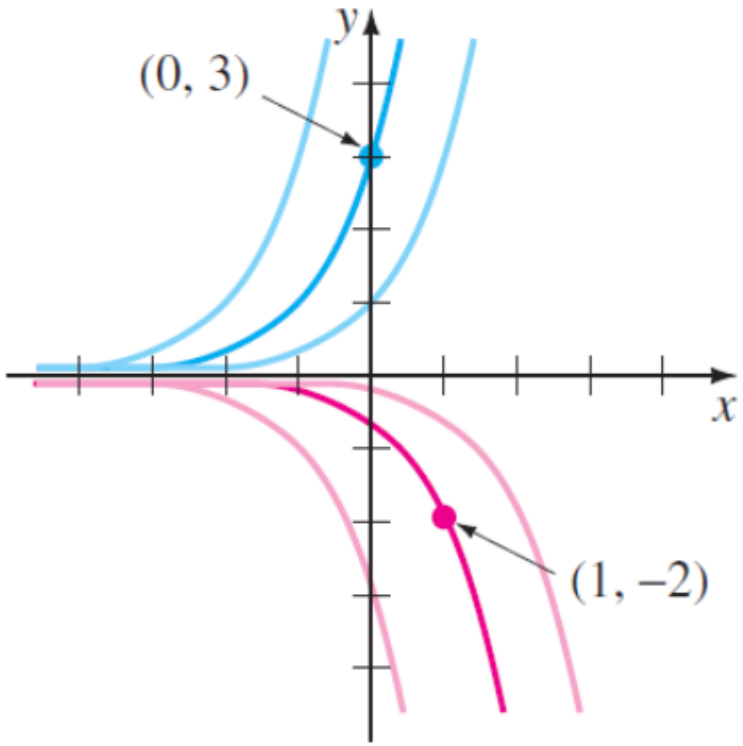
Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\,e^x$$

$$y_1(x) = 3\,e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\,e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi) \qquad 1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \operatorname{sen}(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi) \qquad 1 = -4C_1 \operatorname{sen}(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2 \qquad C_2 = \tfrac{1}{4}$$

$$y(x) = -2\cos(4x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad y(x) = 0$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

Ejercicios del TP 5

7. Determine los valores de los coeficientes que aparecen en la solución dada de la EDO en cada caso, para resolver el PVI o PVF, según corresponda:

$a)$ (o) solución $y = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

$b)$ (r) solución $y = Ae^{x} + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, con valores iniciales

1) $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
2) $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$.

$c)$ (o) solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

$d)$ (r) solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \text{sen}(x + y)$

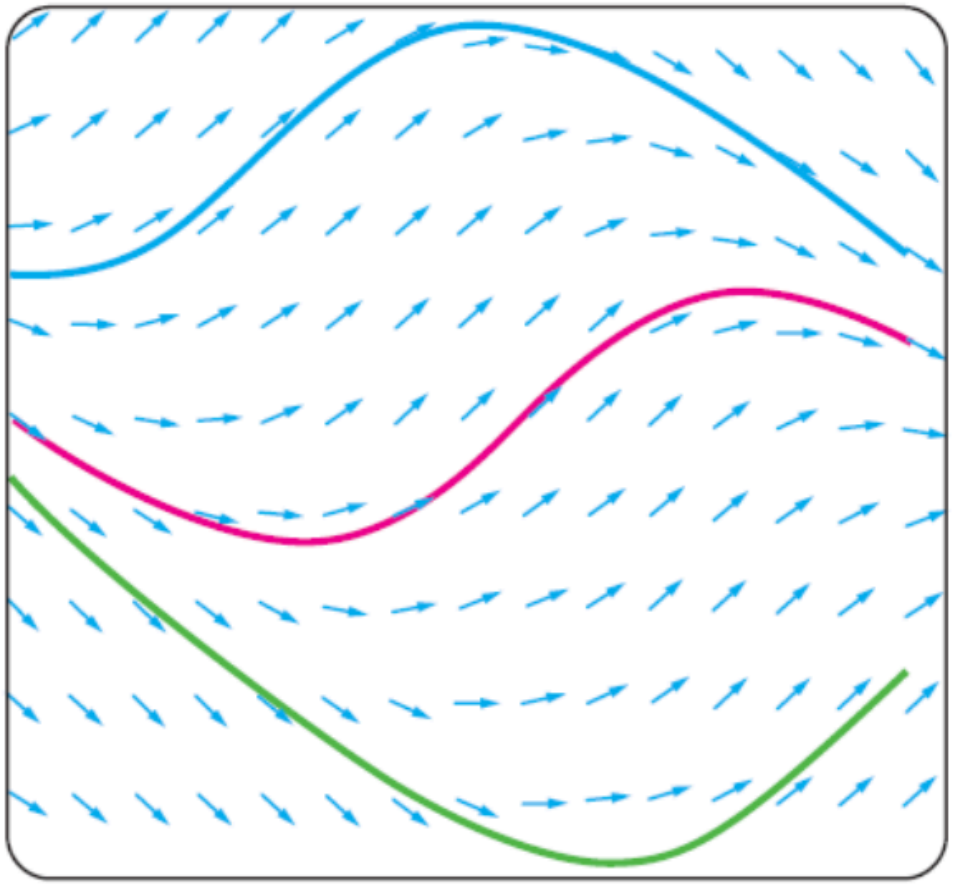


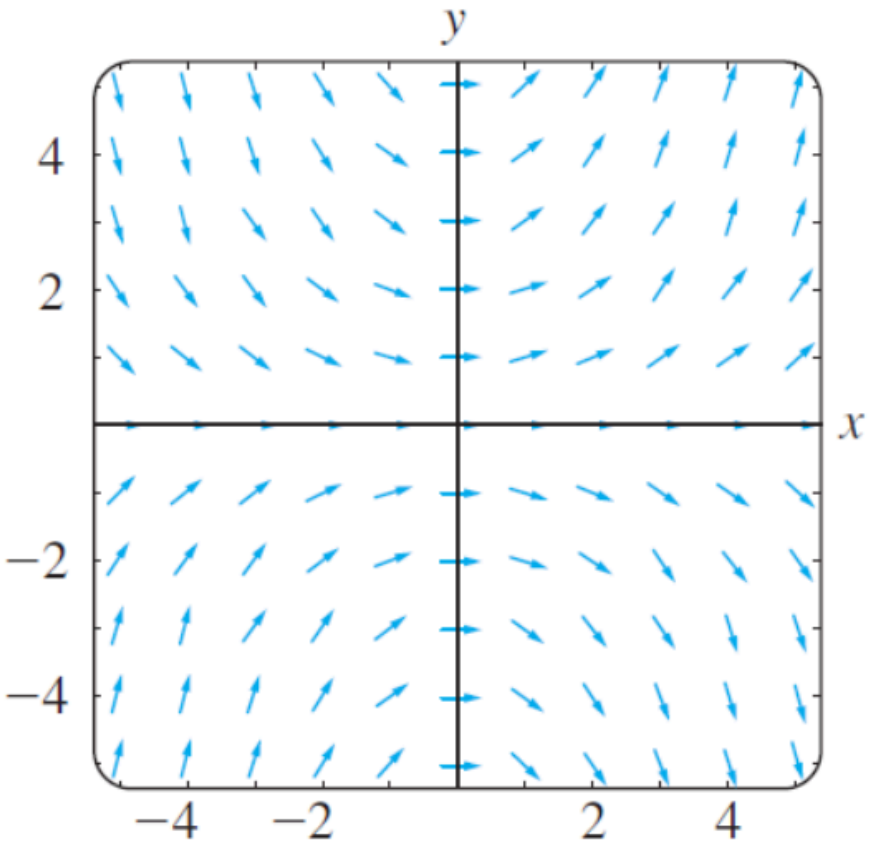
FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

Campos direccionales

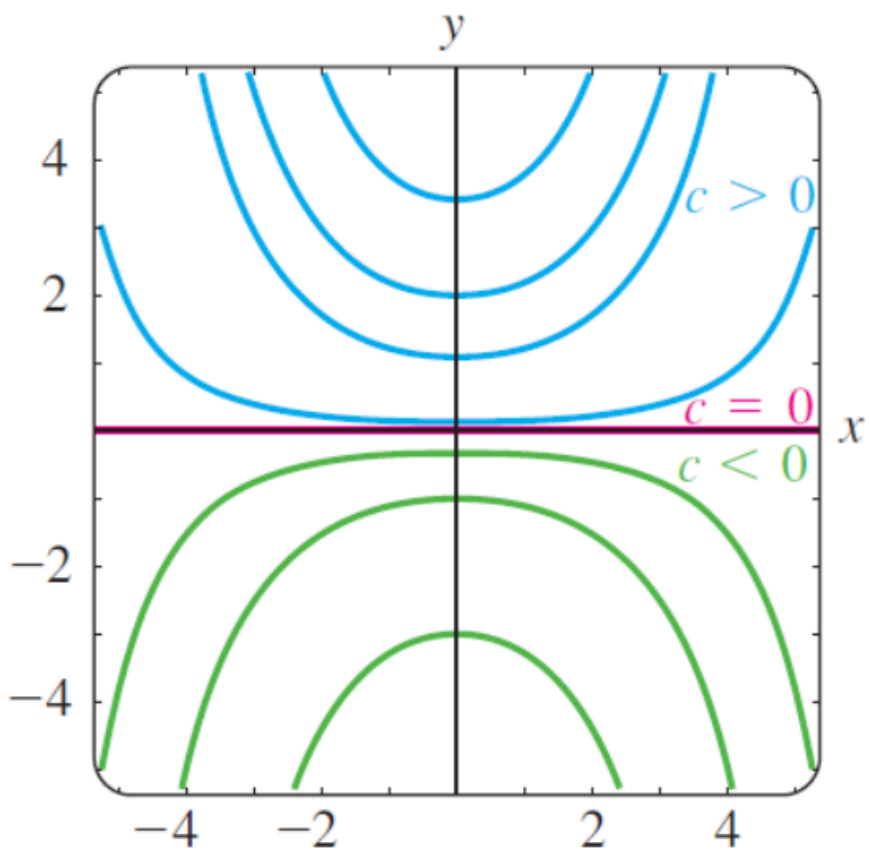
Ejemplo 2:

Campos direccionales

Ejemplo 2:



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



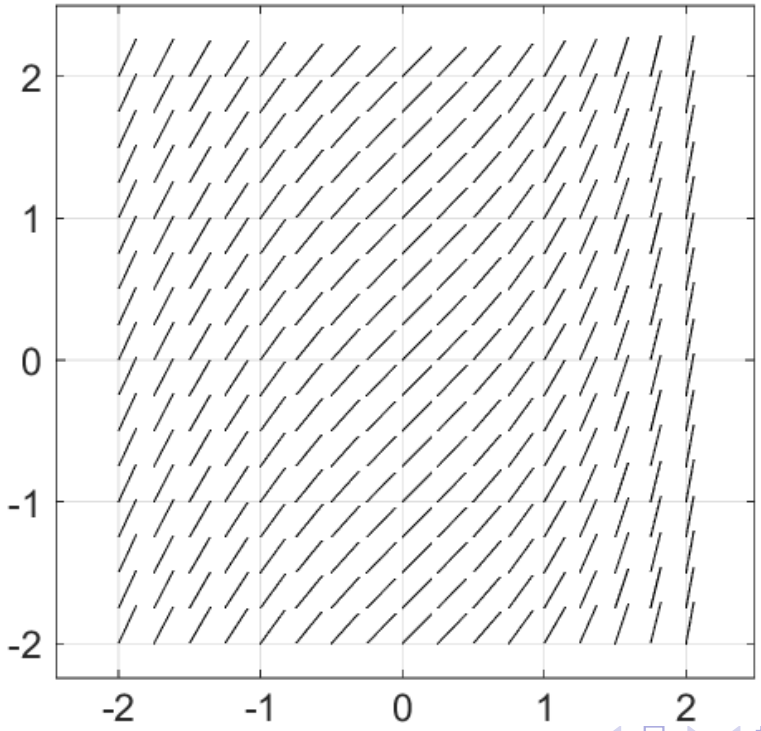
b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

Ejercicios del TP 5

8. (o) Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $e^x - x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto $(1, -\frac{1}{2})$.

$a)$ Plantee un PVI que permita hallarla.

$b)$ Observe el diagrama de direcciones asociado a esta EDO y trace la solución de este PVI en el mismo.



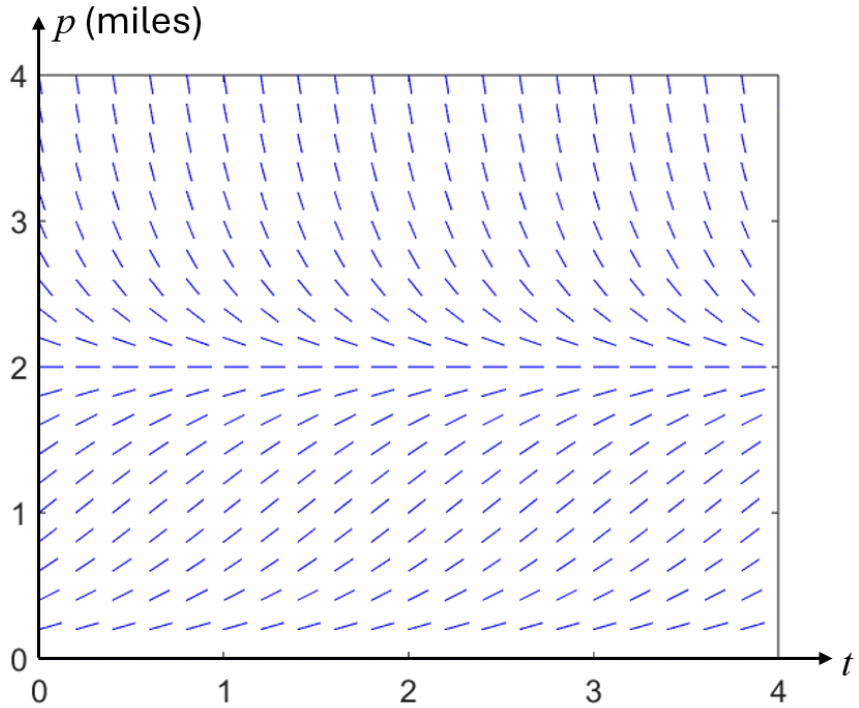
Ejercicios del TP 5

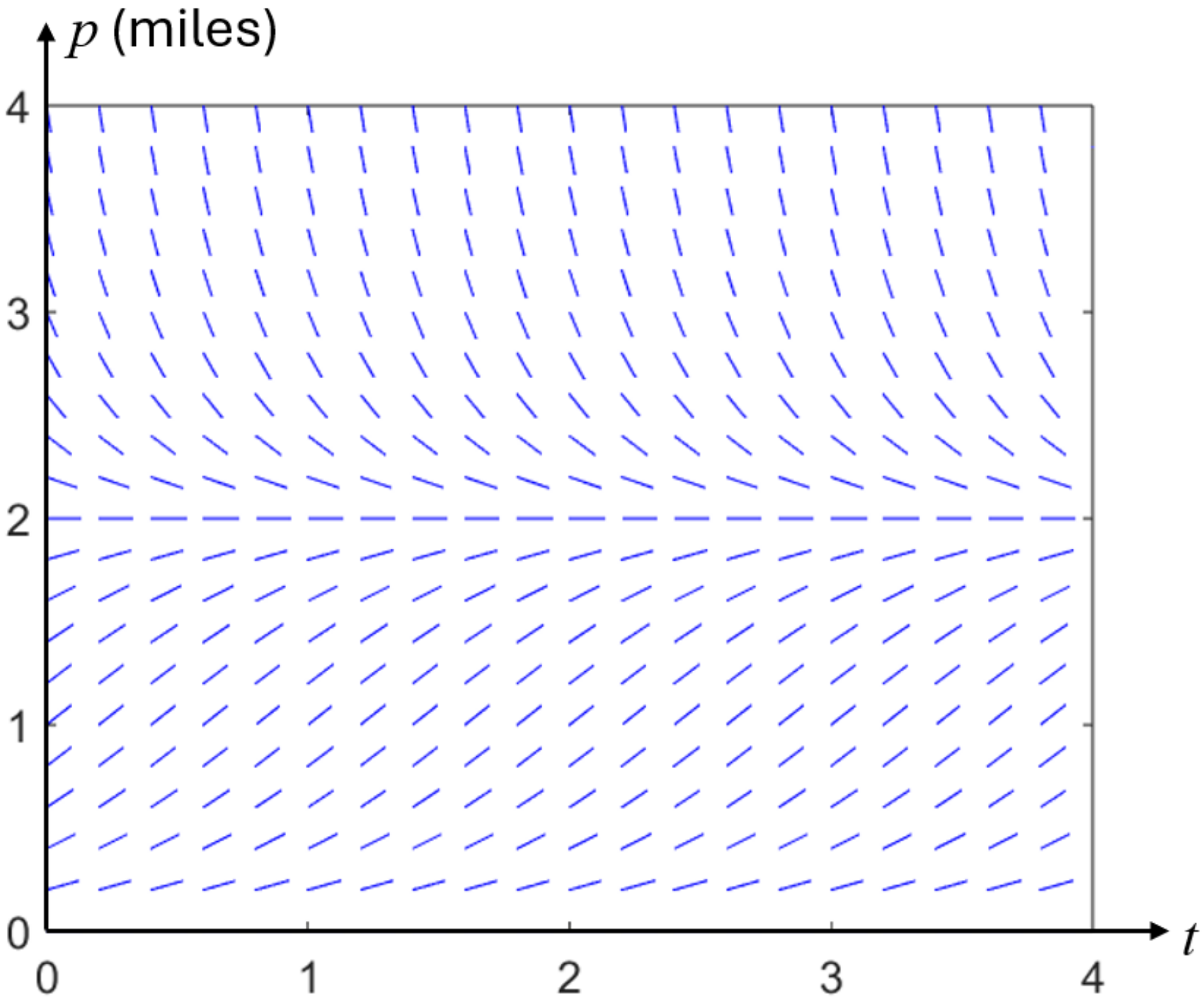
12. (o) La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación: $\dfrac{dp}{dt} = p\,(2-p)$. En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

$a)$ Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?

$b)$ ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?

$c)$ ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?




p (miles)
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
t

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \qquad \textit{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

En la práctica: $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2\,dy = (x-5)dx$ y luego

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + k}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

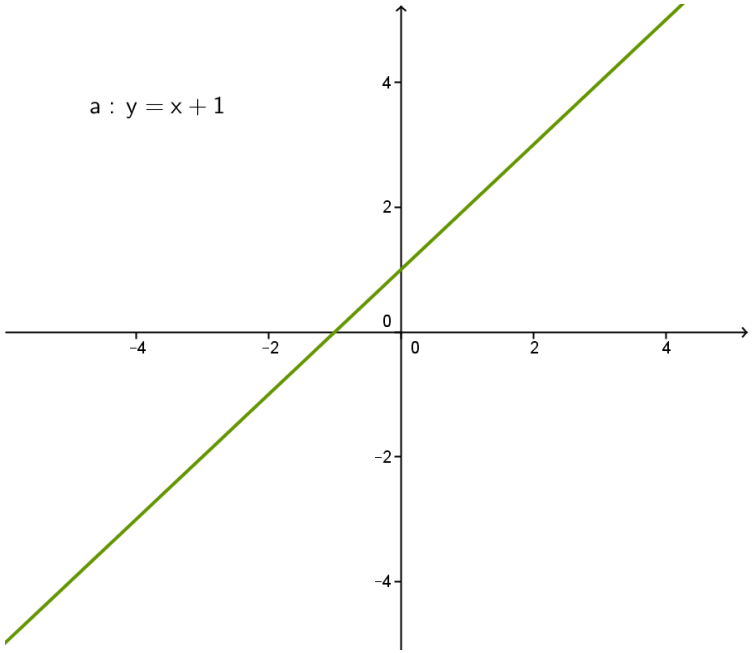
Ejemplos

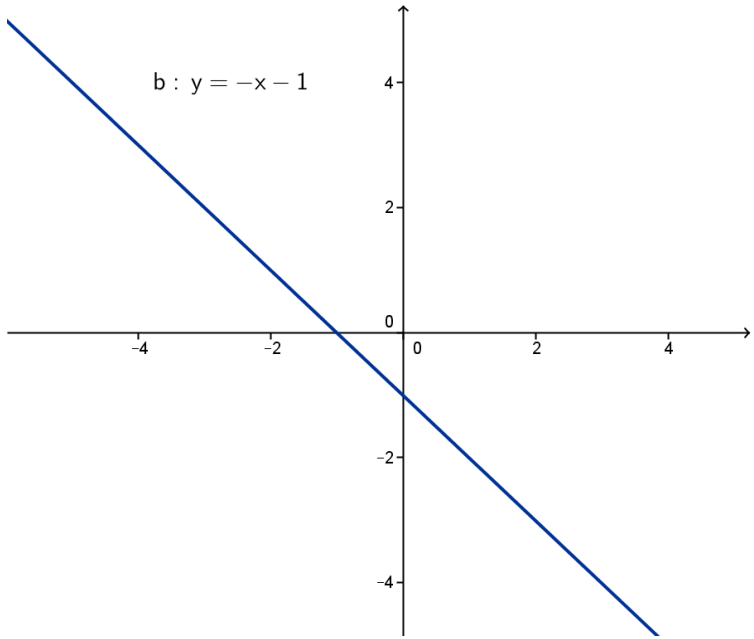
Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$y = C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$ $\qquad$ $y = -C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$

$y = C\,|x+1|$ *en ...*

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$y = C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$ $\qquad$ $y = -C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$

$y = C\,|x+1|$ *en ...* $\qquad$ $y = -C\,|x+1|$ *en ...*

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

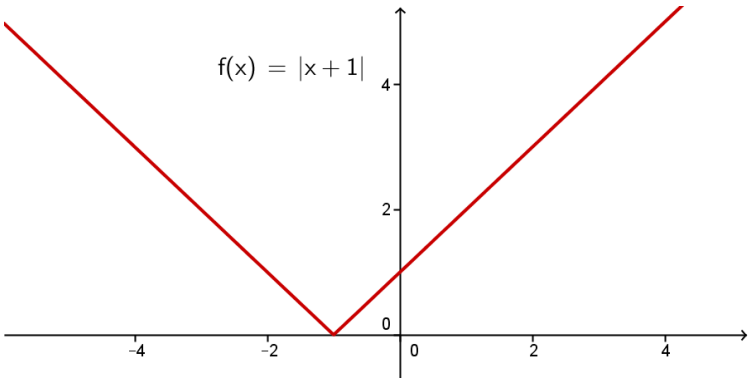
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

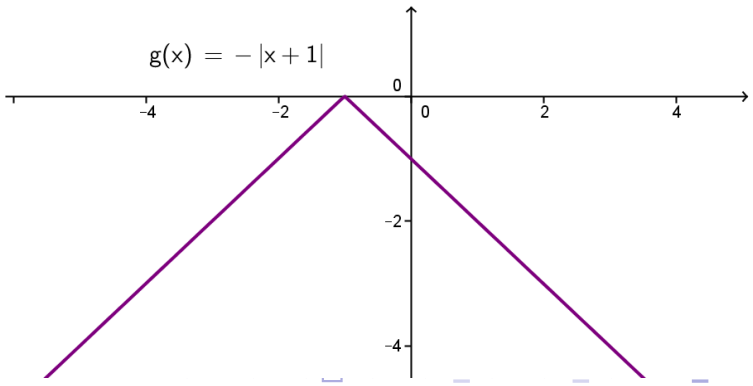
$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$y = C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$ $\qquad$ $y = -C(x+1)$ *en* $\mathbb{R}$

$y = C\,|x+1|$ *en ...* $\qquad$ $y = -C\,|x+1|$ *en ...*

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$





Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad\qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots \qquad\qquad y = -C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R} \qquad\qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots \qquad\qquad y = -C\,|x+1| \qquad \textit{en } \ldots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}$$

$$y = k(1+x) \qquad \textit{en } \mathbb{R}; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\ \text{ si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\ \text{ si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

$$c = 0 \implies y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\ \text{ si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

$$c = 0 \implies y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$

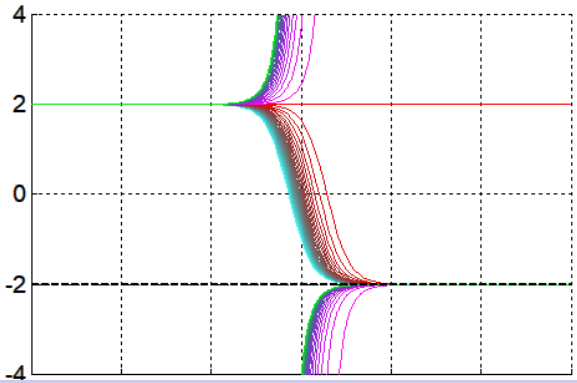
Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

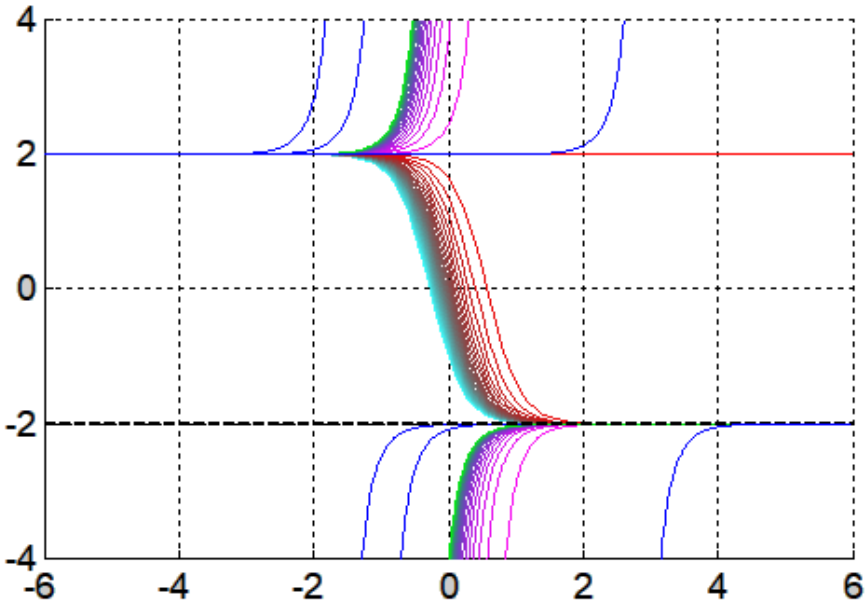
$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

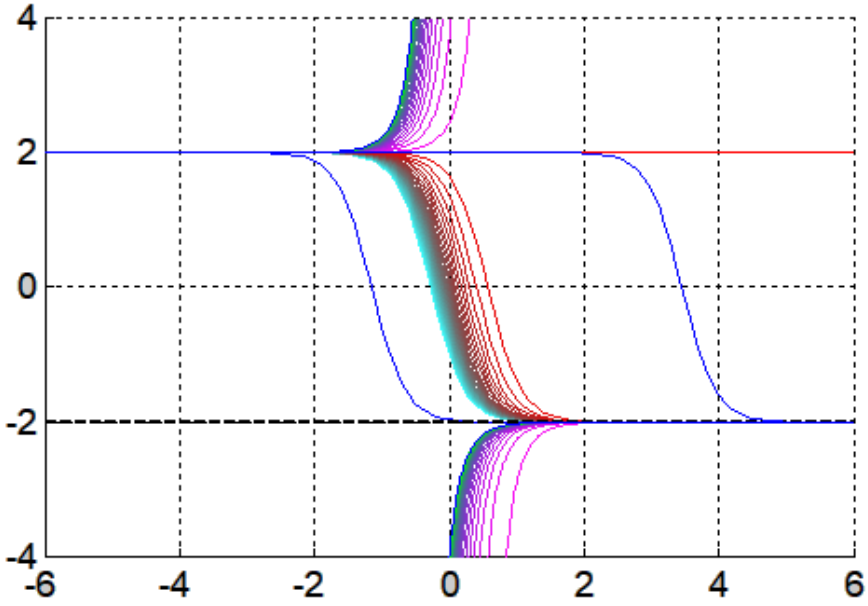
$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\ \text{ si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

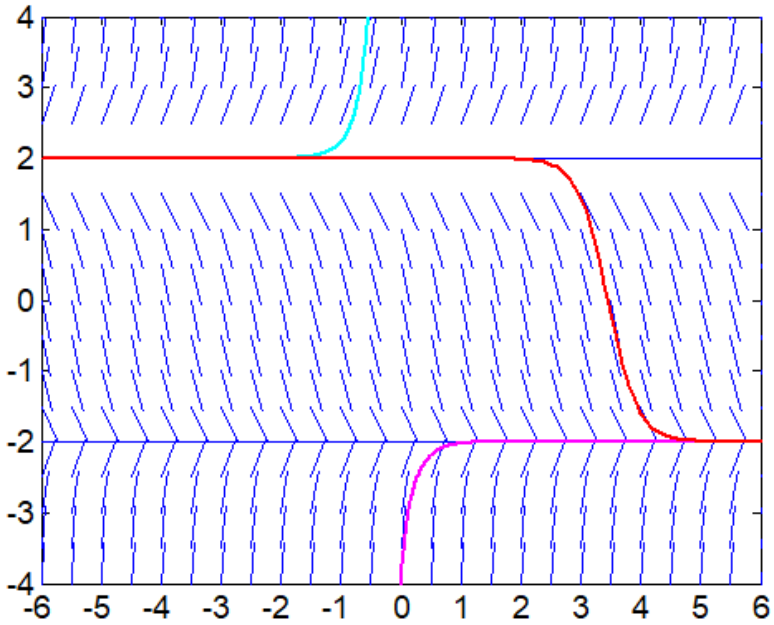
$$c = 0 \implies y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$



Pérdida de una solución







Ejercicios del TP 5

15. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables, si es posible:
    - $a)$ (r) $\dfrac{dy}{dx} = sen(5x)$.
    - $b)$ (o) $dx + e^{3x}dy = 0$.
    - $c)$ (r) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares).
16. (o) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.
17. (o) Resuelva los PVIs que aparecieron en los ejercicios 8 y 12; trace las soluciones en los gráficos correspondientes y constate que coinciden con las halladas anteriormente.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) =$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ejemplos

Resolver:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^3 \ln(x)$$

Ejemplos

Resolver:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^3 \ln(x)$$

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)\frac{y(x)}{x} = \mu(x)x^3 \ln(x)$$

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}(xy(x)) = x^4 \ln(x)$$

$$xy(x) = \int x^4 \ln(x)\, dx$$

$$xy(x) = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

$$y(x) = \frac{x^4 \ln x}{5} - \frac{x^4}{25} + \frac{C}{x}$$

$$\mu'(x) = \mu(x)\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = x$$

Ejercicios del TP 5

20. En cada caso, verifique que la ecuación diferencial dada es lineal; halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.
    - $a)$ (r) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$.
    - $b)$ (o) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$.
    - $c)$ (r) $y' + 3x^2 y = x^2$.
21. (o) Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

Ejercicios del TP 5

23. (o) Caída libre sin resistencia del aire: Un objeto de masa m se deja caer desde una altura h_0 con una velocidad inicial v_0. Tomando el eje y con dirección positiva hacia abajo:
    - $a)$ Plantee el problema de valor inicial (PVI) para la velocidad $v(t)$ usando la 2.ª ley de Newton.
    - $b)$ Clasifique la EDO obtenida (orden, linealidad, separabilidad).
    - $c)$ Resuelva el PVI para obtener la velocidad $v(t)$ y, a partir de ella, determine la posición $y(t)$ mediante integración directa. Verifique que coincide con las fórmulas conocidas de la cinemática.

Ejercicios del TP 5

a) Planteo.
Aplicando la 2.ª ley de Newton ($F = ma = m\frac{dv}{dt}$), donde la única fuerza es el peso $P = mg$ actuando hacia abajo:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \implies \frac{dv}{dt} = g$$

Con la velocidad inicial dada $v(0) = v_0$, el PVI es:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Ejercicios del TP 5

a) Planteo.
Aplicando la 2.ª ley de Newton ($F = ma = m\frac{dv}{dt}$), donde la única fuerza es el peso $P = mg$ actuando hacia abajo:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \implies \frac{dv}{dt} = g$$

Con la velocidad inicial dada $v(0) = v_0$, el PVI es:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

b) Clasificación de la EDO: ordinaria, de primer orden, lineal y separable. Además es autónoma.

Ejercicios del TP 5

c) Resolución analítica:

Velocidad $v(t)$: integramos directamente respecto a t:

$$v(t) = \int g\, dt = gt + C_1$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0 \implies C_1 = v_0$, obtenemos:

$$v(t) = gt + v_0.$$

Posición $y(t)$: Como $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$, integramos nuevamente:

$$y(t) = \int (gt + v_0)\, dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

Considerando la posición inicial $y(0) = h_0 \implies C_2 = h_0$:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0.$$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ o $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa, es

$$N_x = M_y$$

Criterio de los componentes para determinar si $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta
La forma diferencial $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Para encontrar su solución tenemos en cuenta la definición:

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

$S(x,y) = C$ será una solución implícita de la EDO. Esto ocurre si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

$S(x,y) = C$ será una solución implícita de la EDO. Esto ocurre si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$.

LA SOLUCIÓN DE LA EDO ES $S(x,y) = C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

¿Es exacta?

$$-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x + y(1-x^2)y'(x) = 0$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

¿Es exacta?

$$-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x + y(1-x^2)y'(x) = 0$$

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x, y(1-x^2))$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

¿Es exacta?

$$-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x + y(1-x^2)y'(x) = 0$$

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x, y(1-x^2))$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y tiene una función potencial, S:

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

¿Es exacta?

$$-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x + y(1-x^2)y'(x) = 0$$

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x, y(1-x^2))$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y tiene una función potencial, S:

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

¿Es exacta?

$$-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x + y(1-x^2)y'(x) = 0$$

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (-xy^2 + \cos x \operatorname{sen} x, y(1-x^2))$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y tiene una función potencial, S:

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

SOLUCIÓN DE LA EDO:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2} = C$$

Ejercicios del TP 5

26. (o) Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuélvala.

   $a)$ $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0.$

   $b)$ $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)dy = 0.$

   $c)$ $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0.$

28. (o) Resuelva el siguiente PVI:

$$(4y - 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0,\ y(-1) = 2.$$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales
2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

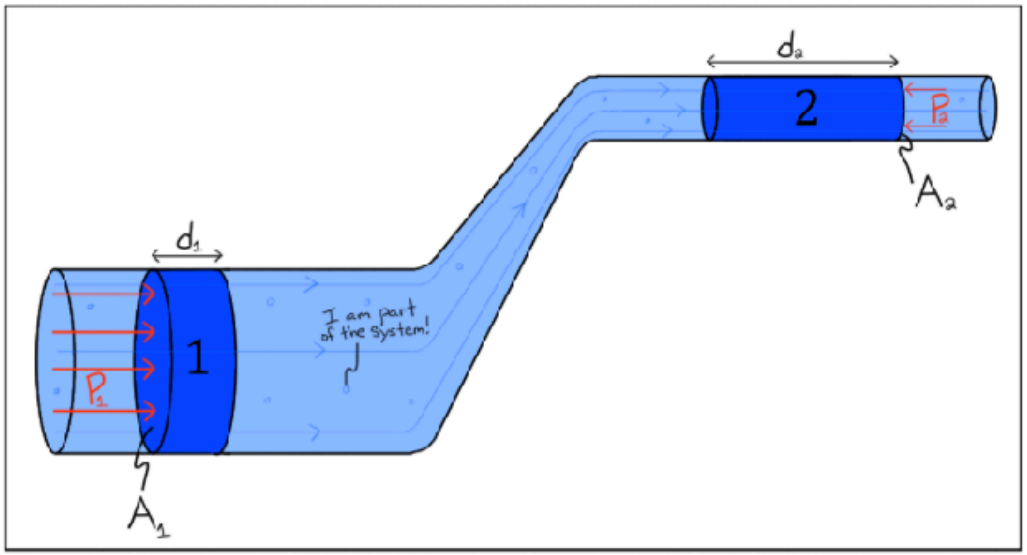
Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

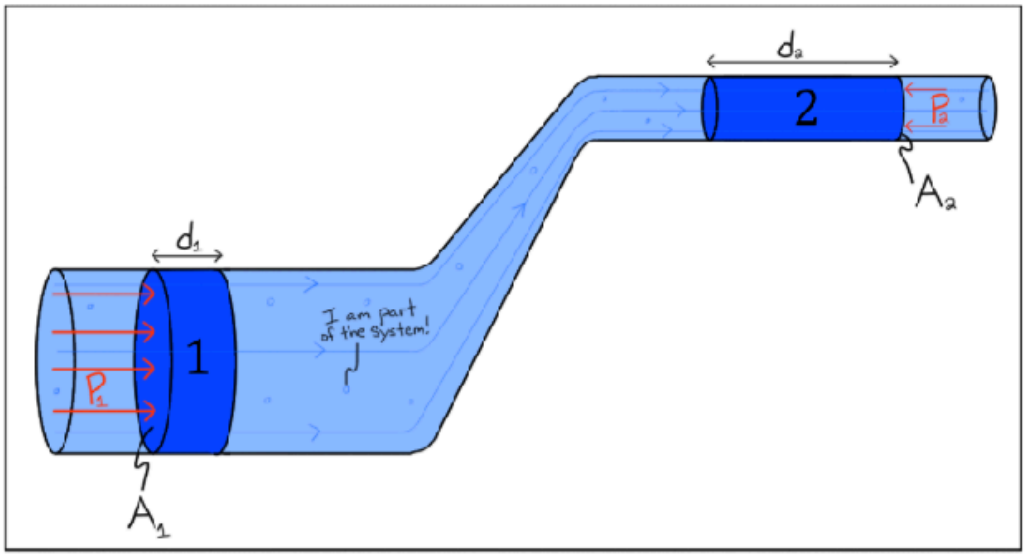


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

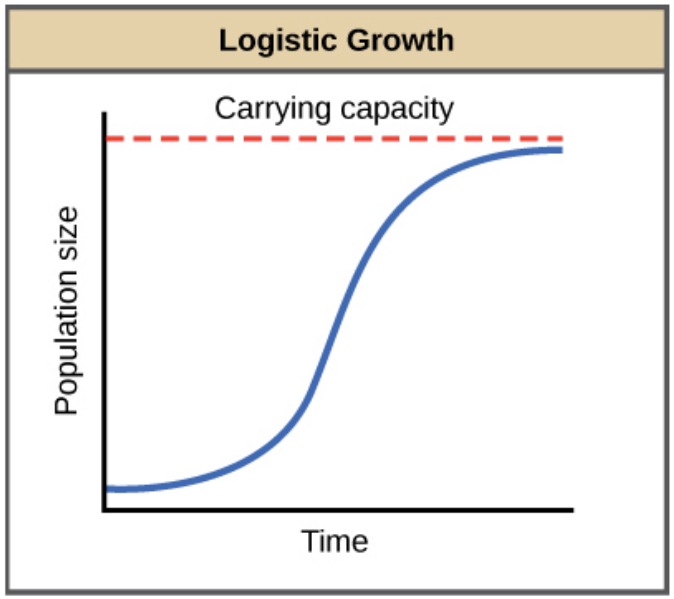
Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } P(x) = 0, \forall x : \qquad y' = Q(x)y^n \quad \text{es separable.}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } P(x) = 0, \forall x : \qquad y' = Q(x)y^n \quad \text{es separable.}$$

$$\text{Si } n = 0 : \qquad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } P(x) = 0, \forall x : \qquad y' = Q(x)y^n \quad \text{es separable.}$$

$$\text{Si } n = 0 : \qquad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

$$\text{Si } n = 1 : \qquad y' + P(x)y = Q(x)y \quad \text{es lineal y separable:}$$

$$y' + (P(x) - Q(x))\, y = 0.$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } P(x) = 0, \forall x: \qquad y' = Q(x)y^n \quad \text{es separable.}$$

$$\text{Si } n = 0: \qquad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

$$\text{Si } n = 1: \qquad y' + P(x)y = Q(x)y \quad \text{es lineal y separable:}$$

$$y' + (P(x) - Q(x))\, y = 0.$$

Si $n \neq 1$ y $P \not\equiv 0$, *se resuelve haciendo la sustitución* $v = y^{1-n}$.

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \dfrac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)},$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo:

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \dfrac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \dfrac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \dfrac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo: $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \dfrac{1}{x}$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo: $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo: $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo: $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y}$$

Ejemplo

$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$ Reconozco $n = 2$ y asumo $x \neq 0$.

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n, en este caso y^2, con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2}$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos:} \quad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustitumos en la ED (2) para obtener:

$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x$ (lineal en v). Resuelvo: $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{-x^2 + cx}.$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x)$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $\frac{v'}{-3} - v = 1$, $v' + 3v = -3$.

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $\frac{v'}{-3} - v = 1$, $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $\frac{v'}{-3} - v = 1$, $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}.$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4 \implies v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \implies v' = -3y^{-4}y'$$

Dividimos la ecuación diferencial dada por y^4 y obtenemos

$$y^{-4}y' - y^{-3} = 1,$$

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $\frac{v'}{-3} - v = 1$, $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}.$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$

Ejercicios del TP 5

32. Resuelva las siguientes *ecuaciones de Bernoulli* usando sustituciones adecuadas:
    1. (o) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$.
    2. (r) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$.
    3. (o) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.
33. (o) Resuelva el ejercicio 33 como EDO de Bernoulli. Compare las soluciones halladas gráficamente con las soluciones analíticas correspondientes a los PVIs.