Métodos Matemáticos
Ecuaciones en diferencias

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Prof. Responsable: Dr. Pablo Ochoa
pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar.
Inicio: 6/10. Finalización: 26/11.
Convenio:

- Cámaras encendidas.
- Participación.
- Las dudas, preguntas o comentarios se plantean en clase.
- Entrega de los ejercicios por correo electrónico. La devolución de los mismos se hará por correo electrónico de forma personalizada.
- Las diapositivas se comparten después de cada clase en la plataforma.

Bibliografía principal para la clase:

- Economic dynamics. G. Gandolfo, Springer-Verlag, 1998.
- Difference equations for scientists and engineering. M. Radin. World Scientific 2019.

Aplicaciones a procesamiento de señales

Supongamos que tenemos una señal

$$g_t \quad t \in \mathbb{N}$$

que contiene variaciones rápidas y ruido. Queremos obtener una señal más "suave".

Aplicaciones a procesamiento de señales

Supongamos que tenemos una señal

$$g_t$$

que contiene variaciones rápidas y ruido. Queremos obtener una señal más "suave".
Podemos utilizar:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) g_t, \quad 0 < \alpha < 1.$$

La nueva salida es un $(1-\alpha)\,\%$ de la entrada y conserva un $\alpha\,\%$ del valor anterior.

Aplicaciones a procesamiento de señales

Supongamos que tenemos una señal

$$g_t$$

que contiene variaciones rápidas y ruido. Queremos obtener una señal más "suave".

Podemos utilizar:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) g_t, \quad 0 < \alpha < 1.$$

La nueva salida es un $(1-\alpha)\,\%$ de la entrada y conserva un $\alpha\,\%$ del valor anterior. Una ecuación en diferencias permite construir una señal de salida utilizando valores presentes y pasados de la entrada y/o de la salida. La ecuación en diferencias de primer orden constituye un **filtro digital.**

Ecuaciones en diferencias (tiempo discreto)

Ecuación general en diferencias de orden n $(n \in \mathbb{N})$

$$F\left(t, y_{t-n}, y_{t-n+1}, \ldots, y_{t-1}, y_t\right) = 0, \qquad t = n, n+1, \ldots.$$

En forma normal

$$y_t = f\left(t, y_{t-n}, y_{t-n+1}, \ldots, y_{t-1}\right), \qquad t = n, n+1, \ldots. \tag{1}$$

$$y_n = f(t; y_0; y_1; \cdots; y_{n-1}).$$

Propiedad: *Si* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *son valores conocidos (condiciones iniciales), entonces la ecuación (1) tiene una única solución, que se puede determinar en forma recursiva.*

Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, con coeficientes constantes

$$y_t + a_1 y_{t-1} = g_t, \qquad t = 1, 2, ..., \tag{2}$$

donde:

$a_1 \in \mathbb{R}$,

g_t : es una función dependiente del tiempo t (término independiente),

y_0 : condición inicial,

son datos conocidos del modelo.

Ejemplos: Dinámica de los multiplicadores

1)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= a + b\, Y_{t-1}, \\ I_t &= I_0 + \Delta I, \end{aligned}$$

donde a, $0 < b < 1$, Y_0, I_0, ΔI son conocidos.

-
- $Y_t - b\, Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$

$Y_t = A(b)^t$

$a + I_0 + \Delta I = 0$

Ejemplos:

2)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= a + b\,Y_{t-1}, \\ I_t &= h\,Y_{t-1} + I_0 \ + \ \Delta I, \end{aligned}$$

donde $a,\ 0 < b, h < 1,\quad Y_0,\quad I_0,\ \Delta I$ son conocidos.

- .
- $$Y_t - (b+h)\ Y_{t-1} = a + I_0 \ + \ \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

Ejemplos:

3)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + X_t - M_t, \\ C_t &= a + b\ Y_{t-1}, \\ I_t &= h\ Y_{t-1} + I_0\ +\ \Delta I, \\ X_t &= X_0\ +\ \Delta X, \\ M_t &= m\ Y_{t-1} + M_0 \end{aligned}$$

donde $a,\ 0 < b, h, m < 1,\ Y_0,\ I_0,\ \Delta I,\ X_0, \Delta X,\ M_0$ son conocidos.

- .
- $$Y_t - (b + h - m)\ Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I + X_0 + \Delta X - M_0, \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Solución general de (2)

$y_t = -a$ $\quad a^t = a \cdot a^{t-1}$

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, homogénea

$y_t = -a y_{t-1}$

$$y_t + a y_{t-1} = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

a, y_0 conocidos,

- su solución viene dada por

Solución general de (2)

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, homogénea

$$y_t + a y_{t-1} = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

a, y_0 conocidos,

- su solución viene dada por
- $$y_t = A\ (-a)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde A es una constante que se determina en base a las condiciones iniciales.

Solución general de (2)

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$y_t + a y_{t-1} = g_t, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

a, y_0, g_t conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y_t^{(h)}$, y una solución particular, $\bar{y}_t$.

- .
-

$$y_t = A\,(-a)^t + \bar{y}_t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde A es una constante que se determina en base a las condiciones iniciales.

Solución general de (2)

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$y_t + a y_{t-1} = g_t, \qquad t = 1, 2, ...,$$

a, y_0, g_t conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y_t^{(h)}$, y una solución particular, $\bar{y}_t$.

- .
- $$y_t = A\ (-a)^t + \ \bar{y}_t \qquad t = 0, 1, 2, ...,$$

  donde A es una constante que se determina en base a las condiciones iniciales.
- En general $\bar{y}_t$ representa la solución de equilibrio y, consecuentemente, $y_t^{(h)}$ los desvíos con respecto al equilibrio.

Soluciones particulares en casos especiales

RECETA: *Ensayar una solución particular del mismo tipo que la función del término independiente* g_t.

Ejemplo: Si $g_t = d \in \mathbb{R}$ (constante) entonces una solución particular de $y_t + ay_{t-1} = d$ es

Soluciones particulares en casos especiales

RECETA: *Ensayar una solución particular del mismo tipo que la función del término independiente* g_t.

Ejemplo: Si $g_t = d \in \mathbb{R}$ (constante) entonces una solución particular de $y_t + ay_{t-1} = d$ es

- .
- $$\bar{Y}_t = \begin{cases} \frac{d}{1+a}, & \text{si } a \neq -1, \\ d\ t, & \text{si } a = -1. \end{cases}$$

Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .
- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)

Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t\ .$$

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .
- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)
- $a > 1$ Oscilante explosivo

Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .
- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)
- $a > 1$ Oscilante explosivo
- $-1 < a < 0$ Monótono convergente a 0

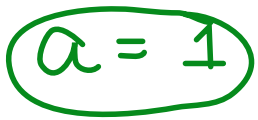
Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .
- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)
- $a > 1$ Oscilante explosivo
- $-1 < a < 0$ Monótono convergente a 0
- $a < -1$ Monótono explosivo





Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- .
- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)
- $a > 1$ Oscilante explosivo
- $-1 < a < 0$ Monótono convergente a 0
- $a < -1$ Monótono explosivo
- $a = 1$ Oscilante regular

Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea $y_t + ay_{t-1} = 0$

$y_t^{(h)} = A\ (-a)^t$.

Tipos de movimientos (considerando $A > 0$):

- $0 < a < 1$ Oscilante amortiguado (convergente a 0)
- $a > 1$ Oscilante explosivo
- $-1 < a < 0$ Monótono convergente a 0
- $a < -1$ Monótono explosivo
- $a = 1$ Oscilante regular
- $a = -1$ Constante

Estabilidad del equilibrio

$y_t + a y_{t-1} = g_t \rightarrow y_t = y_t^{(h)} + \bar{y}_t$

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t \to \infty} y_t^{(h)} = 0.$$

$y_t^{(h)} \rightarrow 0$

Condición necesaria y suficiente de estabilidad en base a los datos del problema:

$$|a| < 1$$

$$y_t + a y_{t-1} = 0$$

Ejemplo 1) Dinámica de los multiplicadores

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

- Solución de la ecuación homogénea asociada:

Ejemplo 1) Dinámica de los multiplicadores

$$Y_t - b\ Y_{t-1} = a + I_0\ +\ \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

- Solución de la ecuación homogénea asociada:
- $$Y_t = A\ b^t$$

Ejemplo 1) Dinámica de los multiplicadores

$$Y_t - b\ Y_{t-1} = a + I_0\ +\ \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

- Solución de la ecuación homogénea asociada:
- $$Y_t = A\ b^t$$
- Solución particular (nuevo nivel de equilibrio):

Ejemplo 1) Dinámica de los multiplicadores

$$Y_t - b\ Y_{t-1} = a + I_0\ +\ \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

- Solución de la ecuación homogénea asociada:
- $$Y_t = A\ b^t$$
- Solución particular (nuevo nivel de equilibrio):
- $$\bar{Y}_t = \frac{a + I_0\ +\ \Delta I}{1 - b}$$

Ejemplo 1) Dinámica de los multiplicadores

$$Y_t - b\, Y_{t-1} = a + I_0 \; + \; \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

- Solución de la ecuación homogénea asociada:
- $$Y_t = A\, b^t$$
- Solución particular (nuevo nivel de equilibrio):
- $$\bar{Y}_t = \frac{a + I_0 \; + \; \Delta I}{1 - b}$$

$\frac{\Delta I}{1-b}$

- Solución general:
- $$\left[Y_t = A\, b^t + \frac{a + I_0 \; + \; \Delta I}{1 - b} \right.$$

$t \to \infty$, $Y_t \longrightarrow \frac{a + I_0}{1-b} + \frac{\Delta I}{1-b}$

- Determinación de A (tomar $t = 0$)
- $$Y_0 = A + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}$$

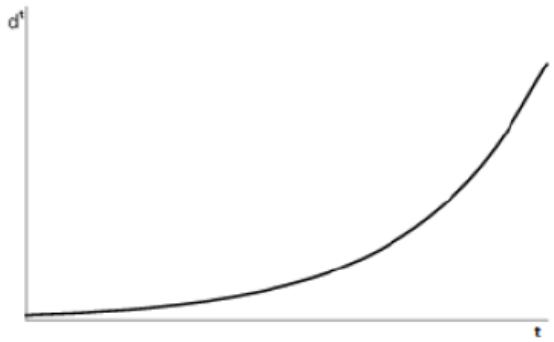
  luego
- $$A = Y_0 - \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}.$$

- Equilibrio estable ($|b| < 1$). Movimiento monótono convergente al nuevo nivel de equilibrio $\bar{Y} = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}$,

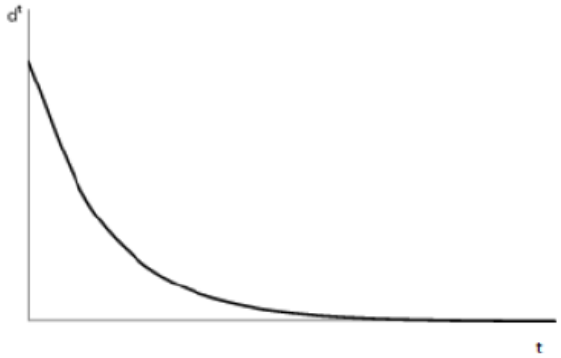
  (ascendente si $\bar{Y} > Y_0$ $(\Delta I > 0)$, descendente si $\bar{Y} < Y_0$ $(\Delta I < 0)$, constante si $\bar{Y} = Y_0$ $(\Delta I = 0)$).

Tipos de trayectorias

Funciones exponenciales: d^t

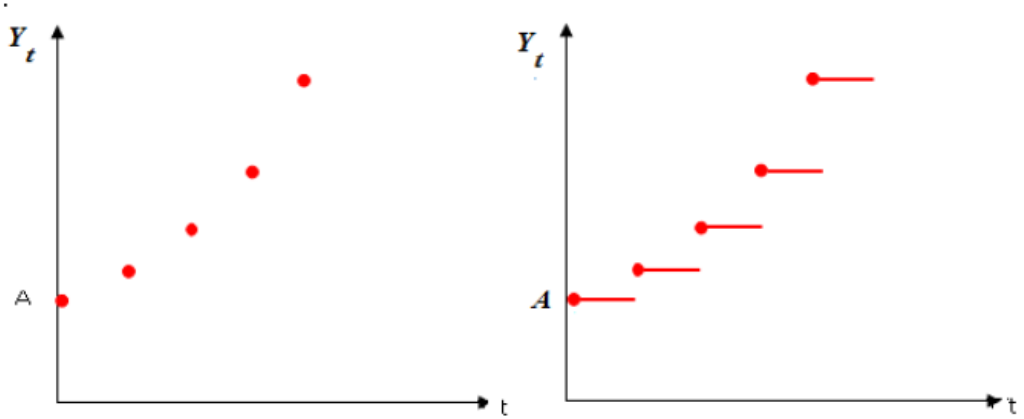


$d > 1$

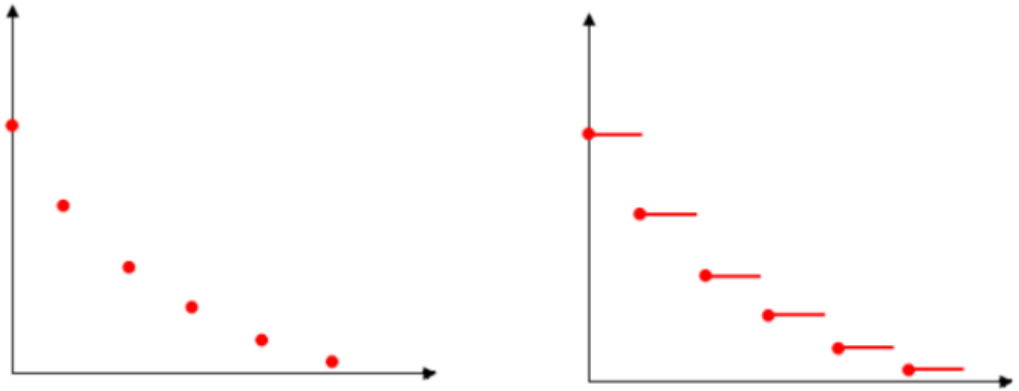


$0 < d < 1$

$$y_t = (-a)^t$$

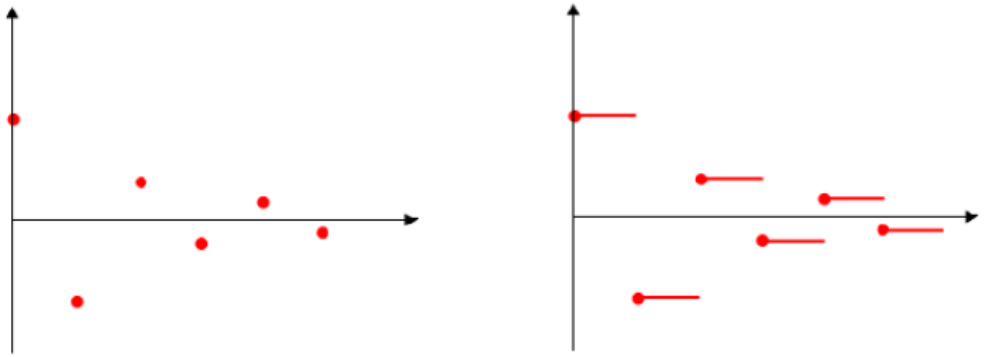


$a < -1$

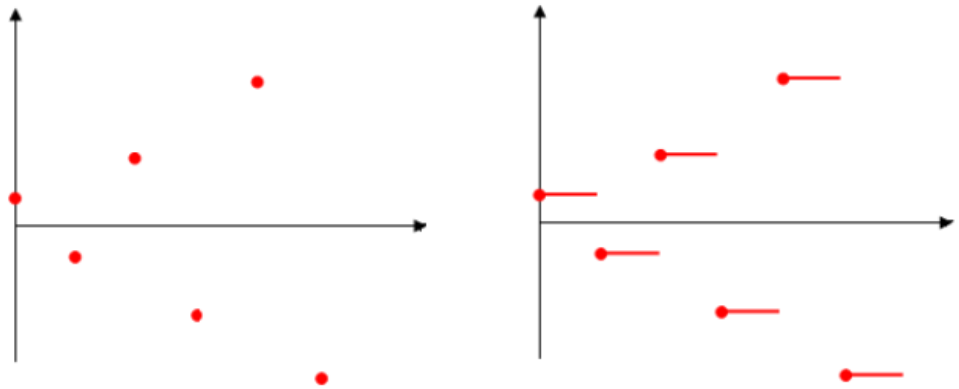


$-1 < a < 0$

$$y_t = (-a)^t$$

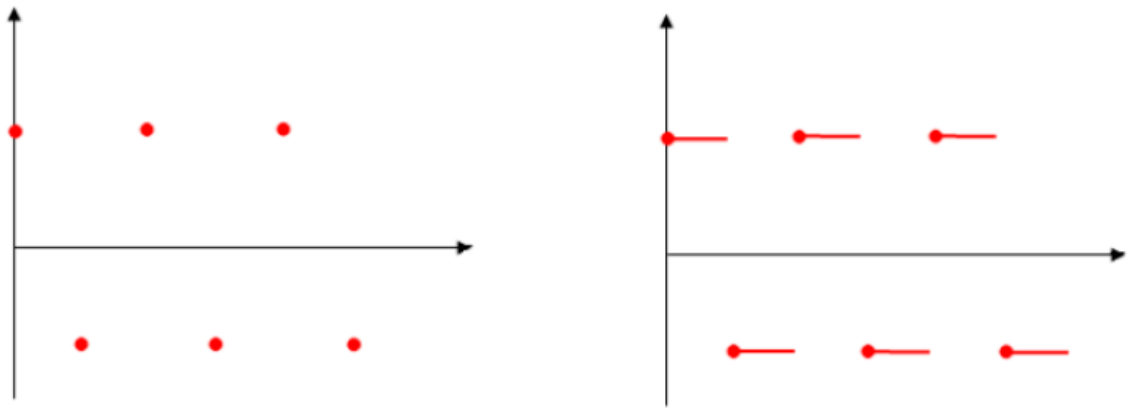


$0 < a < 1$

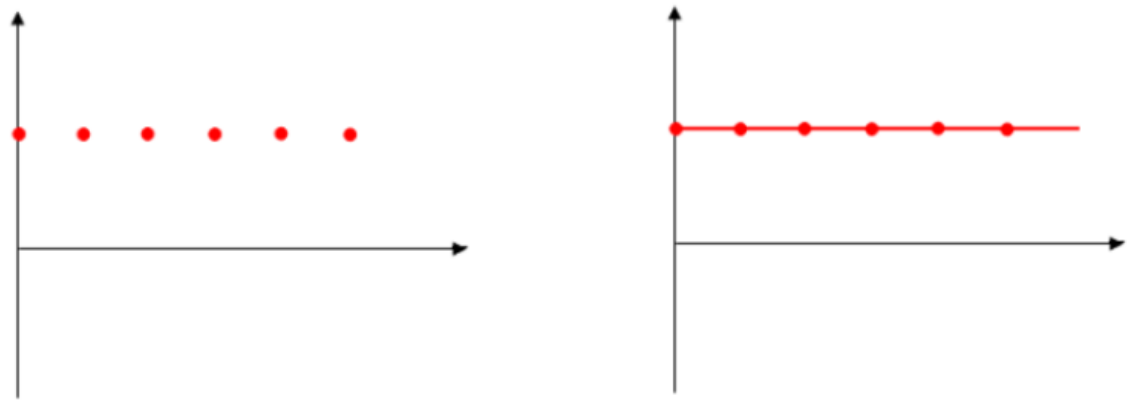


$a > 1$

$$y_t = (-a)^t$$



$a = 1$



$a = -1$

Solución de ejemplos: Dinámica de los multiplicadores

Ejemplo 1) (caso básico)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= a + b\ Y_{t-1}, \\ I_t &= I_0\ +\ \Delta I, \end{aligned}$$

donde $a,\ 0 < b < 1,\quad Y_0,\quad I_0,\ \Delta I$ son conocidos.

$$Y_t - b\ Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

Solución:

$$Y_t = A\ b^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}.$$

Si $\bar{Y} = \frac{a+I_0\ +\ \Delta I}{1-b}$, $Y_0 = \frac{a+I_0}{1-b}$, entonces $A = Y_0 - \bar{Y}$, luego

$$Y_t = (\,Y_0 - \bar{Y}\,)\, b^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}.$$

Trayectorias estables $0 < b < 1$

$$Y_t = (Y_0 - \bar{Y})\ b^t + \frac{a + I_0\ +\ \Delta I}{1 - b}$$

Observación: De estática comparativa un cambio autónomo en la inversión

$$I_0 \rightarrow I_0 + \Delta I,$$

lleva a un cambio en el producto de

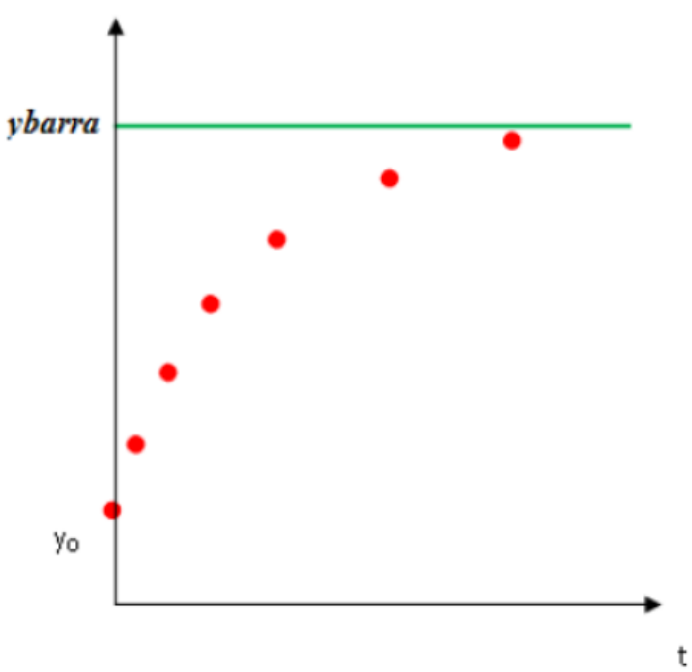
$$\Delta Y = \frac{\Delta I}{1 - b},$$

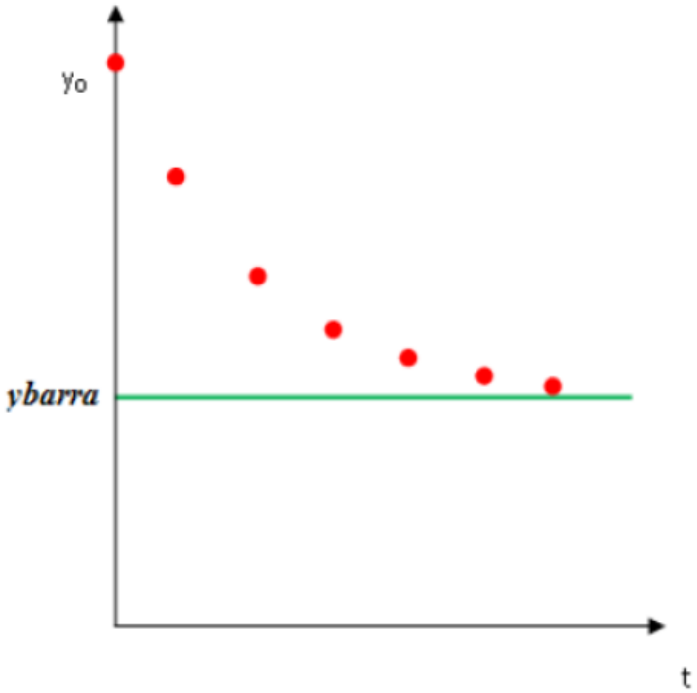
o sea el equilibrio cambia

$$Y_0 \rightarrow Y_0 + \Delta Y = \bar{Y}.$$

Con un modelo dinámico podemos analizar cómo se produce el movimiento de Y_0 a $\bar{Y}$ (y confirmar que efectivamente se produce).

Trayectorias





$\Delta I > 0$ $\Delta I < 0$

Ejemplo 2) (una economía cerrada)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= a + b\ Y_{t-1}, \\ I_t &= h\ Y_{t-1} + I_0\ +\ \Delta I, \end{aligned}$$

donde $a,\ 0 < b, h < 1,\ \ Y_0,\ \ I_0,\ \Delta I$ son conocidos.

$$Y_t - (b+h)\ Y_{t-1} = a + I_0\ +\ \Delta I, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

Solución: Si $b + h \neq 1$

$$Y_t = A\ (b+h)^t + \frac{a + I_0\ +\ \Delta I}{1-b-h}.$$

Si $\bar{Y} = \frac{a+I_0\ +\ \Delta I}{1-b-h}$, entonces $A = Y_0 - \bar{Y}$, luego

$$Y_t = (Y_0 - \bar{Y})\,(b+h)^t + \bar{Y}.$$

Condición de estabilidad: $b + h < 1$

$$h < 1 - b$$

Tipos de trayectorias

Trayectorias

- Monótonas ya que $b + h > 0$.
- Convergentes (estable) si $h < 1 - b$
- Crecientes si $Y_0 < \bar{Y}$, decrecientes si $Y_0 > \bar{Y}$.

Ejemplo 3) (una economía abierta)

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + X_t - M_t, \\ C_t &= a + b\ Y_{t-1}, \\ I_t &= h\ Y_{t-1} + I_0\ +\ \Delta I, \\ X_t &= X_0\ +\ \Delta X, \\ M_t &= m\ Y_{t-1} + M_0 \end{aligned}$$

donde $a,\ 0 < b, h, m < 1,\ Y_0,\ I_0,\ \Delta I,\ X_0, \Delta X,\ M_0$ son conocidos.

$$Y_t - (b + h - m)\ Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I + X_0 + \Delta X - M_0, \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Solución general:

Si $b + h - m \neq 1$,

$$Y_t = A\,(b + h - m)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I + X_0 + \Delta X - M_0}{1 - b - h + m}$$

Condición de estabilidad:

$$|b + h - m| < 1$$

equivalentemente (dado que $b + h > m$)

$$h < 1 - b + m.$$

Las trayectorias son monótonas ($b + h > m$) y convergentes si $h < 1 - b + m$.

En una economía abierta puede darse el caso $h = 1 - b$ en una situación de estabilidad, a diferencia del caso de una economía cerrada.

En Ingeniería Mecatrónica, los sistemas dinámicos discretos aparecen naturalmente cuando un sistema físico continuo es observado mediante sensores y controlado a través de una computadora o un microcontrolador.

En Ingeniería Mecatrónica, los sistemas dinámicos discretos aparecen naturalmente cuando un sistema físico continuo es observado mediante sensores y controlado a través de una computadora o un microcontrolador. Consideremos un motor de corriente continua cuya velocidad angular se denota por $\omega(t)$.

En Ingeniería Mecatrónica, los sistemas dinámicos discretos aparecen naturalmente cuando un sistema físico continuo es observado mediante sensores y controlado a través de una computadora o un microcontrolador. Consideremos un motor de corriente continua cuya velocidad angular se denota por $\omega(t)$.
Supongamos que el comportamiento dinámico del motor viene dado por

$$J\frac{d\omega}{dt} + b\omega(t) = Ku(t), \tag{1}$$

donde:

- J es el momento de inercia del motor;
- b es el coeficiente de rozamiento;
- K es una constante asociada al motor;
- $u(t)$ es la tensión aplicada al motor;
- $\omega(t)$ es la velocidad angular.

Consideremos

$$J = 0{,}1, \qquad b = 0{,}5, \qquad K = 1.$$

Entonces la ecuación (5) queda

$$0{,}1\frac{d\omega}{dt} + 0{,}5\omega(t) = u(t).$$

Dividiendo por 0,1 obtenemos

$$\frac{d\omega}{dt} + 5\omega(t) = 10u(t). \tag{2}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden que describe aproximadamente la dinámica del motor.

En un sistema de control digital, el sensor no mide continuamente la velocidad. En cambio, realiza mediciones a intervalos regulares. Supongamos que el sistema se mide cada
$T = 0{,}1$ s.
Definimos

$$\omega_t = \omega(tT), \qquad t = 0, 1, \ldots$$

y

$$u_t = u(tT).$$

Por lo tanto,

$$\omega_0 = \omega(0), \qquad \omega_1 = \omega(T), \qquad \omega_2 = \omega(2T), \ldots$$

En un sistema de control digital, el sensor no mide continuamente la velocidad. En cambio, realiza mediciones a intervalos regulares.
Supongamos que el sistema se mide cada
$T = 0{,}1$ s.
Definimos

$$\omega_t = \omega(tT),$$

y

$$u_t = u(tT).$$

Por lo tanto,

$$\omega_0 = \omega(0), \qquad \omega_1 = \omega(T), \qquad \omega_2 = \omega(2T), \ldots$$

Aproximamos la derivada mediante una diferencia hacia adelante:

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{\omega_{t+1} - \omega_t}{T}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_{t+1} = 0{,}5\omega_t + u_t.}$$

$w_t = w(tT)$

$T = 0{,}1$ s.

Esta es una **ecuación en diferencias de primer orden**.

$w_{t+1} - 0{,}5\, w_t = u_t$

Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_{t+1} = 0{,}5\omega_t + u_t.}$$

Esta es una **ecuación en diferencias de primer orden**. Supongamos que queremos que el motor alcance una velocidad deseada

$$\omega^* = 10 \text{ rad/s}.$$

Definimos el error de control mediante

$$e_t = \omega^* - \omega_t. \tag{3}$$

Utilizaremos un controlador proporcional, definido por

$$u_t = K_p e_t. \tag{4}$$

Tomemos

$$K_p = 0{,}8.$$

Entonces $u_t = 0{,}8(10 - \omega_t)$.

Por lo tanto,

$$\omega_{t+1} + 0{,}3\omega_t = 8$$

$$\boxed{\omega_{t+1} = 8 - 0{,}3\omega_t} \tag{5}$$

Esta es la ecuación en diferencias que describe la evolución de la velocidad del motor cuando se utiliza el controlador proporcional elegido.

Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_{t+1} = 8 - 0{,}3\omega_t} \tag{5}$$

Esta es la ecuación en diferencias que describe la evolución de la velocidad del motor cuando se utiliza el controlador proporcional elegido.
Ejercicio: resuelva la ecuación en diferencias, encuentre el punto de equilibrio y analice la estabilidad del equilibrio. ¿Converge la solución al valor deseado de ω?

Ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$y_t + a_1\ y_{t-1} + a_2\ y_{t-2} = g_t, \qquad t = 2, 3, ..., \tag{6}$$

donde:

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

g_t : es una función dependiente del tiempo t (término independiente),

y_0, y_1 : condiciones iniciales,

son datos conocidos del modelo.

Solución general de (6)

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$y_t + a_1\ y_{t-1} + a_2\ y_{t-2} = g_t, \qquad t = 1, 2, ...,$$

$a_1, a_2,\ y_0, y_1, g_t$ conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y_t^{(h)}$, y una solución particular, $\bar{y}_t$.

Solución general de (6)

$y_t + a\, y_{t-1} = 0 \qquad y_t = (-a)^t$

Dada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes, no homogénea

$$y_t + a_1\, y_{t-1} + a_2\, y_{t-2} = g_t, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

$a_1, a_2,\ y_0, y_1, g_t$ conocidos, su solución viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y_t^{(h)}$, y una solución particular, $\bar{y}_t$.

$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = 0.$

-
-

$$y_t = y_t^{(h)} + \bar{y}_t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

- En general $\bar{y}_t$ representa la solución de equilibrio y $y_t^{(h)}$ los desvíos con respecto al equilibrio.
- **RECETA**: *Ensayar una solución particular $\bar{y}_t$ del mismo tipo que la función del término independiente g_t.*

Solución general de (6), caso homogéneo

Dada la ecuación en diferencias lineal de segundo orden, con coeficientes constantes, homogénea

$$y_t + a_1\, y_{t-1} + a_2\, y_{t-2} = 0, \qquad t = 2, 3, \ldots,$$

$a_1, a_2,\ y_0, y_1$ conocidos,

- su solución viene dada, en general, por
-

$$y_t = A_1 (\lambda_1)^t + A_2 (\lambda_2)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde A_1, A_2 son constantes que se determinan en base a las condiciones iniciales.

- λ_1 y λ_2 son soluciones de la **ecuación característica**:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Soluciones de (6), caso homogéneo, según las raíces características

- Sea el discriminante de la ecuación característica

$$\Delta = (a_1)^2 - 4a_2$$

- $\Delta > 0$, raíces reales λ_1 y λ_2 distintas

$$y_t^{(h)} = A_1 (\lambda_1)^t + A_2 (\lambda_2)^t, \qquad t = 0, 1, 2, ...,$$

donde A_1 y A_2 se determinan en base a las condiciones iniciales.

- $\Delta = 0$, raíces reales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ coincidentes (una raíz real doble)

$$y_t^{(h)} = \lambda^t (A_1 + A_2 t), \qquad t = 0, 1, 2, ...,$$

$A_1 \lambda^t + A_2 \lambda^t \cdot t$

- $\Delta < 0$, raíces complejas conjugadas λ_1 y λ_2 λ_1 y λ_2

$$y_t^{(h)} = A_1 (\lambda_1)^t + A_2 (\lambda_2)^t, \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

Números complejos

Repaso números complejos $z = \alpha + i\beta$, $i^2 = -1$

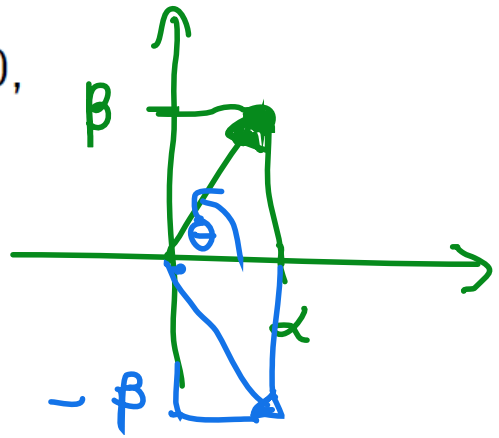
complejo conjugado $\bar{z} = \alpha - i\beta$

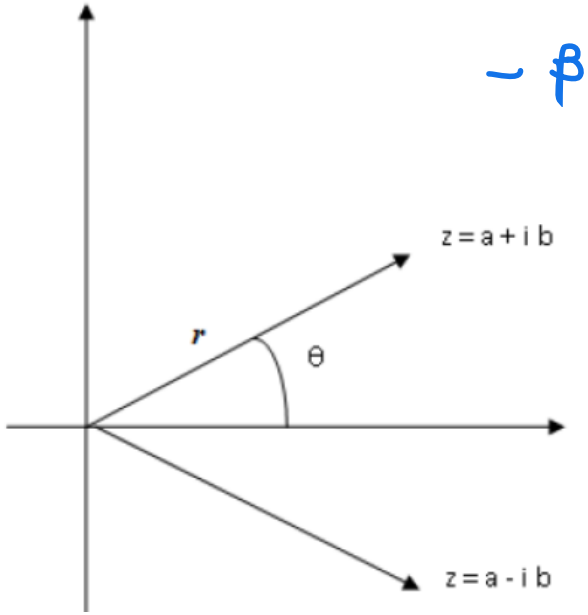
módulo de z : $|z| = r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

argumento de z : $\theta = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ si $\alpha \neq 0$,

$\theta = \pi/2$ si $\alpha = 0,\ \beta > 0$

$\theta = 3\pi/2$ si $\alpha = 0,\ \beta < 0$





Raíces complejas

Forma exponencial de z :

$$\begin{aligned} z &= r\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = r\,e^{i\theta} \\ z^t &= r^t\, e^{i\theta t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

luego

$$z^t = r^t\left(\cos t\theta + i\,\mathrm{sen}\,t\theta\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

NOTA: Para w complejo

$$e^w := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = 1 + w + w^2/2 + w^3/3! + \ldots$$

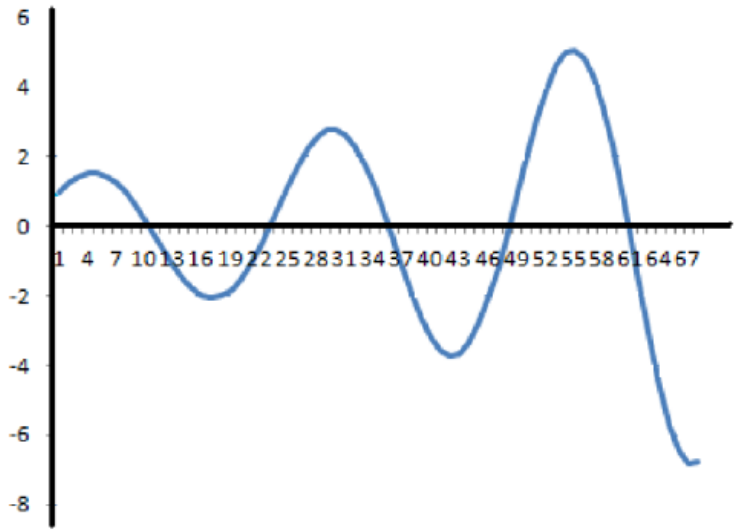
Raíces complejas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

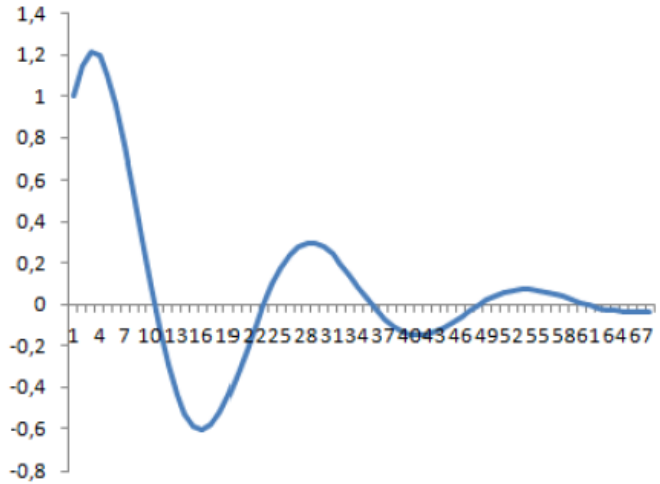
Solución de la ecuación homogénea

$$y_t^{(h)} = r^t \left(A_1 \cos t\theta + A_2 \operatorname{sen} t\theta\right), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

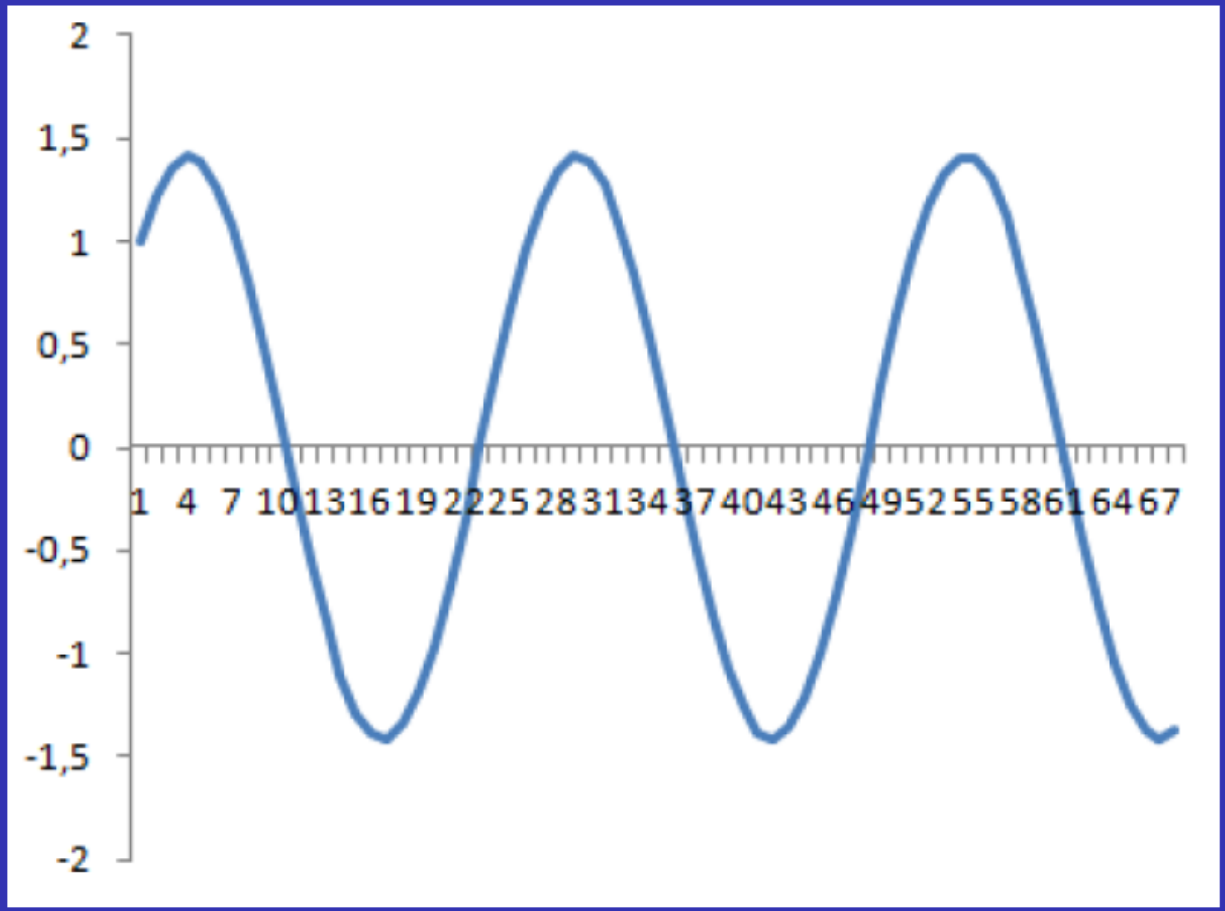
donde A_1 y A_2 se determinan en base a las condiciones iniciales.



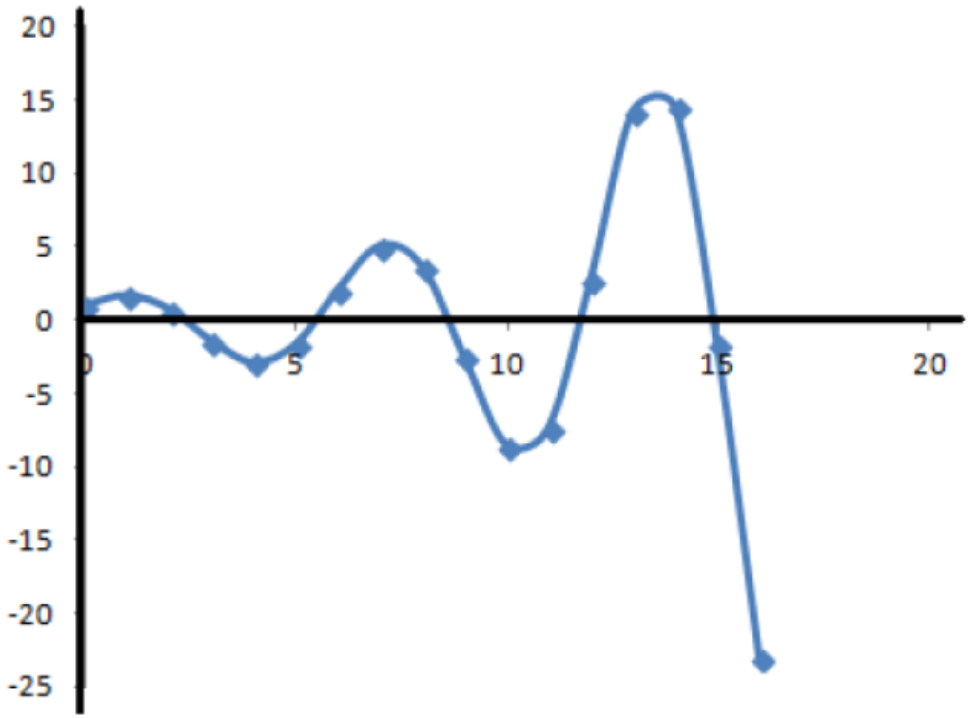
$r > 1$



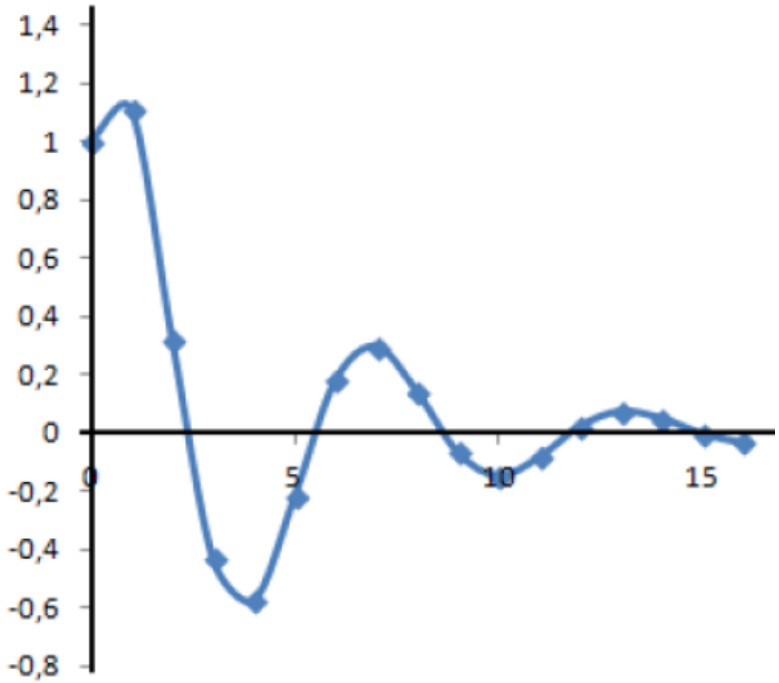
$0 < r < 1$


2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58 61 64 67

$r = 1$


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
5
10
15
20

$r > 1$


1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
0
5
10
15

$0 < r < 1$

Resumen Trayectorias de la solución de la ecuación homogénea

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = 0$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 =$

Soluciones de la forma

$t \to \infty$

$$y_t^{(h)} = A_1 (\lambda_1)^t + A_2 (\lambda_2)^t,$$

$\begin{cases} Y_0 = A_1 + A_2 \\ Y_1 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda \end{cases}$

- o

$$y_t^{(h)} = \lambda^t (A_1 + A_2 t),$$

- o

$$y_t^{(h)} = r^t (A_1 \cos t\theta + A_2 \operatorname{sen} t\theta),$$

donde $r = |\lambda_1| = |\lambda_2|$ y $\theta =$ argumento de λ_1 (o λ_1)

A_1 y A_2 se determinan en base a las condiciones iniciales.

Estabilidad del equilibrio

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t\to\infty} y_t^{(h)} = 0.$$

Equivalentemente:

$$|\lambda_i| < 1, \qquad i = 1, 2.$$

Condición necesaria y suficiente de estabilidad en base a los datos del problema:

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_2 > 0, \\ 1 - a_1 + a_2 > 0, \\ 1 - a_2 > 0. \end{cases}$$

Estabilidad del equilibrio

Condición de estabilidad:

$$\lim_{t \to \infty} y_t^{(h)} = 0.$$

Equivalentemente:

$$|\lambda_i| < 1, \qquad i = 1, 2.$$

Condición necesaria y suficiente de estabilidad en base a los datos del problema:

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_2 > 0, \\ 1 - a_1 + a_2 > 0, \\ 1 - a_2 > 0. \end{cases} \quad a_2 < 1$$

Modelo de Samuelson

- $$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t, \\ C_t &= bY_{t-1}, \\ I_t &= I_t' + I_t'', \\ I_t' &= k\ (C_t - C_{t-1}), \\ I_t'' &= G, \end{aligned}$$

  donde $0 < b < 1,\ k > 0,\ G > 0.$

- Ecuación dinámica

$$Y_t - b(1+k)Y_{t-1} + bkY_{t-2} = G$$

a_1 a_2 $bk < 1$

Condición de estabilidad:

$$b < 1/k$$

Tipo de movimiento: según sea

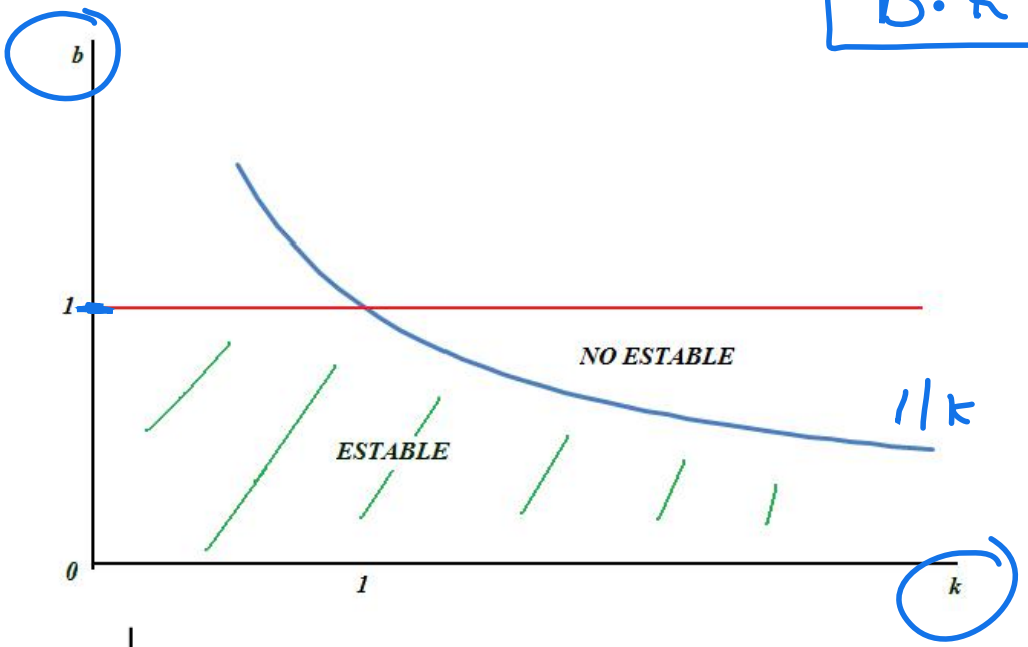
$$\text{¿ } b \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} \frac{4k}{(1+k)^2} \text{ ?}$$

$\lambda^2 - b(1+k)\lambda + bk = 0$ no tiene raíces reales negativas ni nulas. Las raíces son o bien reales positivas, o complejas conjugadas.

$$\Delta = b^2(1+k)^2 - 4bk > 0$$

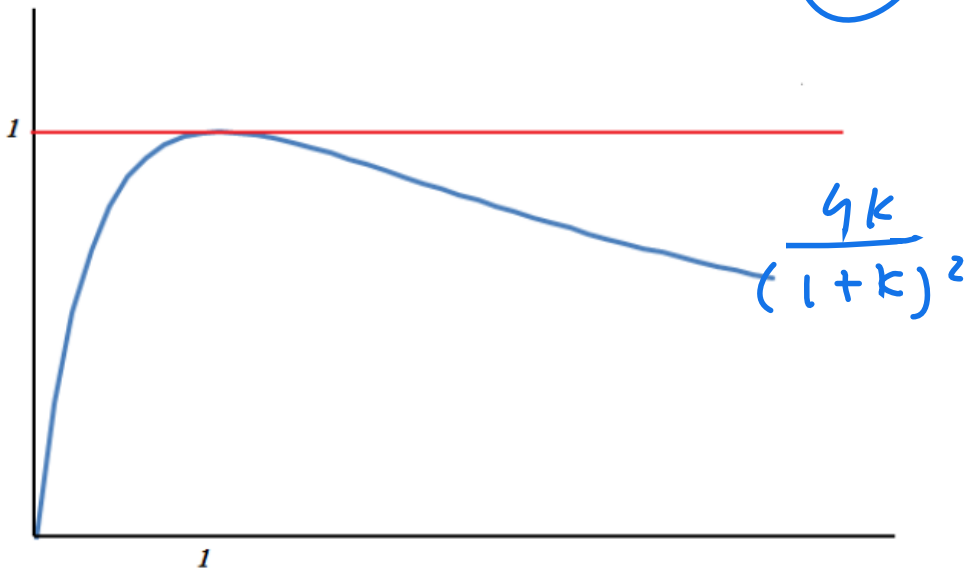
$$b > \frac{4k}{(1+k)^2}$$

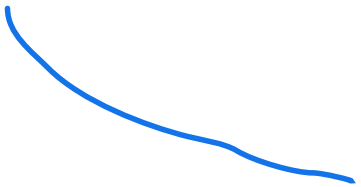
$b \cdot k < 1$

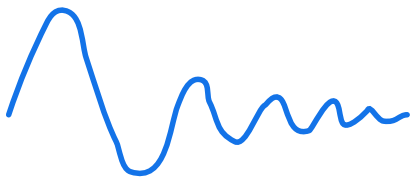


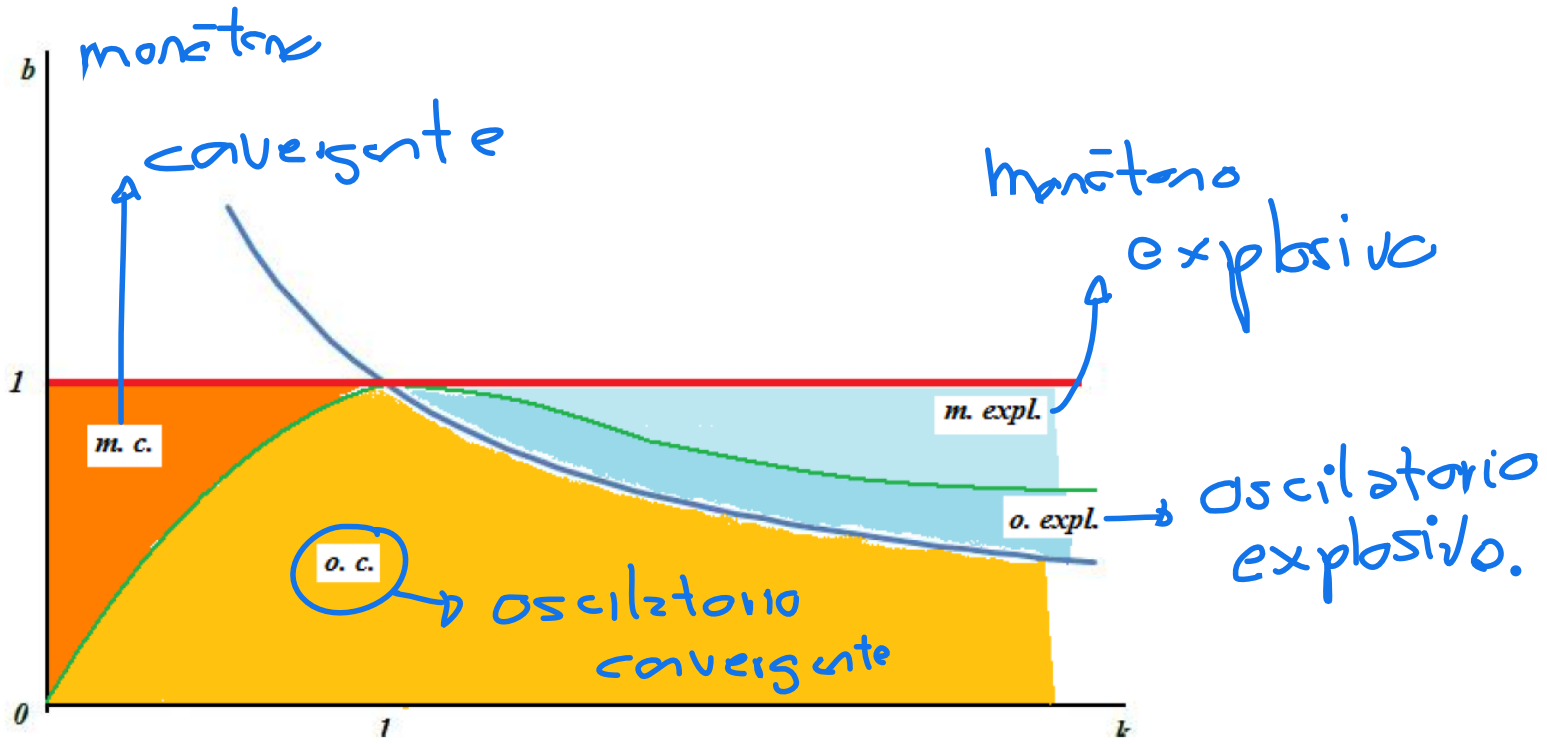
$b = \frac{1}{k}$

$0 < b < 1$









Ejercicio: justifique el diagrama anterior analizando la estabilidad del equilibrio de la ec. dinámica del modelo de Samuelson.

Ecuación en diferencias de primer orden no lineal

$$y_t = y_{t-1} + t^2 y_{t-2} \qquad y_t = f(t, y_{t-1})$$

$$y_t + a\,y_{t-1} = b$$

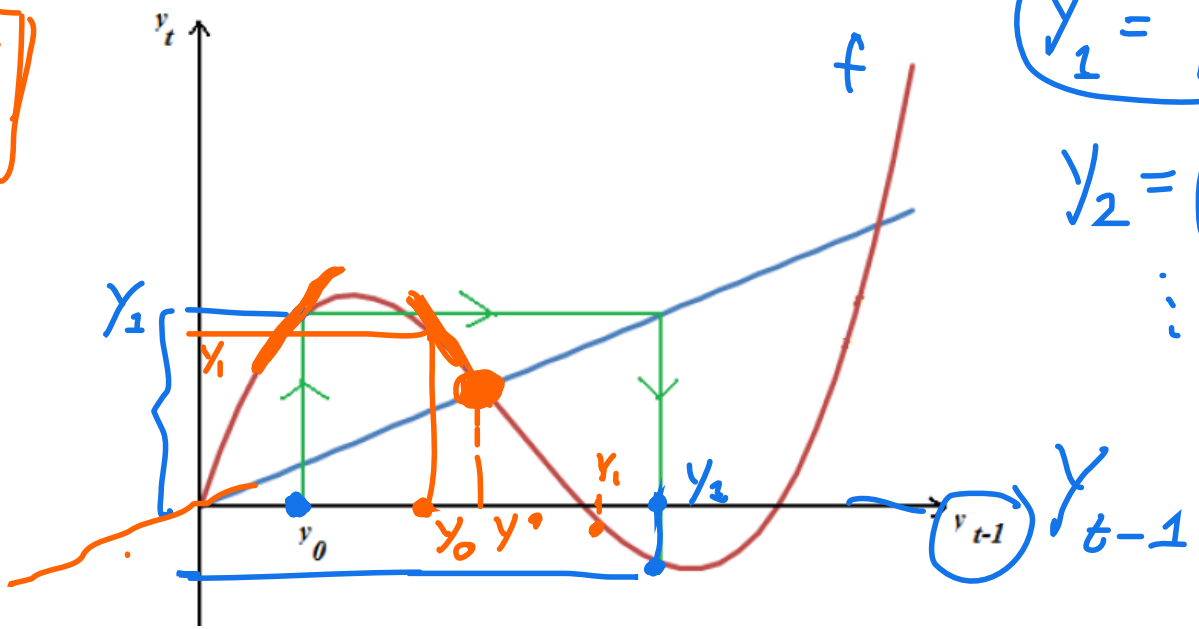
Ecuación autónoma

$$y_t = f(y_{t-1}) \qquad y_t = (y_{t-1})^3,\ y_t = \text{sen}(\ldots$$

Conocido y_0 se puede determinar toda la trayectoria $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Diagrama de fase

$f(y^*) = y^*$



$y_1 = y_0^3$

$y_2 = (y_1)^3$

$\vdots$

y_{t-1}

Equilibrio estacionario (steady state)

y^* es punto de equilibrio si es punto fijo de la función f, esto es

$$y^* = f(y^*)$$

$y_t = f(y_{t-1})$

$t \to \infty$, $y_t \to y^*$

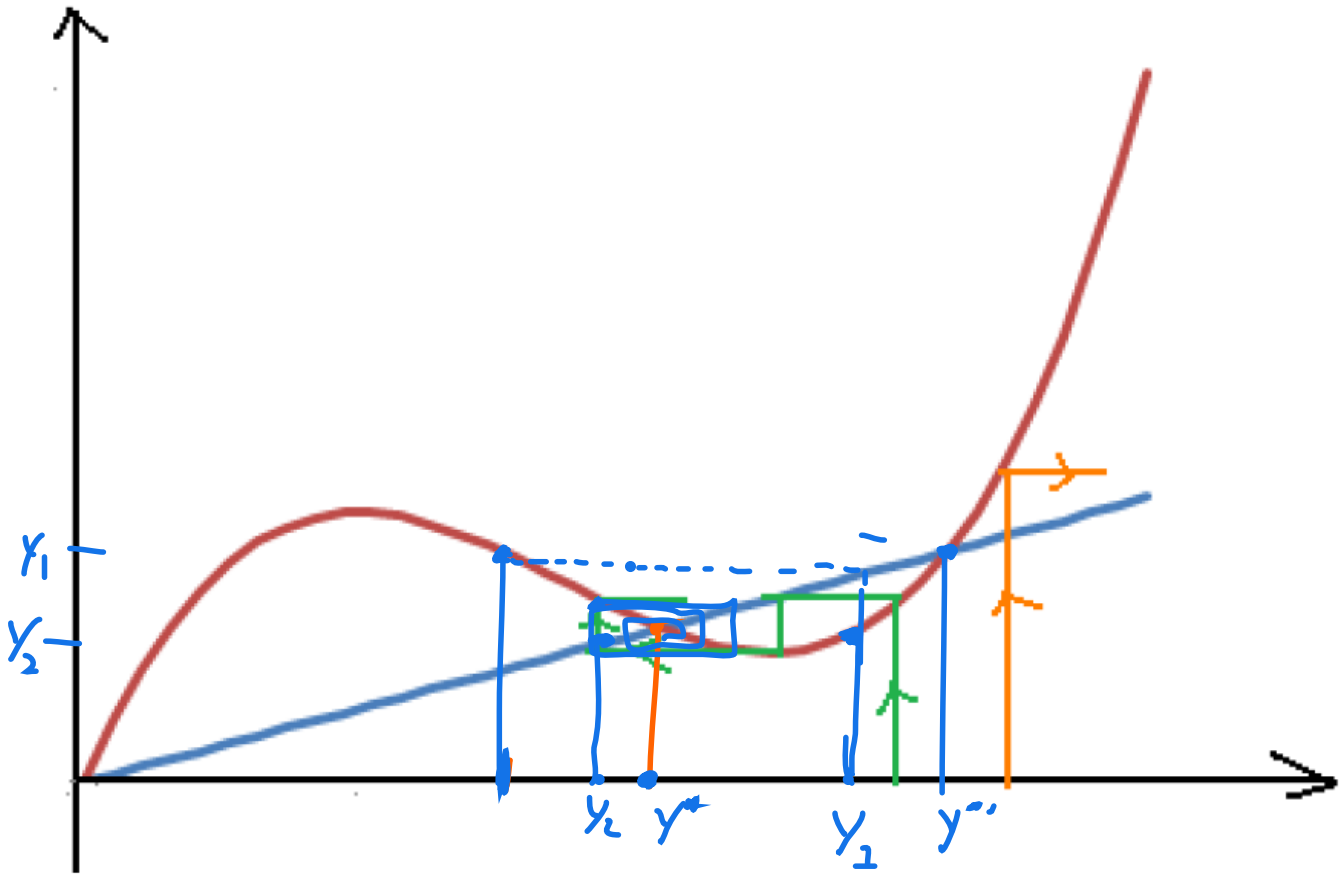
$x^* = f(y^*)$

Condición de estabilidad: Si f es diferenciable con continuidad en y^*, entonces

$$|f'(y^*)| < 1 \text{ implica que } y^* \text{ es localmente estable}$$

y

$$|f'(y^*)| > 1 \text{ implica que } y^* \text{ es inestable}$$


y_1
y_2
y_2
y^*
y_1
y^{**}

Ejemplo: Modelo de crecimiento de Solow

$$K_t = (1-\delta)\, K_{t-1} + s\, F\left(K_{t-1}, L_{t-1};\ A_{t-1}\right)$$

donde $0 < \delta,\ s < 1.$

$$A_t \equiv A > 0, \qquad L_t \equiv L > 0$$

$$k_t = \frac{K_t}{L},$$

$$k_t = (1-\delta)\, k_{t-1} + s\, f\left(k_{t-1};\ A\right)$$

Sea el caso particular de una función Cobb-Douglas

$$f\left(k;A\right)=A\ k^{\alpha},\qquad \text{con}\ \ 0<\alpha<1,$$

entonces

$$k^{*}=\left(\frac{s\ A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Si se considera $g\left(k\right)=\left(1-\delta\right)k\ +s\ f\left(k;\ A\right)$, entonces

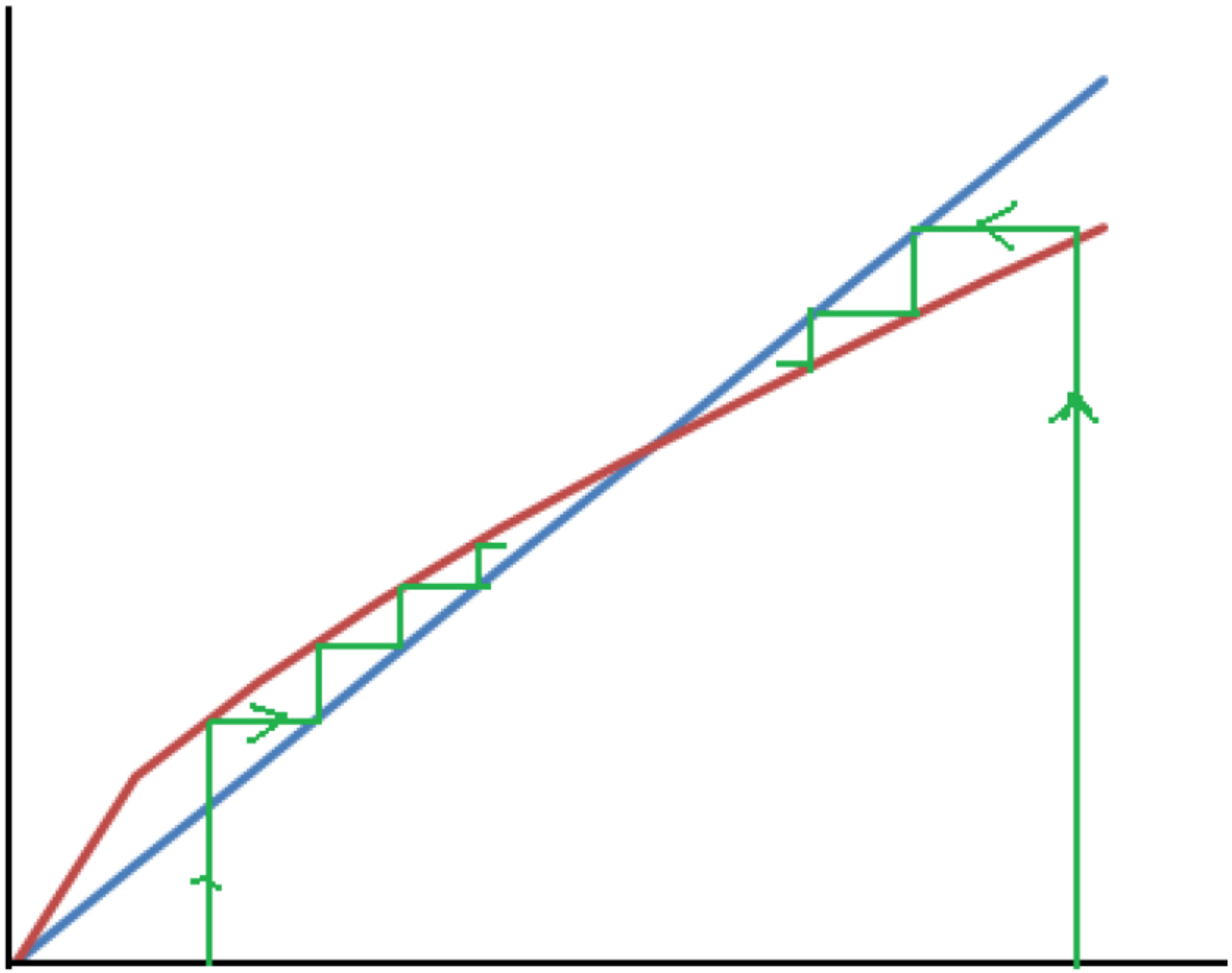
$$\begin{aligned} g'\left(k\right) &= \left(1-\delta\right)\ +s\ f'\left(k;\ A\right) \\ &= \left(1-\delta\right)\ +s\ \alpha\ A\ k^{\alpha-1} \end{aligned}$$

luego

$$g'\left(k^{*}\right)=\left(1-\delta\right)\ +\alpha\ \delta=1-\left(1-\alpha\right)\delta.$$

La condición $\left|g'\left(k^{*}\right)\right|<1$ se verifica, luego el equilibrio estacionario k^{*} es localmente estable.

Equilibrio estacionario k^* localmente estable.

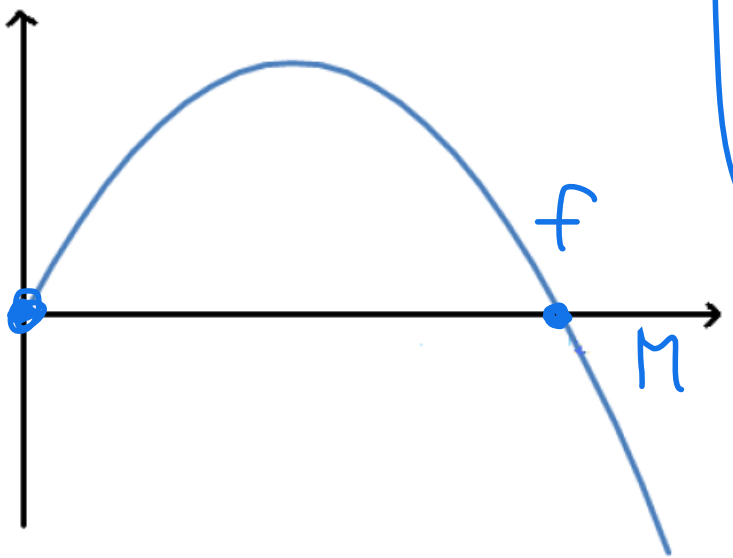


k^* equilibrio estable

Ejemplo: Logística

$$y_t = \underbrace{a\, y_{t-1}\,(M - y_{t-1})}_{f(y_{t-1})},$$

donde a y M son constantes conocidas. (en general a, $M > 0$).



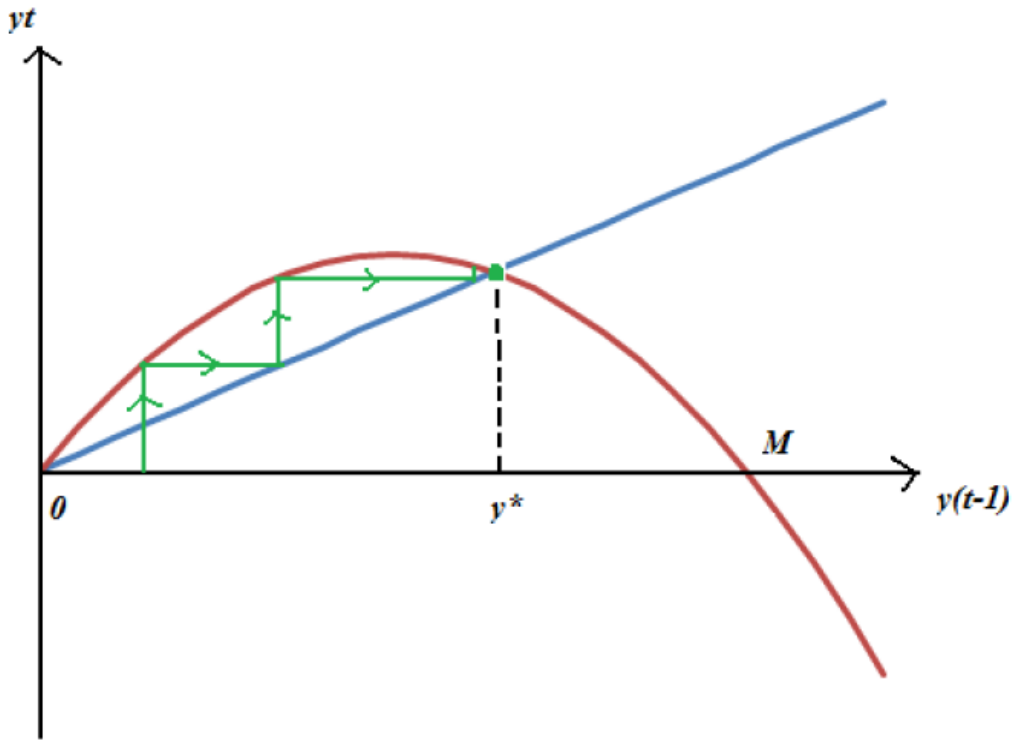
$f(x) = a\,x(M-x)$

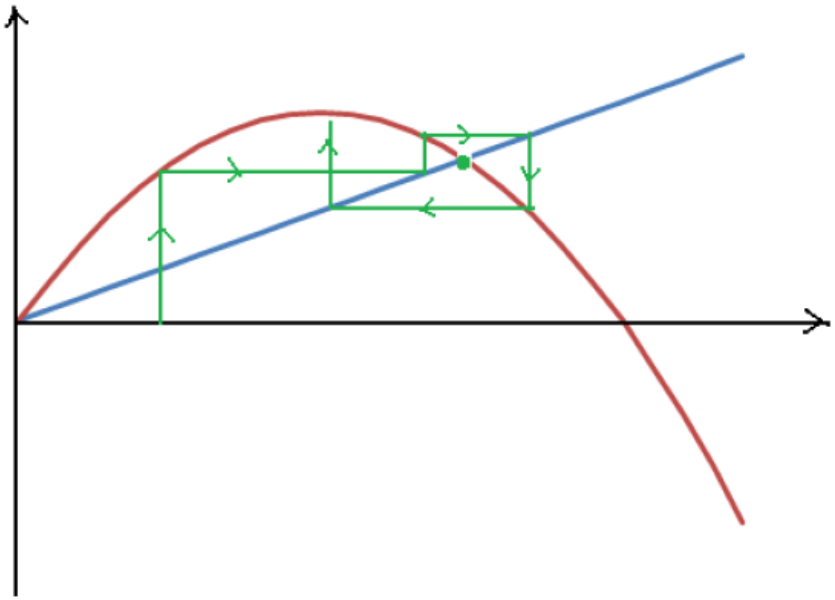
$= axM - a$

$f'(x) = aM - 2$

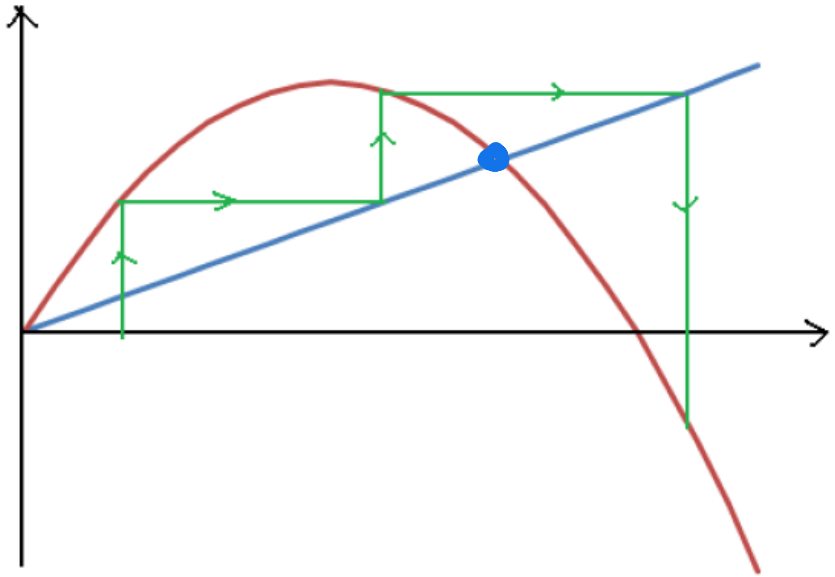
$f(x^*) = x^*$

$a = 2,8$





$a = 3,8$;



$a = 4,5$