# ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 2026

Trabajo Práctico N°5: Ecuaciones diferenciales



**Consideraciones Generales:** Selección de ejercicios de temas de la Unidad 5, Ecuaciones diferenciales ordinarias. Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelaje de Dennis Zill, novena edición, Ed. CENGAGE Learning
Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con los Jefes de Trabajos Prácticos y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (*), que cada estudiante puede elegir si lo resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

**Objetivos:** al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de:

- Clasificar ecuaciones diferenciales según su orden, linealidad e identificar variables dependientes e independientes, reconociendo intervalos de definición apropiados para soluciones explícitas e implícitas.
- Analizar cualitativamente el comportamiento a largo plazo de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante la interpretación y el trazado sobre diagramas (campos) de direcciones.
- Resolver problemas de valores iniciales (PVI) y de valores en la frontera (PVF) para ecuaciones de primer y segundo orden, determinando las constantes de la solución general a partir de condiciones dadas.
- Seleccionar y aplicar con destreza el método analítico adecuado (separación de variables, factores integrantes para lineales, criterios de exactitud, o sustitución de Bernoulli) para hallar soluciones generales y singulares de ecuaciones de primer orden.
- Evaluar la independencia lineal de conjuntos de funciones utilizando el concepto de conjunto fundamental de soluciones y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes.
- Resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas de orden superior utilizando los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros, discriminando las componentes transitorias y de estado estable de la solución.
- Modelar y resolver problemas clásicos y estructurales de la ingeniería —tales como sistemas masa-resorte (movimientos libres, amortiguados, forzados), la ley de enfriamiento de Newton, dinámica de poblaciones y la vibración lateral en estructuras de pórticos bajo cargas armónicas.
- Comunicar con solvencia técnica y lenguaje matemático preciso la resolución de problemas de ingeniería, tanto de forma escrita (LaTeX) como oral.

**Abreviaturas usadas:**
**EDO significa Ecuación Diferencial Ordinaria;**
**PVI significa Problema de Valor/es Inicial/es;**
**PVF significa Problema de Valor/es en la Frontera.**

## 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

### 1.1. Introducción: soluciones, PVI, PVF y diagramas de direcciones

1. (o) Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden; distinga variable dependiente y variable independiente.

*a)* $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x$.

*b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$.

*c)* $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$.

*d)* $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$.

*e)* $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$.

*f)* $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$.

*g)* $(2x+y+1)y' = 1$.

*h)* $(2x + \ln x + 1)y' = 1$.

*i)* $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$.

*j)* $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$.

*k)* $(\operatorname{sen}\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2$.

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la EDO dada. Indique el intervalo de definición $I$ apropiado para cada solución.

   *a)* (o) $2y' + y = 0$; $y = e^{-x/2}$.

   *b)* (r) $y' + 20y = 24$; $y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$.

   *c)* (o) $(y-x)y' = y - x + 8$; $y = x + 4\sqrt{x+2}$.

3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la EDO dada.

   *a)* (o) $y' = (y-1)(1-2y)$; $\ln\dfrac{2y-1}{y-1} = x$.

   *b)* (r) $2xy + (x^2 - y)y' = 0$; $-2x^2y + y^2 = 1$.

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición $I$ apropiado para cada solución.

   *a)* (o) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

   *b)* (r) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2$; $y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$.

5. (r) Sea la ecuación diferencial $y^2y' = \frac{1}{3}$.

   *a)* Verifique que $y(x) = \sqrt[3]{x}$ es solución de la EDO dada.

   *b)* Para la solución presentada en el ítem *a)*, indique cuál es un intervalo dominio.

6. (r) Determine el o los valores de $m$ para que $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.

7. Determine los valores de los coeficientes que aparecen en la solución dada de la EDO en cada caso, para resolver el PVI o PVF, según corresponda:

   *a)* (o) solución $y = A\cos x + B\operatorname{sen} x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

   *b)* (r) solución $y = Ae^x + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, con valores iniciales

      1) $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

      2) $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$.

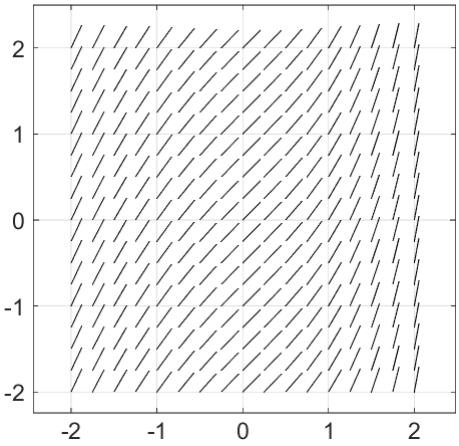
   *c)* (o) solución $y = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

   *d)* (r) solución $y = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

8. (o) Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $e^x - x$ y cuyo gráfico interseca al eje $y$ en el punto $(1, -\frac{1}{2})$.

   *a)* Plantee un PVI que permita hallarla.

   *b)* Observe el diagrama de direcciones asociado a esta EDO y trace la solución de este PVI en el mismo.




9. (r) **Análisis gráfico del modelo de crecimiento poblacional de Malthus:** Considere el modelo de crecimiento poblacional de Malthus dado por la EDO autónoma[1] $\frac{dP}{dt} = kP$, con $k > 0$ constante.

   a) Represente gráficamente la solución $P(t) = P_0 e^{kt}$ en el intervalo $t \geq 0$.

   b) Interprete la derivada $P'(t)$ y discuta a partir de la gráfica las limitaciones físicas de este modelo a largo plazo cuando $t \to \infty$.

10. (o) **Adaptación de modelos poblacionales:** El modelo malthusiano básico para el crecimiento de una población en el instante $t$ está dado por $P'(t) = kP(t)$, donde $k$ es una constante de proporcionalidad. Modifique o adapte esta ecuación diferencial para modelar cada uno de los siguientes escenarios:

    a) Se incorpora a la población un flujo constante de inmigración de $I_0$ individuos por unidad de tiempo.

    b) La población posee una tasa de natalidad proporcional a la población $P$ (con constante $k_1$) y una tasa de mortalidad proporcional al cuadrado de la población $P^2$ (con constante $k_2$).

    c) Se considera una población de peces que reúne las condiciones planteadas en el ítem anterior, pero se le añade una tasa constante de captura $h_0$ debido a la pesca comercial.

11. (r) **Deducción guiada: De Malthus a la Ecuación Logística:** La clásica ecuación de Malthus falla frecuentemente para valores grandes de $t$, debido a que en muchos casos el crecimiento de la población se estanca a causa de la limitación de recursos. Para adaptar el modelo a este escenario, supongamos que en cierta población aislada, el número máximo de individuos que pueden vivir es $K$ y modifiquemos la constante $k$ de crecimiento Malthusiana por otra que sea variable, que decrece linealmente a medida que la población $P$ aumenta (debido a la competencia por recursos limitados):

$$k(P) = a - bP \quad (a, b > 0)$$

    a) Reemplace $k$ por $k(P)$ en la EDO de Malthus $\frac{dP}{dt} = kP$ para obtener la EDO de la *dinámica logística*.

    b) Exprese la EDO obtenida en la forma estándar

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \tag{1}$$

    identificando qué representan las constantes $r$ y $K$ en términos de $a$ y $b$.

    c) Analice en la expresión (1), cuál es o a qué tiende el valor de $\frac{dP}{dt}$ cuando $P$ es muy pequeño, casi nulo, y a qué tiende el valor de $\frac{dP}{dt}$ cuando $P$ tiende a $K$. Interprete estos valores como tasas de crecimiento de la población.

12. (o) La población $p$ (en miles) de determinada especie en el instante $t$ está dada por la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = p\,(2 - p).$$

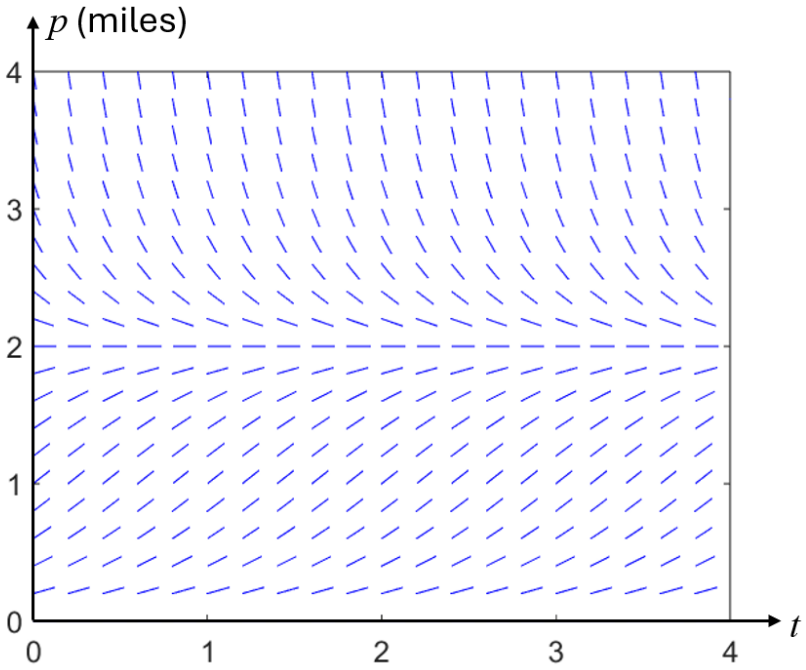
    En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

    *a*) Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?

[1] Se llama autónoma aquella EDO en la que la variable independiente no aparece en la expresión igualada a la derivada.

*b*) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?

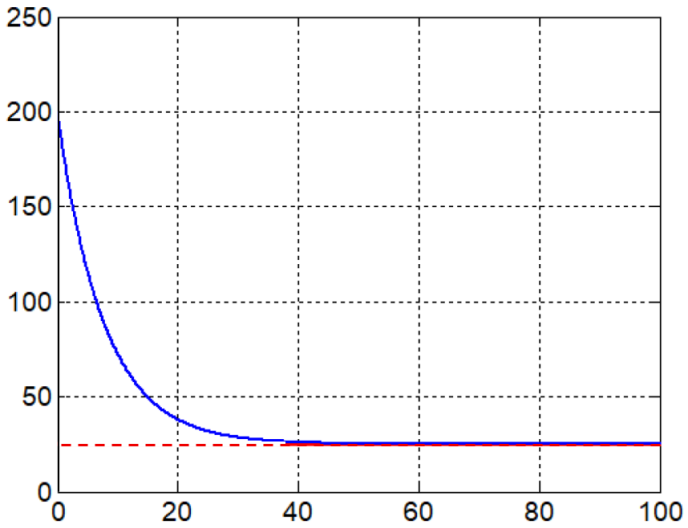
*c*) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?




13. (o) **Análisis gráfico de la Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton:** La temperatura $T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio a temperatura constante $T_m$ evoluciona según la ecuación diferencial:

$$T'(t) = k(T(t) - T_m), \quad k = cte.$$

A continuación se muestra la gráfica de la función temperatura $T(t)$ obtenida experimentalmente para un objeto depositado sobre una mesada:

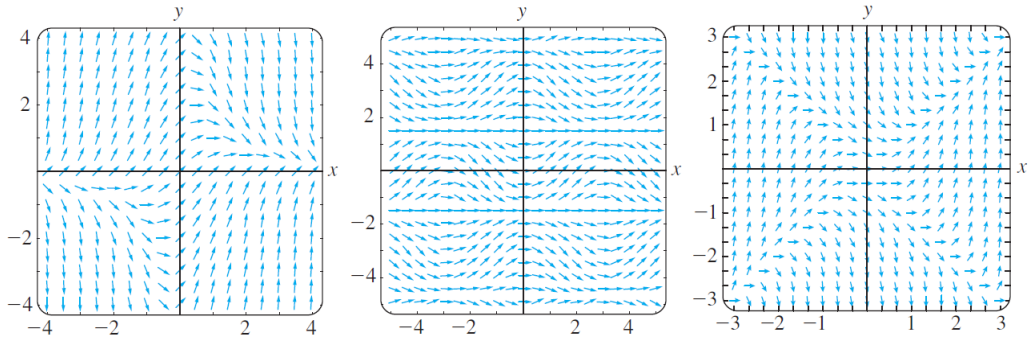



a) A partir de la observación de la gráfica, determine justificadamente la temperatura inicial aproximada del cuerpo $T(0)$ y la temperatura aproximada del ambiente $T_m$.

b) Indique cuál es el valor de $\lim_{t\to\infty} T(t)$ e interprete su significado físico.

c) Determine el signo de la constante de proporcionalidad $k$ observando si el cuerpo se está enfriando o calentando.

14. (r) Dados los siguientes campos direccionales:



*a*) Indique a qué campo direccional corresponde cada ecuación:

$$i)\ y' = x^2 - y^2; \qquad ii)\ y' = 1 - xy; \qquad iii)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x)\cos(y).$$

*b*) Para la ecuación dada en *ii*) represente en el gráfico correspondiente las curvas solución correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

1) $y(0) = 0$;
2) $y(2) = 2$.

## 1.2. EDO Separables

15. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables, si es posible:

*a*) (r) $\dfrac{dy}{dx} = sen(5x)$.

*b*) (o) $dx + e^{3x}dy = 0$.

*c*) (r) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares).

16. (o) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.

17. (o) Resuelva los PVIs que aparecieron en los ejercicios 8 y 12; trace las soluciones en los gráficos correspondientes y constate que coinciden con las halladas anteriormente.

18. (r) Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2+1)$, $x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

19. (r) De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto de temperatura $T$ se introduce en un medio a temperatura $M$, la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferentica $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial $dT/dt = k(M - T)$.

*a*) Resuelva la ecuación diferencial en términos de $T$.

*b*) Una cerveza fría, inicialmente a $2°C$, se calienta hasta $5°C$ en 3 minutos estando en un cuarto a $21°C$. Determine la temperatura de la cerveza si uno se demora 30 minutos en tomarla.

## 1.3. EDO Lineales

20. En cada caso, verifique que la ecuación diferencial dada es lineal; halle la solución general y el intervalo $I$ en el que está definida.

*a*) (r) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$.

*b*) (o) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$.

*c*) (r) $y' + 3x^2y = x^2$.

21. (o) Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

22. (r) Al determinar el factor integrante en la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden no usamos una constante de integración en la integral de $P(x)$, indique por qué.

23. (o) Caída libre sin resistencia del aire: Un objeto de masa $m$ se deja caer desde una altura $h_0$ con una velocidad inicial $v_0$. Tomando el eje $y$ con dirección positiva hacia abajo:

    *a*) Plantee el problema de valor inicial (PVI) para la velocidad $v(t)$ usando la 2.ª ley de Newton.

    *b*) Clasifique la EDO obtenida (orden, linealidad, separabilidad).

    *c*) Resuelva el PVI para obtener la velocidad $v(t)$ y, a partir de ella, determine la posición $y(t)$ mediante integración directa. Verifique que coincide con las fórmulas conocidas de la cinemática.

24. (r) Caída de un paracaidista (Resistencia lineal del aire): Un cuerpo de masa $m$ cae verticalmente bajo la acción de la gravedad, pero experimenta una fuerza de resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea, $F_r = -kv$ $(k > 0)$. Tomando el sentido hacia abajo como positivo:

    *a*) Muestre que la ecuación diferencial del movimiento es:

    $$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

    *b*) Resuelva la EDO por separación de variables o como lineal de primer orden para hallar $v(t)$ sabiendo que $v(0) = v_0$.

    *c*) Calcule la velocidad límite del cuerpo, es decir, $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Interprete físicamente el resultado.

25. (r) Caída con resistencia cuadrática:Para altas velocidades (como en el salto en paracaídas antes de abrirlo), la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, $F_r = -kv^2$.

    *a*) Plantee la EDO que gobierna la velocidad $v(t)$ durante la caída.

    *b*) Verifique que la EDO es autónoma y encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación. ¿Qué significado físico tiene el punto de equilibrio positivo?

## 1.4. EDO Exactas

26. (o) Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuélvala.

    *a*) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$.

    *b*) $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)dy = 0$.

    *c*) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$.

27. (r) Considere la ecuación diferencial $M(x, y)+N(x, y)y'(x) = 0$. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y que $f$ es una función potencial de $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^2$. Si es posible, dé una solución para la ecuación planteada. Si no es posible, explique por qué.

28. (o) Resuelva el siguiente PVI:

    $$(4y - 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0,\ y(-1) = 2.$$

29. (r) Determine el valor de $k$ para el que la ecuación diferencial es exacta:

    $$(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0.$$

30. (r)

    *a*) Muestre que una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación $(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0$ es $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.

    *b*) Demuestre que las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(1) = 1$ determinan la misma solución implícita.

    *c*) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial dada, tales que $y_1(0) = -2$ y $y_2(1) = 1$.

31. (r) Justifique que toda EDO de primer orden separable $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ es exacta.

## 1.5. EDO con soluciones por sustitución

32. Resuelva las siguientes *ecuaciones de Bernoulli* usando sustituciones adecuadas:

    *a*) (o) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$.

    *b*) (r) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$.

    *c*) (o) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

33. (o) Resuelva el ejercicio 12 como EDO de Bernoulli. Compare las soluciones halladas gráficamente con las soluciones analíticas correspondientes a los PVIs.

34. (r) En el estudio de la dinámica de población, uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la ecuación logística

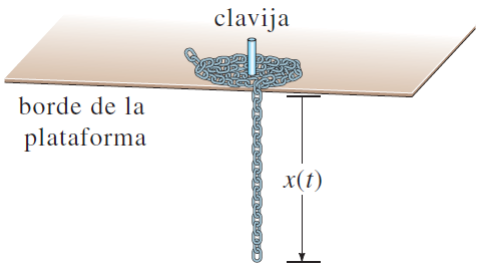
$$P'(t) = P(t)(a - bP(t)),$$

    donde $a$ y $b$ son constantes positivas. Resuelva la ecuación, notando que es tanto separable como de Bernoulli. Indique en qué instante la tasa de crecimiento de la población es máxima.

35. (r) Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal, y la parte restante de la cadena cuelga sobre el borde de la plataforma. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa 2 lb/pie y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t = 0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la cadena sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t > 0$, entonces $v = dx/dt$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las fuerzas de rozamiento se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona $v$ con $x$ está dado por

$$x\,v\,v' + v^2 = 32x.$$

    Resuelva la ecuación.




## 1.6. (r) Ejercicios integradores

36. (r) **Análisis cualitativo y deducción de constantes en enfriamiento:** Se coloca un termómetro que marca 20°C en un horno mantenido a una temperatura constante $T_m = 180$°C. Tras 1 minuto, el termómetro marca 80°C.

    a) Sin resolver explícitamente la EDO $T'(t) = k(T(t) - T_m)$, determine argumentando cuantitativamente si la razón de cambio $T'(t)$ es mayor en $t = 0$ o en $t = 1$ minuto.

    b) Halle el valor exacto de la constante $k$ a partir de la solución del PVI.

    c) Determine cuánto tiempo deberá transcurrir (desde el inicio) para que la lectura alcance los 150°C.

37. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, exacta, lineal, Bernoulli o ninguna. Algunas ecuaciones pueden ser de más de una clase. No las resuelva.

    *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x}$.

    *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y - x}$.

    *c*) $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$.

    *d*) $(y^2 + 1)dx = y\sec^2 x dy$.

    *e*) $y(\ln x - \ln y)dx = (x \ln x - x \ln y - y)dy$.

    *f*) $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$.

    *g*) $(2x + y + 1)y' = 1$.

38. Clasifique cada ecuación diferencial y resuelva.

    *a*) $y' = (xy)^{1/4}$.
    *b*) $y' + y = xe^{-x} + 1$ .
    *c*) $2ydx - xdy = 0$.
    *d*) $(2x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + y^2)dy = 0$.
    *e*) $xy' + y = x^4y^3$.

39. Encuentre, si existe, $M(x, y)$ para que la ecuación $M(x, y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0$ sea exacta.

40. Indique si la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es o no separable, si es o no lineal y si es o no exacta. Justifique.

41. La ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$ es exacta y corresponde a otros tipos también. Usando solamente el hecho de que es exacta, resuelva el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$, sujeto a la condición $y(1) = 2$.

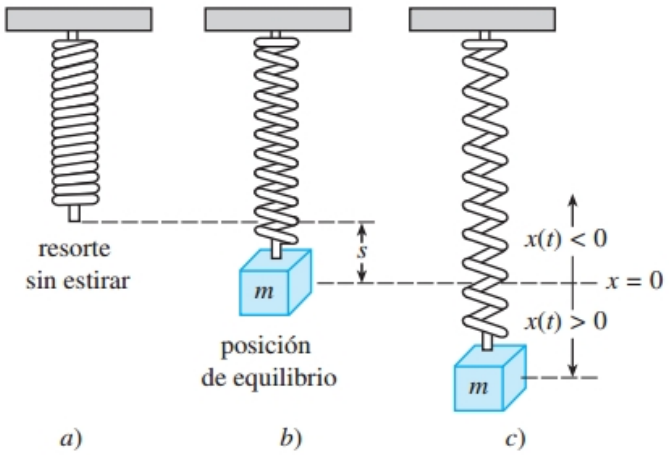
42. Resuelva $x^2y\,dx = (y - \frac{x^3}{3})\,dy$, tal que $y(1) = 2$.

43. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' - 2y = x$.

# 2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

## 2.1. Sistemas masa-resorte: modelos (Tómese $g = 10$ m/s$^2$)

44. (r) Una masa $m$ se fija a un extremo de un resorte. El resorte se estira $s$ unidades y cuelga en reposo en su posición de equilibrio tal como se muestra en la figura. Posteriormente, el sistema se pone en movimiento, siendo $x(t)$ la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que las fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso, la fuerza de restauración del resorte, la fuerza debida a la fricción, que ocasiona un amortiguamiento del movimiento del cuerpo y una fuerza externa que fuerza el movimiento. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento (Ley de Hooke: la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total), para cada caso:




    *a*) Movimiento libre no amortiguado.
    *b*) Movimiento libre amortiguado.
    *c*) Movimiento forzado.

45. Si colocamos una masa de 5 kg en un resorte, éste se alarga 10 cm y queda en equilibrio. Halle la constante del resorte y exprese la ecuación diferencial que describe el movimiento en este caso, sabiendo que es libre y no amortiguado.
    Solución: $5\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 0$.

46. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte.

    *a*) Determine la constante del resorte.

    *b*) Plantee la ecuación diferencial del movimiento, sabiendo que se trata de un movimiento libre amortiguado en el que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.

    *c*) Escriba en términos de su planteo, las siguientes condiciones: la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s.

    *d*) Reescriba la ecuación diferencial, agregando a su modelo una fuerza externa dada por $f(t) = 3\cos(t)$ N.

    Solución: $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 0$. Condiciones: $x(0) = 2$ m, $\dot{x}(0) = -3$ m/s. $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 3\cos(t)$ N.

47. (r) **Clasificación de ecuaciones de movimiento masa-resorte:** Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el desplazamiento $x(t)$ de un sistema masa-resorte, indique si el movimiento es *libre no amortiguado*, *libre amortiguado* o *forzado*. Indique además la frecuencia natural $\omega_0$ del sistema homogéneo asociado:

    a) $\ddot{x}(t) + 16x(t) = 0$

    b) $2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$

    c) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 9x(t) = 5\cos(2t)$

## 2.2. Problemas de valores iniciales y de valores en la frontera

48. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.

    *a*) (r) $y = C_1x + C_2x\ln x$, $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(0,\infty)$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

    *b*) (o) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    *c*) (r) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\,\text{sen}\,x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

## 2.3. EDO Homogéneas

49. (r) En los siguientes problemas encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial dado tiene una solución única.

    *a*) $(x-2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    *b*) $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

50. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty,\infty)$:

    *a*) (o) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$.

    *b*) (r) $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \text{sen}^2\,x$.

    *c*) (r) $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$.

51. (r) ¿Qué deben cumplir las funciones $y_1$ e $y_2$ definidas en un mismo intervalo $I$ para que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ sea una solución general de la ecuación diferencial $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$ en $I$, cualesquiera sean las constantes $c_1$ y $c_2$?

## 2.4. EDO homogéneas con coeficientes constantes

52. (r) Compruebe que las siguientes funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo dado. Forme la solución general.

    *a*) $y'' - y' - 12y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$, $y_1 = e^{4x}$, $(-\infty,\infty)$.

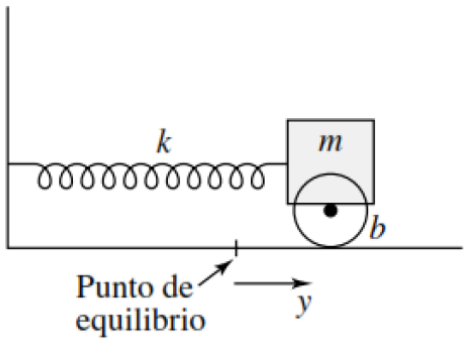
    *b*) $y^{(4)} + y'' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \text{sen}\,x$, $(-\infty,\infty)$.

53. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

    *a*) (o) $4y'' + y' = 0$.
    *b*) (o) $y'' + 8y' + 16y = 0$.
    *c*) (o) $y'' - 3y' + 2y = 0$.
    *d*) (r) $2y'' + 2y' + y = 0$.
    *e*) (o) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$.
    *f*) (r) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$.
    *g*) (o) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
    *h*) (r) $y^{(4)} - y'' = 0$.

54. (r) Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 25N/m$. Exprese la ecuación del movimiento para los casos en que el movimiento está amortiguado, considerando que el amortiguamiento se modela a través de un término proporcional a la velocidad (de sentido contrario), cuya constante de proporcionalidad es $b$. Identifique la frecuencia natural del sistema. Resuelva para los casos en que $b$ vale 0, 6, 10 y 12 $(kg/s)$, con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Interprete cada solución en términos de movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

55. (r) Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa $m$ unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la figura. Proponga una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte y la fricción (amortiguamiento). Posteriormente, resuelva la ecuación diferencial suponiendo que el amortiguamiento es cero. Determine la frecuencia de oscilación del sistema.




56. (r) **Construcción del modelo masa-resorte a partir de datos experimentales:** Se cuelga una masa de 2 kg de un resorte vertical, lo que produce un alargamiento de $0,2$ m hasta alcanzar la posición de equilibrio ($g = 9,8$ m/s$^2$). Posteriormente, se sumerge el sistema en un fluido que ejerce una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 12 veces la velocidad instantánea.

    a) Determine la constante elástica $k$ del resorte y la constante de amortiguamiento $\beta$.
    b) Plantee el PVI para el desplazamiento $x(t)$ respecto del equilibrio si la masa se desplaza $0,1$ m por debajo de la posición de equilibrio y se suelta desde el reposo.
    c) Clasifique el tipo de movimiento (subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado) analizando las raíces de la ecuación característica. Halle la solución $x(t)$ y exprésela en la forma alternativa $x(t) = Ae^{-\lambda t}\,\text{sen}(\omega_d t + \phi)$, identificando la amplitud $A$, la frecuencia cuasiperiódica $\omega_d$ y el ángulo de fase $\phi$.

## 2.5. EDO no Homogéneas

57. (r) En los siguientes problemas compruebe que la familia dada es solución de la ecuación diferencial no homogénea:

    *a*) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$.
    *b*) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$, $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$.

### 2.6. EDO no Homogéneas con coeficientes constantes

58. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:
    *a*) (o) $y'' + y' - 6y = 2x$.
    *b*) (o) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.
    *c*) (o) $y'' + y' - 6y = 2x - e^{2x}$.
    *d*) (r) $y'' + 3y' + 2y = 6$.
    *e*) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$.
    *f*) (r) $y'' + 3y' + 2y = -6 + e^{-x}$.
    *g*) (o) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$.
    *h*) (r) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$.
    *i*) (r) $y'' + y = \cos x$.
    *j*) (r) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$.
    *k*) (o) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.

59. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:
    *a*) (o) $y'' + y = \sec x$.
    *b*) (r) $y'' + y = \tan x$.
    *c*) (r) $y'' + y = 2\sec x - \tan x$.
    *d*) (o) $y'' + y = \sec^2 x$.
    *e*) (r) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
    *f*) (r) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$.
    *g*) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2\operatorname{sen}(e^x) + \frac{5}{1+e^x}$.

60. (r) Obtenga la solución para los siguientes problemas de valor inicial:
    *a*) (r) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    *b*) (r) $y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    *c*) (r) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$.

61. (o) Dado el PVI $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$ con condiciones iniciales $y(0) = -3$ y $y'(0) = 1$:
    1. Resuelva el PVI para obtener la solución en la forma tradicional.
    2. Identifique la parte homogénea subamortiguada $y_h(x)$ y exprésela en la forma equivalente de amplitud y ángulo de fase $Ae^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x + \phi)$.
    3. Analice el comportamiento de la solución cuando $x \to \infty$ e indique si existe un término de estado estable.

62. (r) Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 2N/m$. Suponga que el amortiguamiento depende de $b = 2\,kg/s$ y se imprime una fuerza que mueve el extremo superior del resorte según $f(t) = 4\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)$. Halle la ecuación del movimiento. Distinga los términos transitorio y de estado estable de la solución.

## 3. (r) Ejercicios integradores

63. Halle la solución general de $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$, para $x > 0$.

64. Resuelva: $4y'' + 36y = \operatorname{cosec}(3x)$.

65. *a*) Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial:
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 0.$$
    *b*) Halle una solución (general) para la siguiente ecuación diferencial:
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 25\cos(4t). \tag{2}$$
    *c*) ¿Es verdad que toda solución de (2) es de la forma que usted obtuvo en el ítem anterior? Justifique.

66. Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.

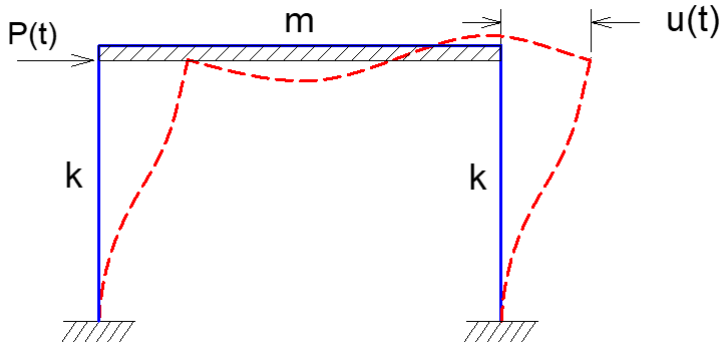
67. Dada la ecuación $y'' - y = 2^x$, se sabe que $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada, $y'' - y = 0$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿ Es verdad que una solución general de $y'' - y = 2^x$ es $y_G = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{2^x}{\ln^2 2 - 1}$? Justifique su respuesta mediante la aplicación del o de los teoremas correspondientes.
    Si le resulta útil, recuerde que $2^x = e^{x\ln 2}$.

68. Encuentre una solución general de cada ecuación diferencial:
    *a*) $y'' + y' - 2y = x^2 - x + 2$.
    *b*) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

# 4. Apicaciones

## 4.1. (o) Estructura de pórtico

La figura muestra el esquema de una estructura de pórtico (formada por dos columnas y una viga). Sobre esta estructura actúa una fuerza $P(t)$ variable en el tiempo, por lo cual la estructura vibra y se deforma lateralmente. En un instante dado, el desplazamiento lateral, en correspondencia con el nivel donde se aplica la fuerza $P(t)$, es $u(t)$.




Para obtener un modelo simplificado, apreciamos la semejanza que presenta esta estructura a un sistema masa-resorte, tal como los planteados en los ejercicios 54 y 55 (sobre todo este último ya que, en este caso, las oscilaciones son horizontales). En este caso se deben tener en cuenta la rigidez $k$ de las columnas (propiedad que cuantifica el desplazamiento que experimenta la estructura cuando se aplica una fuerza unitaria) y la masa $m$, que se supone concentrada en el nivel de la viga ($k$ y $m$ son positivos). Se puede demostrar, mediante principios de dinámica estructural, que la ecuación que representa el fenómeno es:

$$m\ddot{u} + ku = P(t), \qquad \text{donde } \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

*a*) Sabiendo que la fuerza que actúa sobre esta estructura es una carga armónica:

$$P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\omega t),$$

responda: ¿Qué tipo de EDO es? Clasifíquela. ¿Qué tipo de movimiento armónico representa? (Libre o forzado, amortiguado o no amortiguado).

*b*) Asumiendo que, en el instante inicial $t = 0$, el desplazamiento y la velocidad son nulos (es decir que la estructura está en reposo), justifique que la solución de la ecuación diferencial es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\operatorname{sen}(\omega t) - \beta \operatorname{sen}(\omega_n t)\right),$$

explicando qué representan $\beta$ y $\omega_n$.

## 4.2. (*) Modelado de dinámica de mezclas en tanques (Balance de masa)

Un tanque contiene inicialmente 100 L de agua pura. A partir de $t = 0$, se bombea al tanque una solución salina con una concentración de $0,2$ kg/L de sal a una tasa de 3 L/min. La mezcla se mantiene homogénea mediante agitación continua y sale del tanque a la misma tasa de 3 L/min.

a) Si $A(t)$ representa la cantidad de sal (en kg) presente en el tanque en el instante $t$, plantee la EDO del balance de masa expresada como:

$$\frac{dA}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

b) Indique las condiciones iniciales asociadas al problema.

c) Clasifique la EDO obtenida (orden, linealidad, separabilidad) y determine la cantidad límite de sal $\lim_{t\to\infty} A(t)$ presente en el tanque sin resolver la ecuación.

d) Resuelva analíticamente el PVI planteado para hallar $A(t)$ y determine cuánta sal habrá en el tanque transcurridos 50 minutos.