Métodos Matemáticos
Ecuaciones diferenciales

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Bibliografía principal para la clase:

- Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. R. Nagle, E. Saff y A. Snider. Pearson Educación. Cuarta edición. 2005.
- Economic dynamics. G. Gandolfo, Springer-Verlag, 1998.
- Differential equations and their applications. M. Braun. Springer-Verlag. Cuarta edición, 1993.

Ecuaciones diferenciales (tiempo continuo)

$y = y(t)$ $\quad y'$ o $\dot{y}$

Ecuación diferencial general de orden $n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$F\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)\right) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

En forma normal o explícita

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right), \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Ejemplos

$v(t) = s'(t)$

- $mv'(t) = mg - bv(t)$ (ecuación diferencial para la velocidad $v = v(t)$ de un objeto que cae bajo la acción de la gravedad g y con resistencia del aire).
- $T'(t) = -k(M - T(t)) = 0$ (Ley de enfriamiento de Newton) Temp del medio $k > 0$
- $p'(t) = k_1 p(t) - k_2 \frac{p(t)(p(t)-1)}{2} = -Ap(t)(p(t) - M)$ (Modelo logístico)

$T'(t) > 0$

$p'(t) = k_1 p(t)$

$T'(t) < 0$

Ejemplos

- $mv'(t) = mg - bv(t)$ (ecuación diferencial para la velocidad $v = v(t)$ de un objeto que cae bajo la acción de la gravedad g y con resistencia del aire).
- $T'(t) = -k(M - T(t)) = 0$ (Ley de enfriamiento de Newton)
- $p'(t) = k_1 p(t) - k_2 \frac{p(t)(p(t)-1)}{2} = -Ap(t)(p(t) - M)$ (Modelo logístico)
  p' representa la tasa de crecimiento de la población en t depende de la población actual $p(t)$ y la tasa de defunción que es proporcional a las interacciones por parejas $p(t)(p(t) - 1)/2$.

Ejemplos

- $mv'(t) = mg - bv(t)$ (ecuación diferencial para la velocidad $v = v(t)$ de un objeto que cae bajo la acción de la gravedad g y con resistencia del aire).
- $T'(t) = -k(M - T(t)) = 0$ (Ley de enfriamiento de Newton)
- $p'(t) = k_1 p(t) - k_2 \frac{p(t)(p(t)-1)}{2} = -Ap(t)(p(t) - M)$ (Modelo logístico)
  p' representa la tasa de crecimiento de la población en t depende de la población actual $p(t)$ y la tasa de defunción que es proporcional a las interacciones por parejas $p(t)(p(t) - 1)/2$.
- $my''(t) + by'(t) + ky(t) = F(t)$ (ecuación para la posición y del oscilador masa-resorte amortiguado, con fuerza externa F).

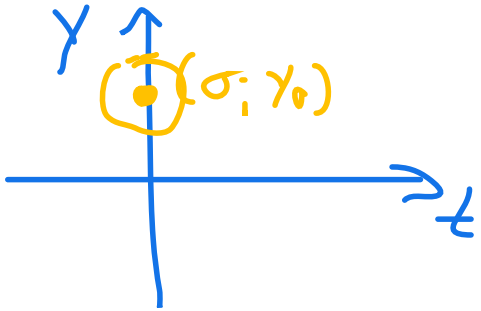
$y = y(t; m; b; k)$ $m_0 + \delta m$ $b_0 + \delta b$

Preguntas: (tareas de los matemáticos)

$y'(t)$ cont.

- ¿Tiene solución?
- ¿Es única la solución en caso de existir?
- ¿Depende en forma continua de los parámetros de la ecuación?

- **Propiedad:** Dada *la ecuación* $y'(t) = f(t, y(t))$, *si la función* f *es continua en un entorno del punto* $(0, y_0)$, *entonces esta ecuación tiene una solución diferenciable con continuidad en cierto entorno del* 0 *que satisface* $y(0) = y_0$.



- Referencias:
  Teorema de Peano (existencia)

- **Teorema de Picard-Lindelöf** (existencia y unicidad de solución) Requiere más que la mera continuidad de f (continuidad Lipschitziana). Por ejemplo si f es diferenciable con derivadas acotadas, la condición se cumple.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, con coeficientes constantes

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = g(t), \qquad t \geq 0, \ldots, \tag{2}$$

donde:

$\dot{y} = g(t) - a_1 y(t)$ $\quad$ $f(t; y(t))$

$g(t) = 0$

$\dot{y} + a_1 y(t) = 0$

$a_1 \in \mathbb{R}$,

$g(t)$: es una función dependiente del tiempo t (término independiente),

y_0 : condición inicial,

$\dot{y} = -a_1 y$

son datos conocidos del modelo.

Por brevedad se omitirá la variable tiempo t y se escribirá

$\dot{y} = y \Rightarrow$

$$\dot{y} + a_1 y = g$$

Ejemplos modelos dinámicos continuos 1

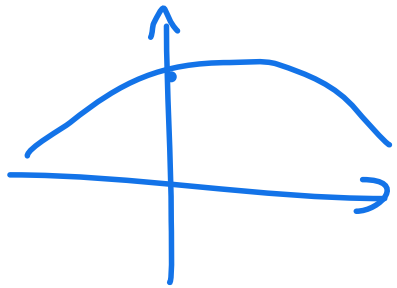
G. Gandolfo, Capítulos 13, 15 y 17

$\dot{y} = f(y^*) = 0 \qquad y(t) = y^*$

1) **Estabilidad del equilibrio de oferta y demanda** (Sección 13.1 de Gandolfo)

Formalización dinámica bajo supuestos Walrasianos (un exceso de demanda positivo hace que los compradores no satisfechos incrementen el precio, y un exceso de demanda negativo hace que los vendedores disminuyan el precio)

$$\dot{p} = f\left(D\left(p\right) - S\left(p\right)\right),$$



donde

$$\textit{signo}\ f\left(x\right) = \textit{signo}\ x, \qquad f\left(0\right) = 0, \qquad f'\left(0\right) > 0.$$

Linealizando f, D y S, se obtiene una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\dot{p} = a_1 p + a_2.$$

Formalización dinámica bajo supuestos Marshallianos (un exceso de demanda positivo en el precio hace que los productores incrementen la cantidad, y un exceso de demanda negativo en el precio hace que los productores disminuyan la cantidad)

$$\dot{q} = g\left(p_D\left(q\right) - p_S\left(q\right)\right),$$

donde

$$\textit{signo}\ g\left(x\right) = \textit{signo}\ x, \qquad g\left(0\right) = 0, \qquad g'\left(0\right) > 0.$$

Linealizando g, p_D y p_S, se obtiene una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\dot{q} = a_1 q + a_2.$$

Ejemplos modelos dinámicos continuos 2

2) **Modelo de crecimiento neoclásico continuo** (Sección 13.2 de Gandolfo)

$$Y = F(K, L), \qquad \dot{K} = sY, \qquad \dot{L} = \eta L, \qquad k = \frac{K}{L},$$

Reemplazando se obtiene

$$\dot{k} = sf(k) - \eta k,$$

donde $\eta > 0$, $0 < s < 1$, K_0, L_0, son conocidos.

s : propensión marginal a ahorrar.

η : tasa (constante) de crecimiento de L.

$f(k) = F(k, 1)$

Ecuación diferencial no lineal.

Solución general de (2)

Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden, con coeficientes constantes, homogénea

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$y = e^{dt}$

$d e^{dt} + a e^{dt} = 0$

$e^{dt}(d + a) = 0$

$d = -a$

a $y(0) = y_0$ conocidos,

- su solución viene dada por
- .

$$y(t) = A\, e^{-at}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde A es una constante que se determina en base a la condición inicial.

$A > 0$, $a < 0$ $\quad y \to \infty$ cuando $t \to \infty$

Solución general de (2)

Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = g(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

a, g, $y(0) = y_0$ conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y^{(h)}(t)$, y una solución particular, $\bar{y}(t)$.

- .
- $$y(t) = A\, e^{-at} + \bar{y}(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

  donde A es una constante que se determina en base a las condiciones iniciales.
- En general $\bar{y}(t)$ representa la solución de equilibrio y $y^{(h)}(t)$ los desvíos con respecto al equilibrio.

Soluciones particulares en casos especiales

RECETA: *Ensayar una solución particular del mismo tipo que la función del término independiente* $g(t)$.

Ejemplo 1: Si $g(t) = d \in \mathbb{R}$ (constante) entonces una solución particular de $\dot{y}(t) + a\, y(t) = d$ es

- $y(t) = k$

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \frac{d}{a}, & \text{si } a \neq 0, \\ d\, t, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

$0 + a \cdot k = d$

$k = \frac{d}{a}$, $a \neq 0$.

$y(t) = k \cdot t$

Ejemplo 2: Si $g(t) = Be^{dt}$, es **exponencial**, donde $B, d \in \mathbb{R}$ (constantes) entonces una solución particular de $\dot{y}(t) + a\, y(t) = g(t)$ es del tipo Ce^{dt}, donde C es una constante a determinar.

-
-

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \frac{B}{d+a} e^{dt}, & \text{si } d + a \neq 0, \\ B\ t\ e^{dt}, & \text{si } d + a = 0. \end{cases}$$

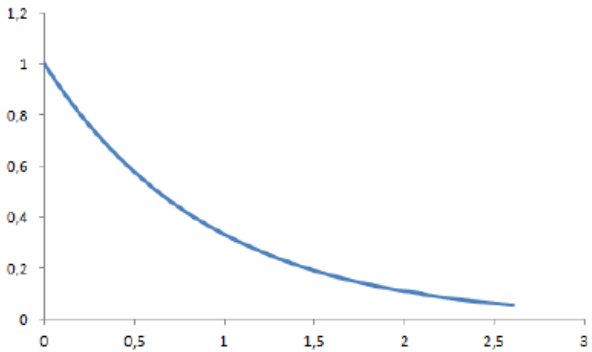
- Otros casos: $g(t)$ **polinomio,** intentar $\bar{y}(t)$ polinomio del mismo grado

  $g(t)$ función **trigonométrica** del tipo $B_1 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t$, intentar $\bar{y}(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$, donde C_i son constantes a determinar (incluso si algún B_i es nulo)

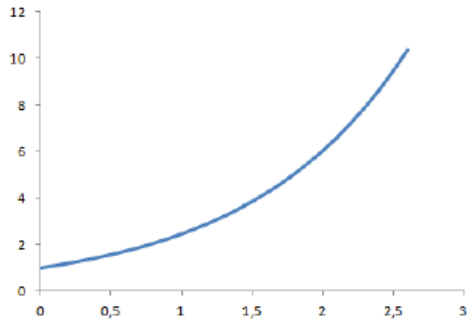
Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $\dot{y}(t) + a\, y(t) = 0$, $y^{(h)}(t) = A\, e^{-at}$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .



$a > 0$ Monótono convergente a 0



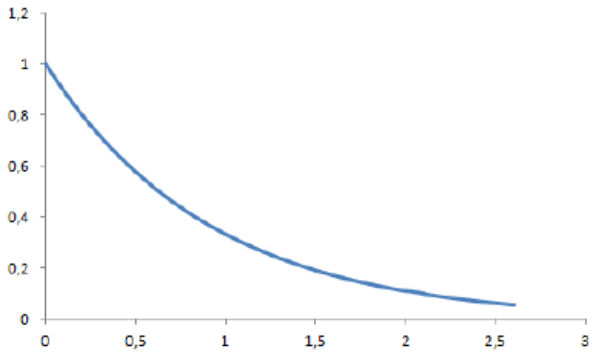
$a < 0$ Monótono explosivo

-

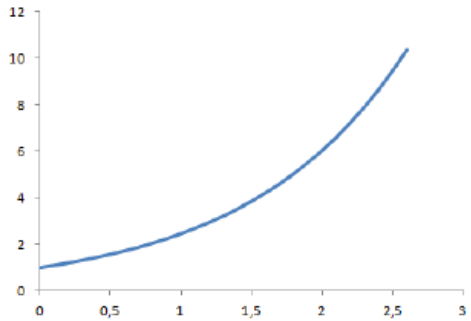
Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $\dot{y}(t) + a\, y(t) = 0$, $y^{(h)}(t) = A\, e^{-at}$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .

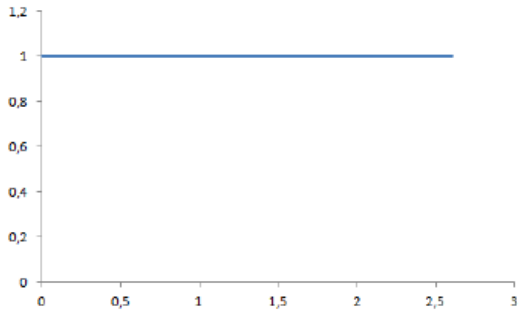


$a > 0$ Monótono convergente a 0



$a < 0$ Monótono explosivo

-



$a = 0$ Constante

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t \to \infty} y^{(h)}(t) = 0.$$

Condición necesaria y suficiente de estabilidad en base a los datos del problema para $\dot{y}(t) + a\, y(t) = g(t)$:

$$a > 0$$

- Dados $D(p) = a + bp$, $S(p) = a_1 + b_1 p$, $c > 0$ y la ecuación

$$\dot{p} = c(D - S),$$

- reemplazando se tiene

$$\dot{p} = c(b - b_1)(p - p_e) \tag{3}$$

donde el precio de equilibrio es $p_e = \frac{a - a_1}{b_1 - b}$.

- Entonces

$$p^{(h)}(t) = A\, e^{c(b-b_1)t}, \qquad \bar{p}(t) = p_e$$

- La solución general de (3) es

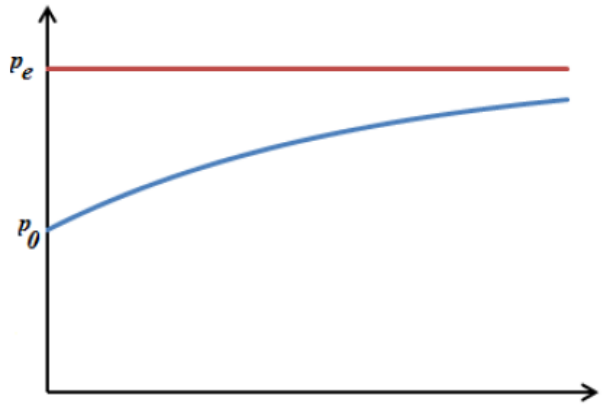
$$p(t) = A\, e^{c(b-b_1)t} + p_e$$

donde $A = p_0 - p_e$

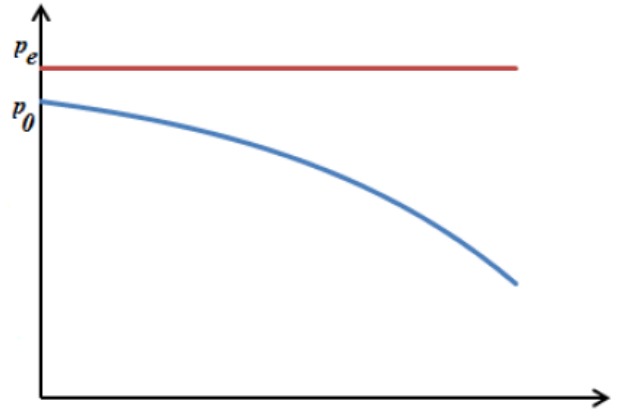
- Condición de estabilidad

$$b < b_1$$

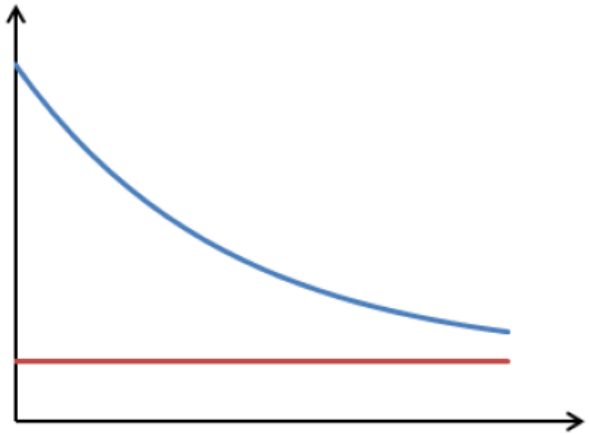
- Comparar con el caso discreto $|b/b_1| < 1$



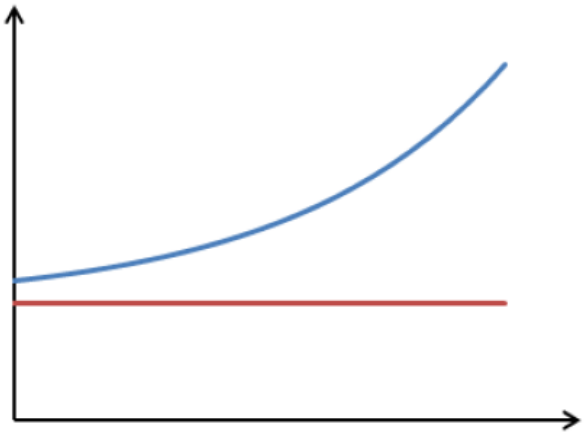
$p_0 < p_e, \quad b < b_1$



$p_0 < p_e, \quad b > b_1$



$p_0 > p_e, \quad b < b_1$



$p_0 > p_e, \quad b > b_1$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$y = y(t)$$

$$\ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_2\, y(t) = g(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

donde:

$y(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t} = 0$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$g(t)$: es una función dependiente del tiempo t (término independiente),

$y_0 = y(0)$, $y_1 = y'(0)$: condiciones iniciales,

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

son datos conocidos del modelo.

Solución general de (4)

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = g(t), \qquad t \geq 0,$$

$a_1, a_2, y_0, y_1, g(t)$ conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y^{(h)}(t)$, y una solución particular, $\bar{y}(t)$.

-
- $$y(t) = y^{(h)}(t) + \bar{y}(t) \qquad t \geq 0 .$$
- En general $\bar{y}(t)$ representa la solución de equilibrio y $y^{(h)}(t)$ los desvíos con respecto al equilibrio.

Solución general de (4)

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$\ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_2\, y(t) = g(t), \qquad t \geq 0,$$

$a_1, a_2,\ y_0, y_1, g(t)$ conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y^{(h)}(t)$, y una solución particular, $\bar{y}(t)$.

-
-

$$y(t) = y^{(h)}(t) + \bar{y}(t) \qquad t \geq 0\ .$$

- En general $\bar{y}(t)$ representa la solución de equilibrio y $y^{(h)}(t)$ los desvíos con respecto al equilibrio.
- **RECETA**: *Ensayar una solución particular $\bar{y}(t)$ del mismo tipo que la función del término independiente $g(t)$.*

Solución general de (4), caso homogéneo

Dada la ecuación en diferencias lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, homogénea

$$\ddot{y}(t) + a_1\ \dot{y}(t) + a_2\ y(t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

$a_1, a_2,\ y_0, y_1$ conocidos,

- su solución viene dada, en general, por
- $$y^{(h)}(t) = A_1\ e^{\lambda_1 t} + A_2\ e^{\lambda_2 t}, \qquad t \geq 0,$$

  donde A_1, A_2 son constantes que se determinan en base a las condiciones iniciales.
- λ_1 y λ_2 son soluciones de la **ecuación característica**:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Soluciones de (4), caso homogéneo, según las raíces características

- Sea el discriminante de la ecuación característica

$$\Delta = (a_1)^2 - 4a_2$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

- $\Delta > 0$, raíces reales λ_1 y λ_2 distintas

$$y^{(h)}(t) = A_1\ e^{\lambda_1 t} + A_2\ e^{\lambda_2 t}, \qquad t \geq 0,$$

donde A_1 y A_2 se determinan en base a las condiciones iniciales.

- $\Delta = 0$, raíces reales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ coincidentes (una raíz real doble)

$$y^{(h)}(t) = e^{\lambda t}(A_1 + A_2 t), \qquad t \geq 0,$$

- $\Delta < 0$, raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$

$$y^{(h)}(t) = e^{\alpha t}(A_1\ \cos\beta\ t + A_2\ \operatorname{sen}\beta\ t), \qquad t \geq 0\ .$$

Resumen: Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea

$$\ddot{y} + a_1 \ \dot{y} + a_2 \ y = 0, \qquad\qquad t \geq 0,$$

Soluciones de la forma

$$y^{(h)}(t) = A_1 \ e^{\lambda_1 t} + A_2 \ e^{\lambda_2 t},$$

o

$$y^{(h)}(t) = e^{\lambda t}\left(A_1 + A_2 t\right),$$

o

$$y^{(h)}(t) = \ e^{\alpha t} \ \left(A_1 \ \cos\beta \ t + A_2 \ \operatorname{sen}\beta \ t\right),$$

donde A_1 y A_2 se determinan en base a las condiciones iniciales.

Estabilidad del equilibrio

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t \to \infty} y^{(h)}(t) = 0.$$

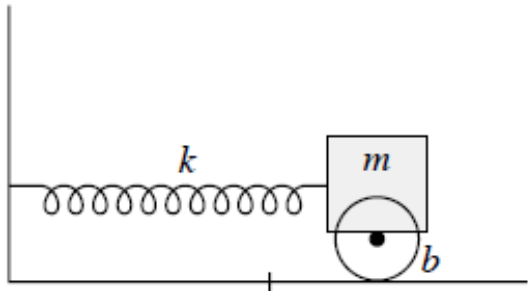
Equivalentemente:

$$\boxed{\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1, 2.}$$

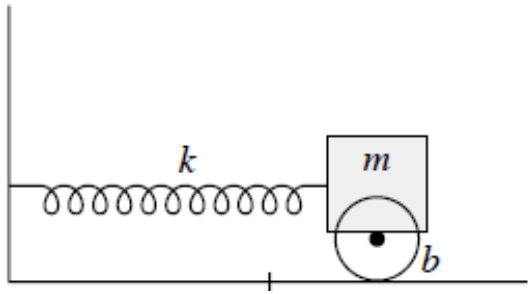
Condición necesaria y suficiente de estabilidad en base a los datos del problema:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad \begin{cases} a_1 > 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Vibraciones mecánicas libres y forzadas



Vibraciones mecánicas libres y forzadas



$$[\textbf{inercia}] \times y'' + [\textbf{amortiguamiento}] \times y' + [\textbf{rigidez}] \times y = F_{\text{externa}} \, .$$

Vibraciones mecánicas libres

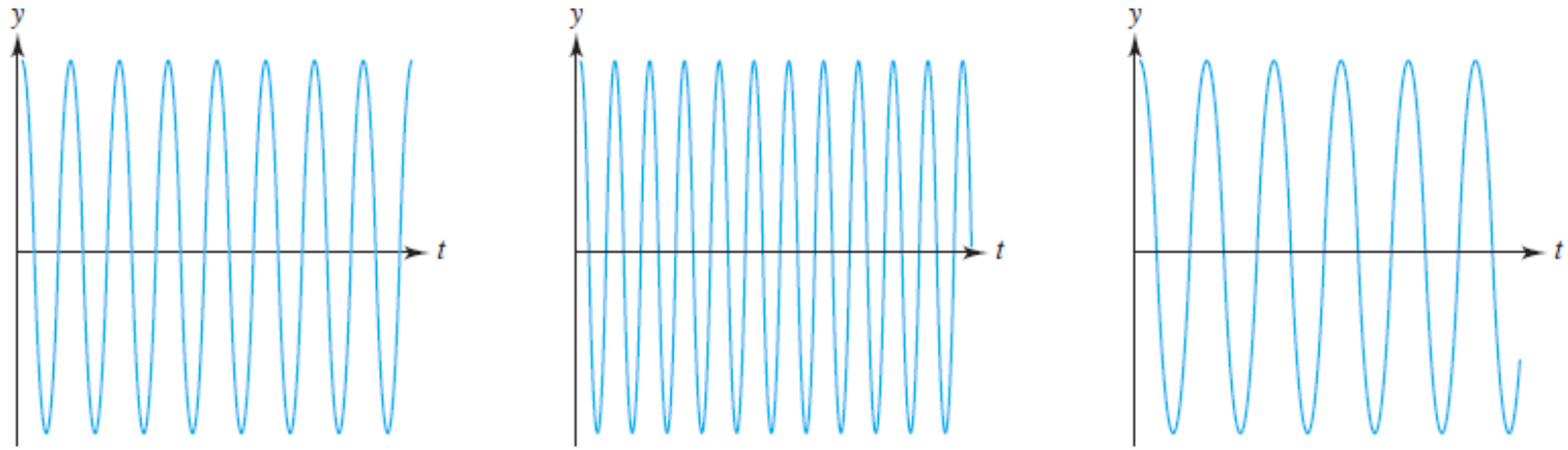
- ¿Cómo serían las soluciones si no hay amortiguamiento?

$$my'' + ky = 0$$

$$y'' = -y$$

Vibraciones mecánicas libres

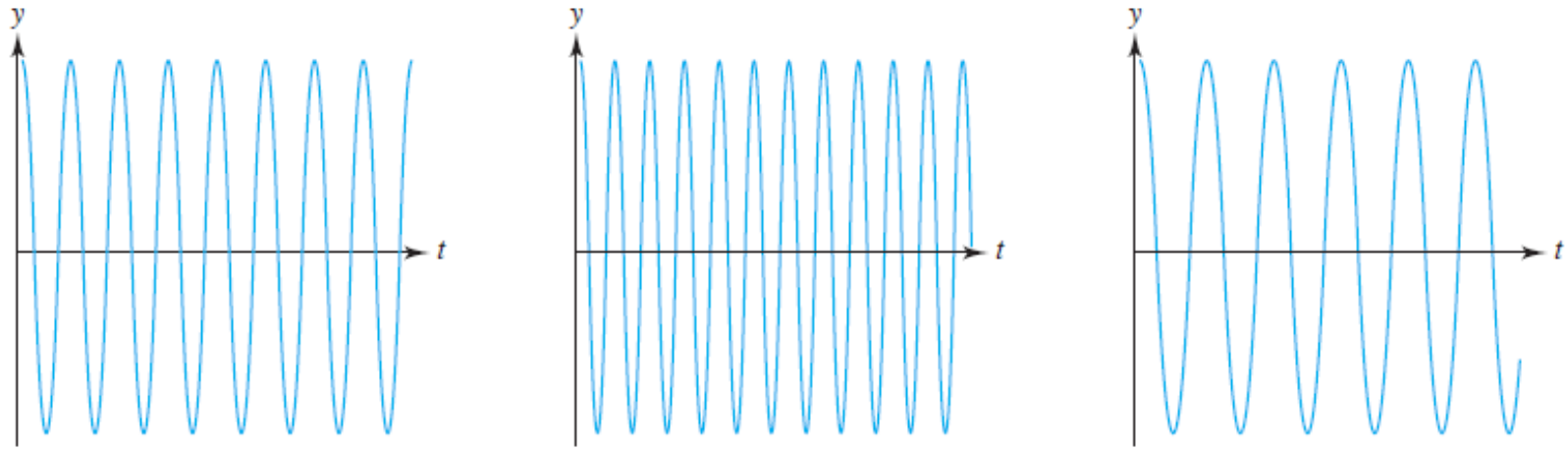
- ¿Cómo serían las soluciones si no hay amortiguamiento?



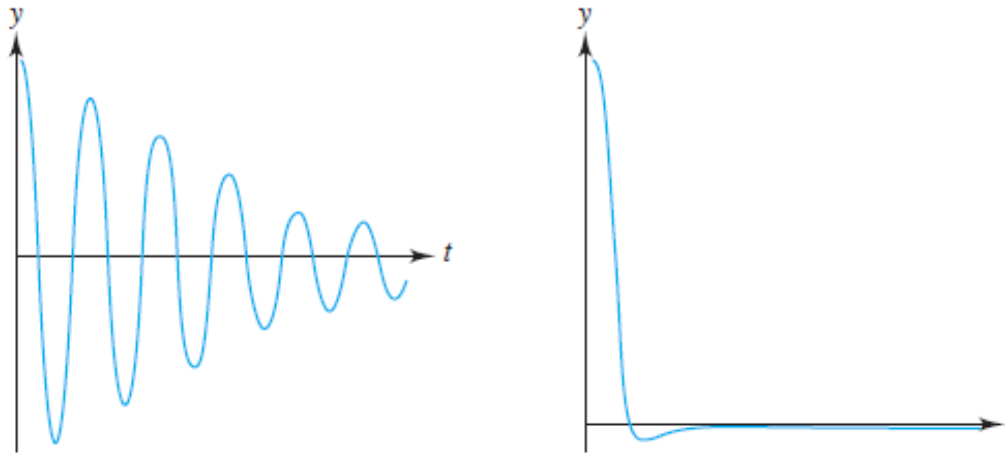
- ¿Cómo son las soluciones con amortiguamiento?

Vibraciones mecánicas libres

- ¿Cómo serían las soluciones si no hay amortiguamiento?



- ¿Cómo son las soluciones con amortiguamiento?



Vibraciones mecánicas libres

$$y''(t) - t\,y'(t) + y(t) = 0$$

Sea

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0.$$

La ecuación característica es

$$mr^2 + br + k = 0$$

y sus raíces son

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Vibraciones mecánicas libres

Sea

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0.$$

La ecuación característica es

$$mr^2 + br + k = 0$$

y sus raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

La forma de la solución depende del signo de $b^2 - 4mk$.

$b^2 > 4mk$ $\quad b^2 - 4mk < 0$ $\quad b^2 = 4mk$

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 < 4mk$, existen dos raíces complejas conjugadas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, donde

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}.$$

La solución general es

$$y^{(h)}(t) = e^{\alpha t}\left(A_1 \cos(\beta t) + A_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right).$$

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 < 4mk$, existen dos raíces complejas conjugadas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, donde

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}.$$

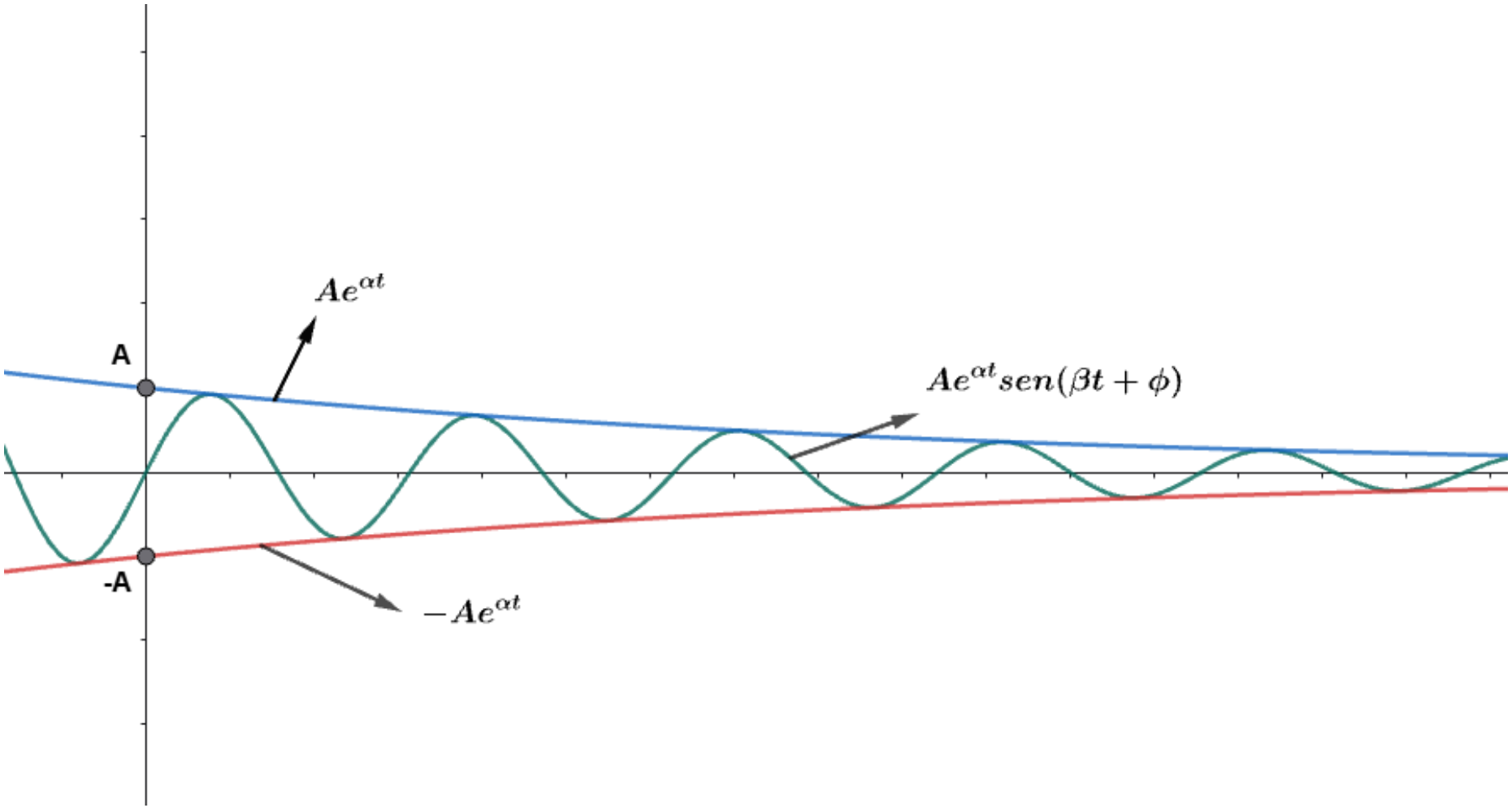
La solución general es

$$y^{(h)}(t) = e^{\alpha t}\left(A_1 \cos(\beta t) + A_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right).$$

$y^{(h)}(t)$ puede expresarse (ejercicio recomendado, no para entregar)

$$y^{(h)}(t) = Ae^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t + \phi), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \tan(\phi) = A_1/A_2.$$

Vibraciones mecánicas libres



Movimiento subamortiguado u oscilatorio

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 > 4mk$, las raíces son reales y distintas:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 > 4mk$, las raíces son reales y distintas:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Por lo tanto,

$$y^{(h)}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 > 4mk$, las raíces son reales y distintas:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

Por lo tanto,

$$y^{(h)}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

Cuando $t \to \infty$, $y^{(h)}(t) \to 0$. Además, $y^{(h)}$ tiene a lo más un máximo o mínimo local para $t > 0$.

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 > 4mk$, las raíces son reales y distintas:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}.$$

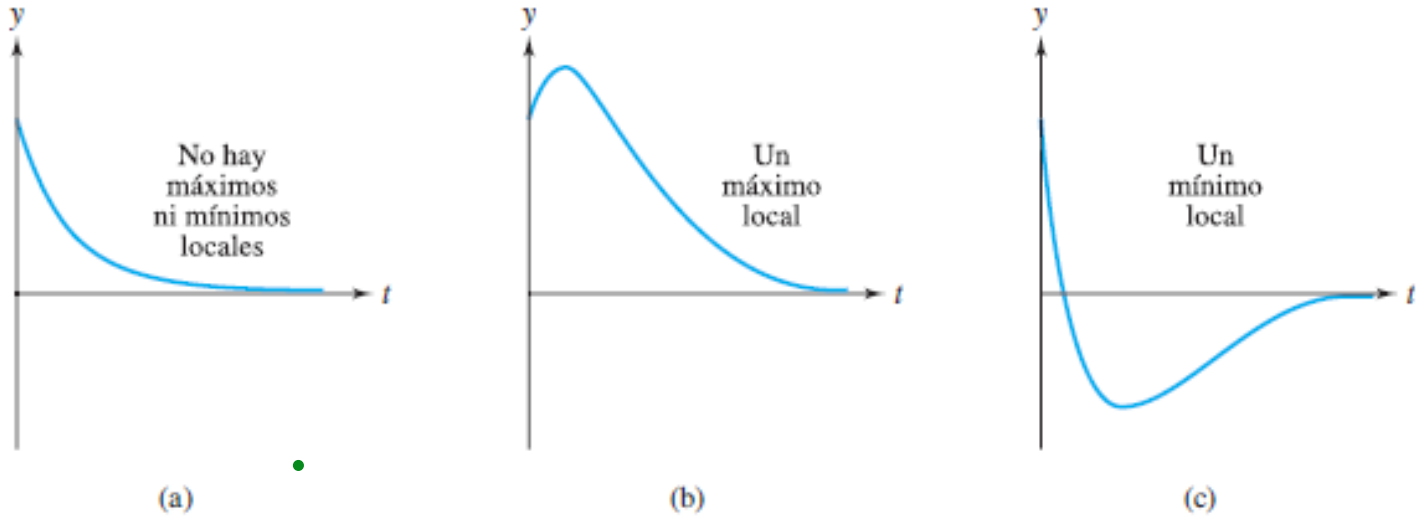
Por lo tanto,

$$y^{(h)}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

Cuando $t \to \infty$, $y^{(h)}(t) \to 0$. Además, $y^{(h)}$ tiene a lo más un máximo o mínimo local para $t > 0$.

Ejercicio (entrega a lo sumo Jueves 22/10): comprobar que $y^{(h)}$ tiene a lo más un máximo o mínimo local para $t > 0$.

Vibraciones mecánicas libres



Movimiento sobreamortiguado

Vibraciones mecánicas libres

Cuando $b^2 = 4mk$, la raíz doble es

$$r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2m}$$

y entonces

$$y^{(h)}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{rt}.$$

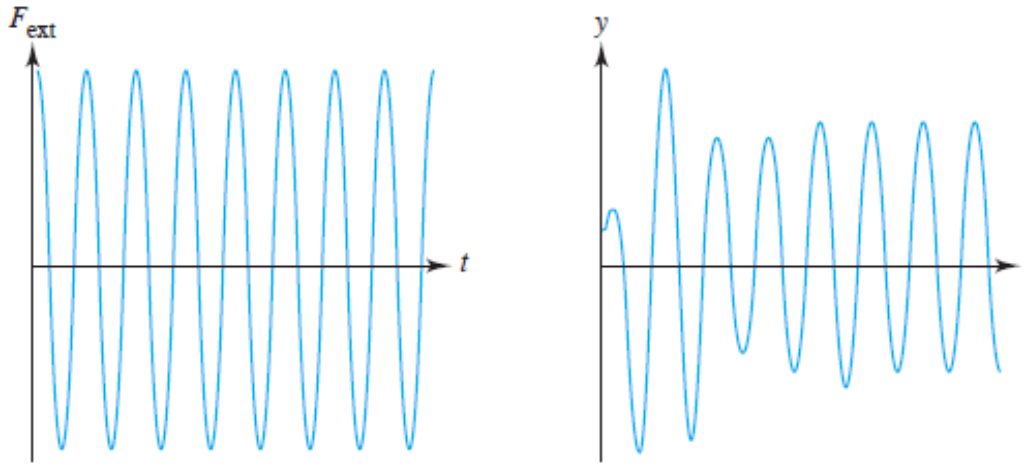
Además, $y^{(h)}$ tiene a lo más un máximo o mínimo local. Si b fuese ligeramente menor, habría oscilaciones. El movimiento es críticamente amortiguado.

Vibraciones mecánicas forzadas

Si un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal con frecuencia angular ω, la experiencia indica que aunque la respuesta inicial del sistema fuese errática, con el tiempo se 'sincronizará' con el controlador y oscilará con la misma frecuencia:

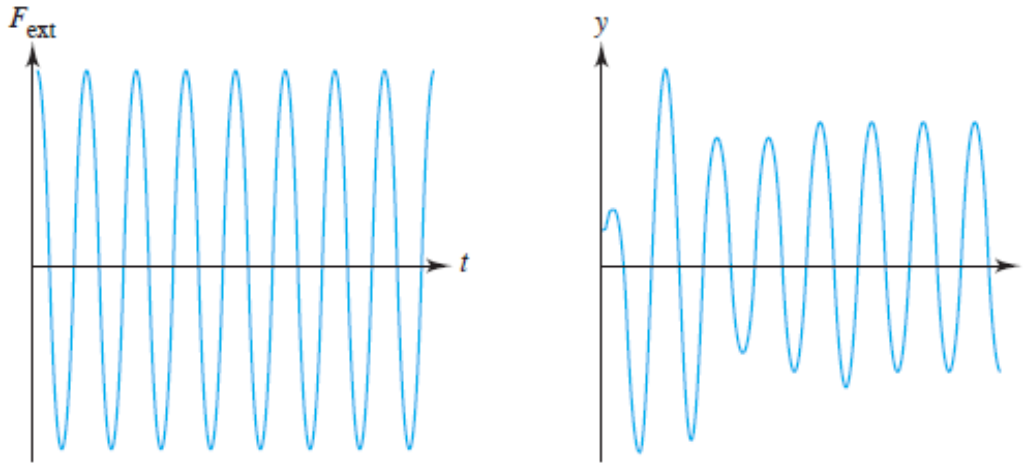
Vibraciones mecánicas forzadas

Si un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal con frecuencia angular ω, la experiencia indica que aunque la respuesta inicial del sistema fuese errática, con el tiempo se 'sincronizará' con el controlador y oscilará con la misma frecuencia:



Vibraciones mecánicas forzadas

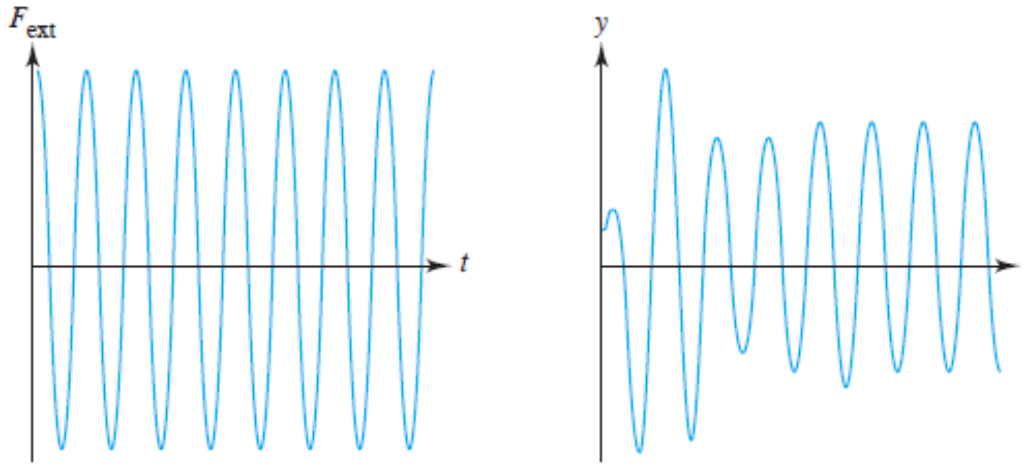
Si un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal con frecuencia angular ω, la experiencia indica que aunque la respuesta inicial del sistema fuese errática, con el tiempo se 'sincronizará' con el controlador y oscilará con la misma frecuencia:



Sin embargo, los sistemas pueden ser muy sensibles a la frecuencia ω con la que se los controla.

Vibraciones mecánicas forzadas

Si un sistema masa-resorte es controlado por una fuerza externa sinusoidal con frecuencia angular ω, la experiencia indica que aunque la respuesta inicial del sistema fuese errática, con el tiempo se 'sincronizará' con el controlador y oscilará con la misma frecuencia:



Sin embargo, los sistemas pueden ser muy sensibles a la frecuencia ω con la que se los controla.
Las respuestas resonantes (para las que las soluciones tienen amplitudes máximas) pueden ser peligrosas.

Vibraciones mecánicas forzadas

Ejercicio (entrega a lo sumo Jueves 22/10): Considere

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\gamma t), \quad F_0, \gamma > 0, 0 < b^2 < 4mk. \quad (1)$$

Pruebe que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y^{(h)}(t) = Ae^{(-b/2m)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} t + \phi\right),$$

con A y ϕ constantes apropiadas.

Ejercicio (entrega a lo sumo Jueves 22/10): Considere

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\gamma t), \quad F_0, \gamma > 0, 0 < b^2 < 4mk. \quad (1)$$

Pruebe que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y^{(h)}(t) = Ae^{(-b/2m)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} t + \phi\right),$$

con A y ϕ constantes apropiadas.
A continuación, proponga como solución particular de la ecuación no homogénea

$$y^{(p)}(t) = A_1 \cos(\gamma t) + A_2 \operatorname{sen}(\gamma t)$$

y pruebe que la solución general de la ecuación (1) es

$$y(t) = Ae^{(-b/2m)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta),$$

Vibraciones mecánicas forzadas

Analice la estabilidad de la solución. El término

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}$$

$b^2 < 4mk$

se conoce como ganancia de frecuencia o factor de ganancia. Interprete esta denominación. Cuando $b^2 < 2mk$, determine la frecuencia angular γ_r que maximiza M.

Vibraciones mecánicas forzadas

Analice la estabilidad de la solución. El término

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}$$

se conoce como ganancia de frecuencia o factor de ganancia. Interprete esta denominación. Cuando $b^2 < 2mk$, determine la frecuencia angular γ_r que maximiza M.

El valor $\gamma_r/2\pi$ se conoce como frecuencia de resonancia. Cuando el sistema es estimulado por una fuerza externa con esta frecuencia, se dice que está en resonancia.

Vibraciones mecánicas forzadas

Analice la estabilidad de la solución. El término

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}$$

se conoce como ganancia de frecuencia o factor de ganancia. Interprete esta denominación. Cuando $b^2 < 2mk$, determine la frecuencia angular γ_r que maximiza M.

El valor $\gamma_r/2\pi$ se conoce como frecuencia de resonancia. Cuando el sistema es estimulado por una fuerza externa con esta frecuencia, se dice que está en resonancia.

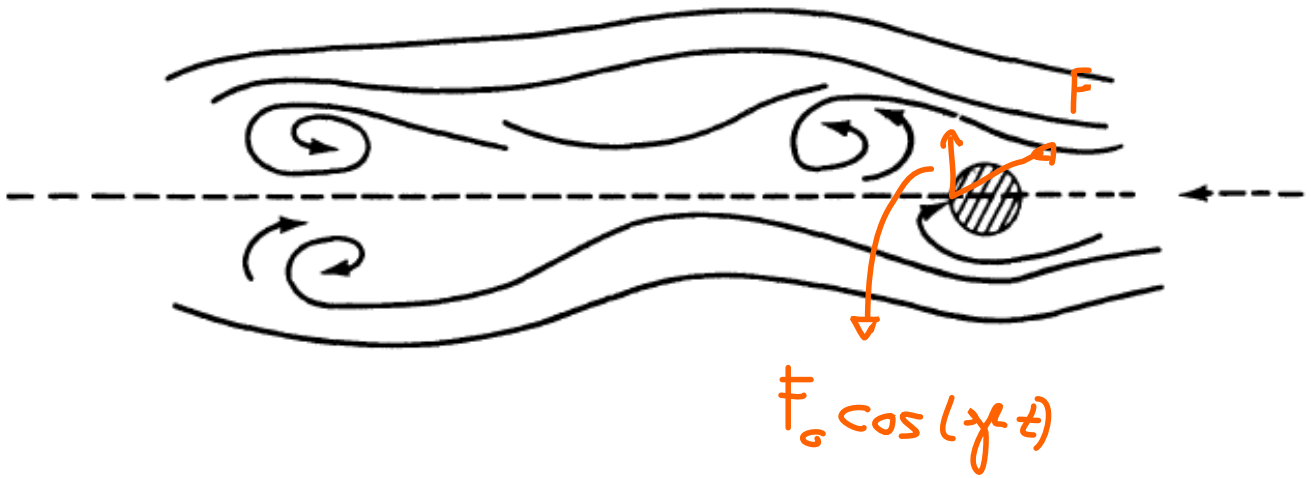
Compruebe que cuando $b \to 0$, $\gamma_r/2\pi \to \omega/2\pi = \sqrt{k/m}/2\pi$ (frecuencia natural del sistema no amortiguado).

Finalmente, resuelva la ecuación:

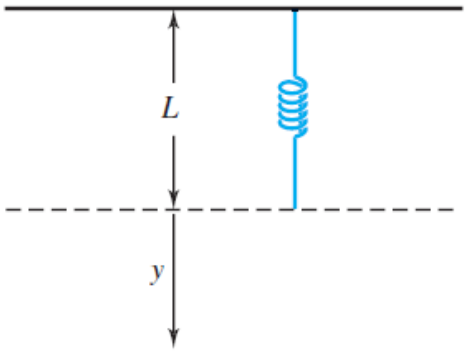
$$my''(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

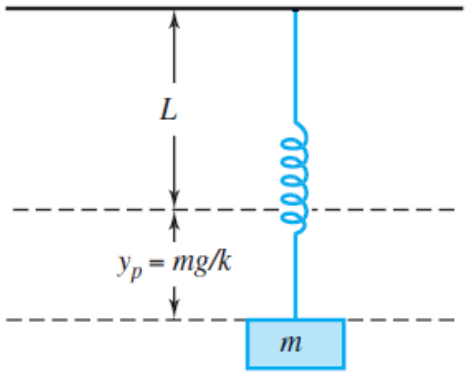
y determine el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

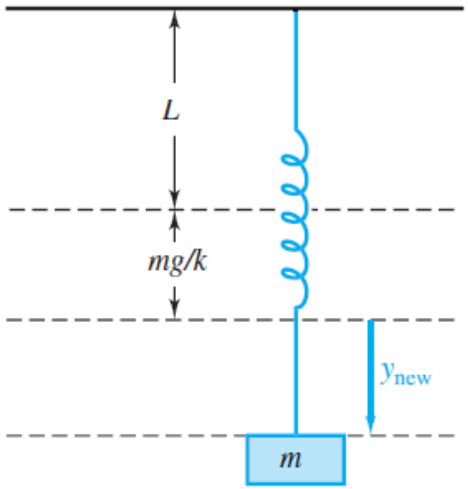
Relación esto con el colapso del Tacoma Bridge.



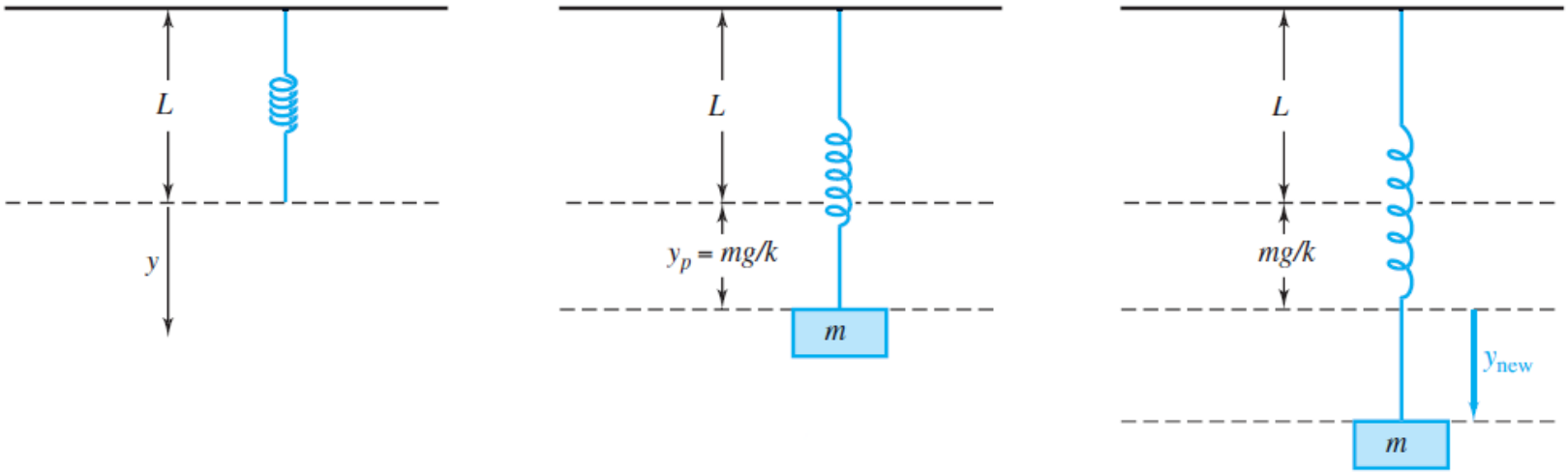
Sistema masa-resorte que cuelga verticalmente:







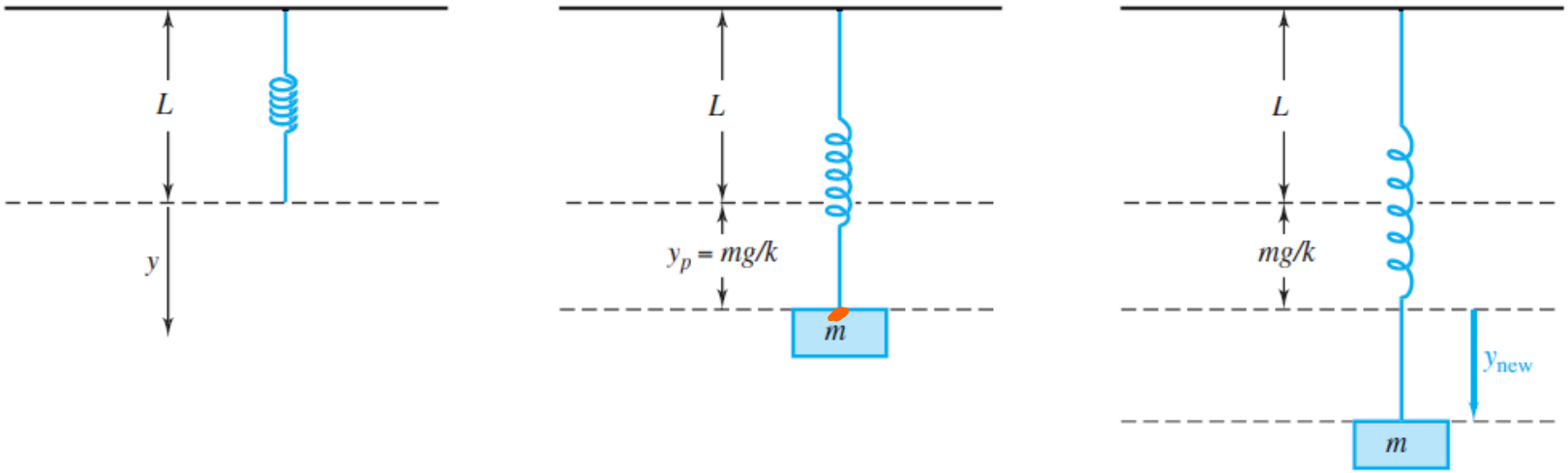
Sistema masa-resorte que cuelga verticalmente:



La ecuación correspondiente es:

$$my'' + by' + ky = mg = mg\cos(0t)$$

Sistema masa-resorte que cuelga verticalmente:



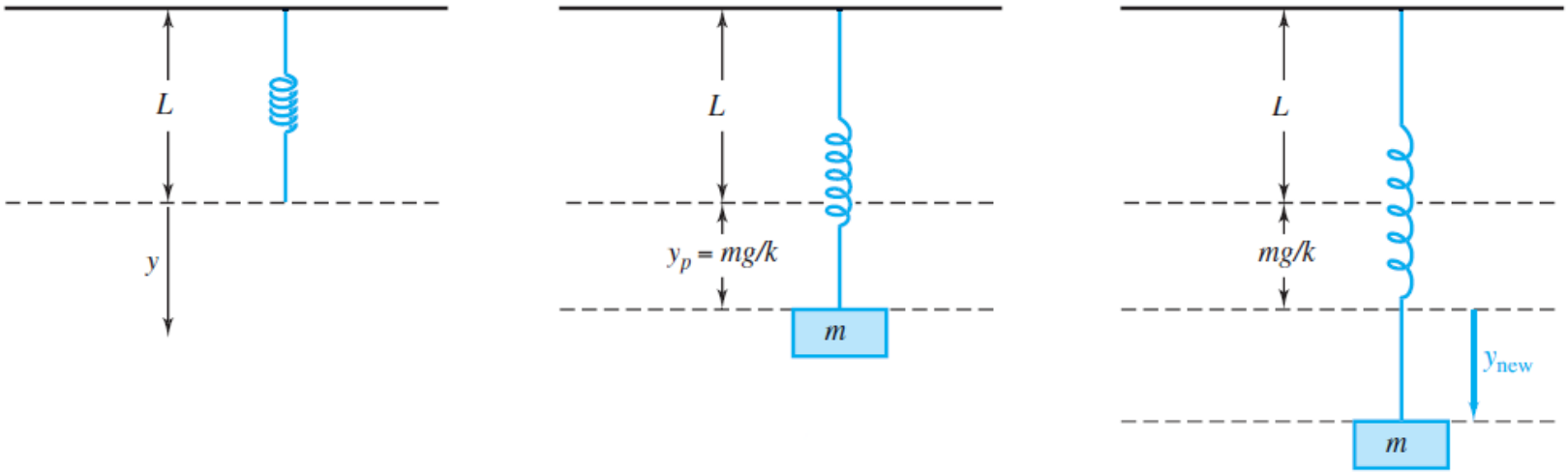
La ecuación correspondiente es:

$$my'' + by' + ky = mg = mg\cos(0t)$$

Entonces $y_p(t) = mg/k$ Sea $y_{new}(t) = y(t) - mg/k$, entonces

$$my''_{new} + by'_{new} + ky_{new} = 0.$$

Sistema masa-resorte que cuelga verticalmente:



La ecuación correspondiente es:

$$my'' + by' + ky = mg = mg\cos(0t)$$

Entonces $y_p(t) = mg/k$. Sea $y_{new}(t) = y(t) - mg/k$, entonces

$$my''_{new} + by'_{new} + ky_{new} = 0.$$

Así, la fuerza gravitacional se puede ignorar si $y(t)$ se mide desde la posición de equilibrio (real).

Ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\, y(t) = g(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

donde:

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$g(t)$: es una función dependiente del tiempo t (término independiente),

$y_0 = y(0), \ldots, \; y_{n-1} = y^{(n-1)}(0)$: condiciones iniciales,

son datos conocidos del modelo.

Solución general de (5)

Dada la ecuación diferencial lineal de orden n, con coeficientes constantes, no homogénea (5), su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y^{(h)}(t)$, y una solución particular, $\bar{y}(t)$.

- .
- $$y(t) = y^{(h)}(t) + \bar{y}(t) \qquad t \geq 0 \ .$$
- En general $\bar{y}(t)$ representa la solución de equilibrio y $y^{(h)}(t)$ los desvíos con respecto al equilibrio.
- **RECETA**: *Ensayar una solución particular $\bar{y}(t)$ del mismo tipo que la función del término independiente $g(t)$.*

Solución general, caso homogéneo

Dada la ecuación en diferencias lineal de orden n, con coeficientes constantes, homogénea

$$y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\, y(t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

$a_1, \ldots, a_n$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ conocidos,

- su solución viene dada, si las raíces son todas distintas, por
- $$y^{(h)}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{\lambda_i t}, \qquad t \geq 0,$$

  donde $A_1, \ldots, A_n$ son constantes que se determinan en base a las condiciones iniciales,
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son soluciones de la **ecuación característica**:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son las raíces distintas de la ecuación característica, con correspondientes multiplicidades $m_1, ..., m_k$, la solución de la ecuación homogénea lineal de orden n con coeficientes constantes está dada por:

$$y^{(h)}(t) = \sum_{i=1}^{k} P_i(t) \ e^{\lambda_i \ t},$$

donde $P_i(t)$ es un polinomio de grado $(m_i - 1)$ y sus m_i coeficientes se determinan en base a las condiciones iniciales.

Si alguna raíz $\lambda = \alpha + i\beta$ es compleja, también es raíz su compleja conjugada, y los dos términos correspondientes en la expresión de la solución $y^{(h)}(t) = \sum_{i=1}^{k} P_i(t)\ e^{\lambda_i\ t}$ se pueden reemplazar por

$$e^{\alpha\ t}\ (P(t)\cos\beta t\theta\ +\ Q(t)\,\mathrm{sen}\,\beta t),$$

donde $P(t)$ y $Q(t)$ son polinomios de grado $(m-1)$, siendo m la multiplicidad de λ.

Estabilidad del equilibrio

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t\to\infty} y^{(h)}(t) = 0.$$

Equivalentemente:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad en base a los datos del problema:

- $n = 3$ $(a_0 = 1)$

$$\begin{cases} a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ a_3 > 0, \\ a_1 \ a_2 - a_0 \ a_3 > 0. \end{cases}$$

Gandolfo, Sección 16.4

Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de Routh-Hurwitz

Dada la matriz de orden $n \times n$ $(a_0 = 1)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

una condición necesaria y suficiente de estabilidad es

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots,\ \Delta_n > 0,$$

donde Δ_i , $i = 1, \dots, n$, son sus determinantes menores principales.

Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de Liénard-Chipart

Dada la matriz anterior ($a_0 = 1$) son condiciones necesarias y suficientes de estabilidad una cualquiera de las siguientes cuatro condiciones:

(a) $a_n > 0,\ a_{n-2} > 0, \ldots$ y $\Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0, \ldots$

(b) $a_n > 0,\ a_{n-2} > 0, \ldots$ y $\Delta_2 > 0,\ \Delta_4 > 0, \ldots$

(c) $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ a_{n-3} > 0, \ldots$ y $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots$

(d) $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ a_{n-3} > 0, \ldots$ y $\Delta_2 > 0,\ \Delta_4 > 0, \ldots$

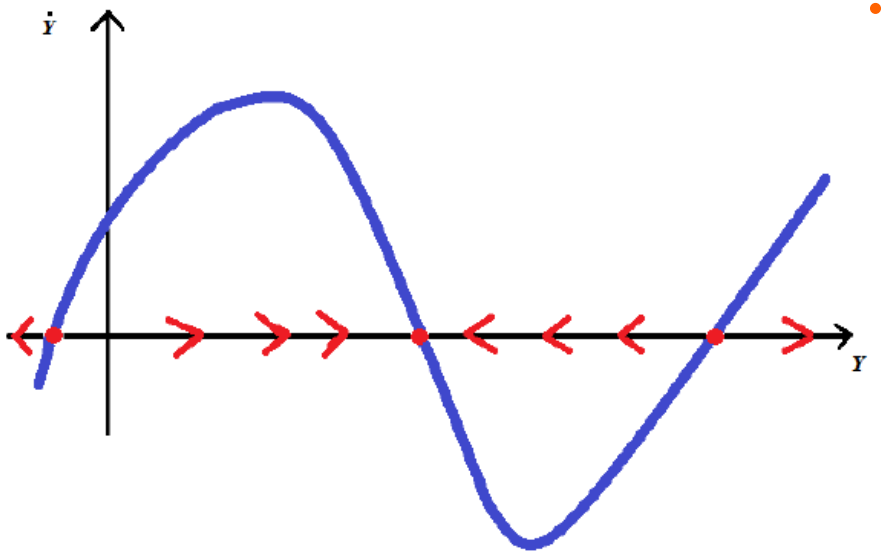
Ecuación diferencial de primer orden no lineal

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

Ecuación autónoma

$$\dot{y} = f(y)$$

Diagrama de fase



Equilibrio estacionario (steady state)

y^* es punto de equilibrio si

$$f\left(y^*\right) = 0$$

Condición de estabilidad: Si f es diferenciable con continuidad en y^*, entonces

$$f'\left(y^*\right) < 0 \text{ implica que } y^* \text{ es localmente estable}$$

y

$$f'\left(y^*\right) > 0 \text{ implica que } y^* \text{ es inestable}$$

Expansión de Taylor de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y) \approx f(y^*) + f'(y^*)(y - y^*) \\ &= f'(y^*)(y - y^*). \end{aligned}$$

Ecuación linealizada:

$$\dot{y} - f'(y^*)\ y = -f'(y^*)\ y^*,$$

cuya solución particular es $y(t) \equiv y^*$, su condición de estabilidad es

$$f'(y^*) < 0$$

Ejemplo: Modelo neoclásico de crecimiento de Solow

Modelo de Solow con crecimiento de la población a tasa constante $\eta > 0$ y sin cambio tecnológico (A constante):

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + \eta) k.$$

donde $0 < \delta,\ s < 1$.

$F(K, L)$ función de producción (supuestos usuales)
$f(k) := F(k, 1)$
$\dot{L} = \eta\ L$.

Sea el caso particular de una función Cobb-Douglas

$$f(k) = A\, k^{\alpha}, \qquad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1,$$

el punto de equilibrio k^* debe verificar que

$$s\, A\, k^{\alpha} - (\delta + \eta)\, k = 0$$

de donde $k^* = 0$, o

$$k^* = \left(\frac{s\, A}{\delta + \eta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

