UNIDAD 4: Campos vectoriales, integrales de línea e integrales de superficie.

Facultad de Ingeniería

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Tres formas de expresar superficies

Curvas:

Forma explícita: $y = f(x)$.

Forma implícita: $F(x, y) = 0$.

Forma vectorial paramétrica: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

Superficies:

Forma explícita: $z = f(x, y)$.

Forma implícita: $F(x, y, z) = 0$.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in R$$

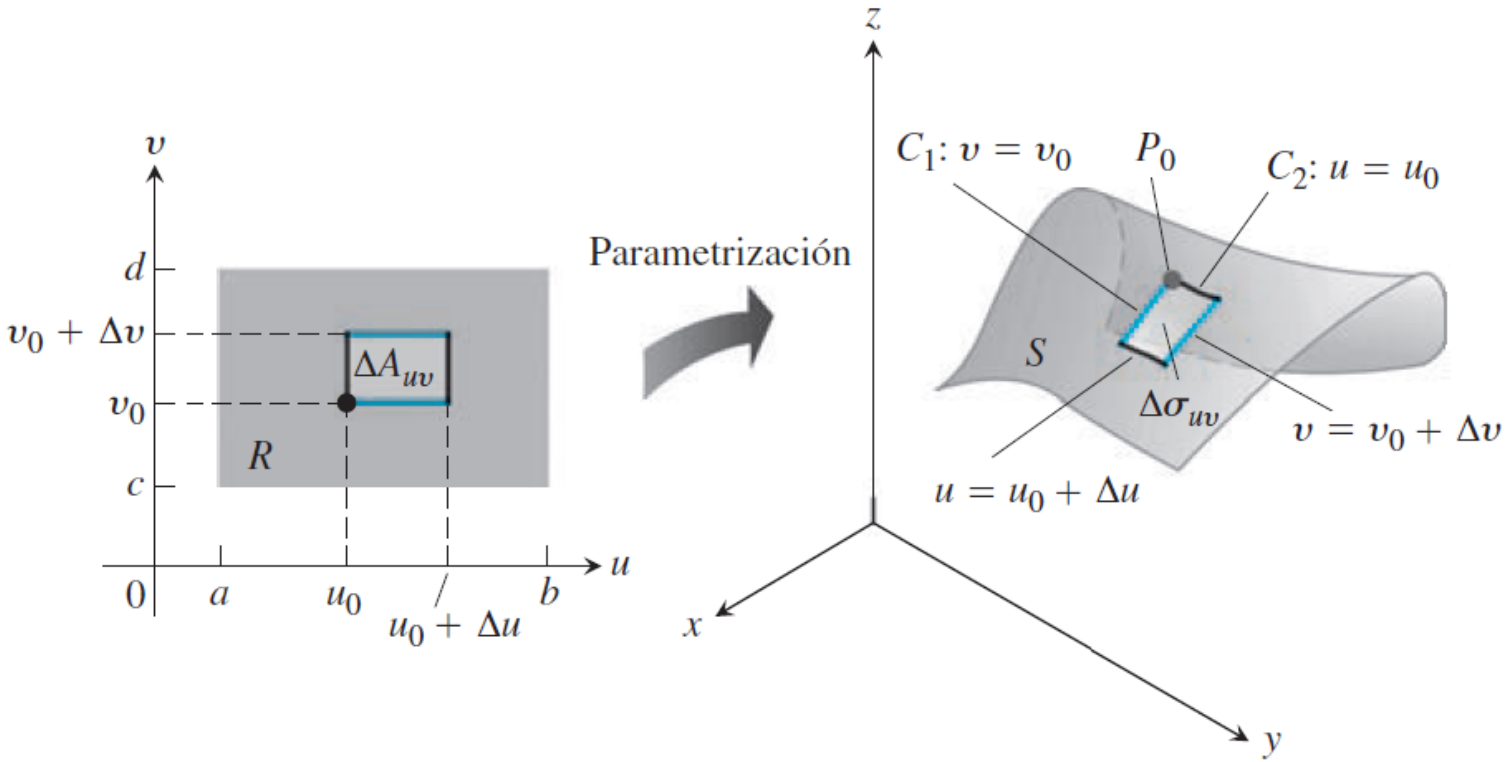
una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R.

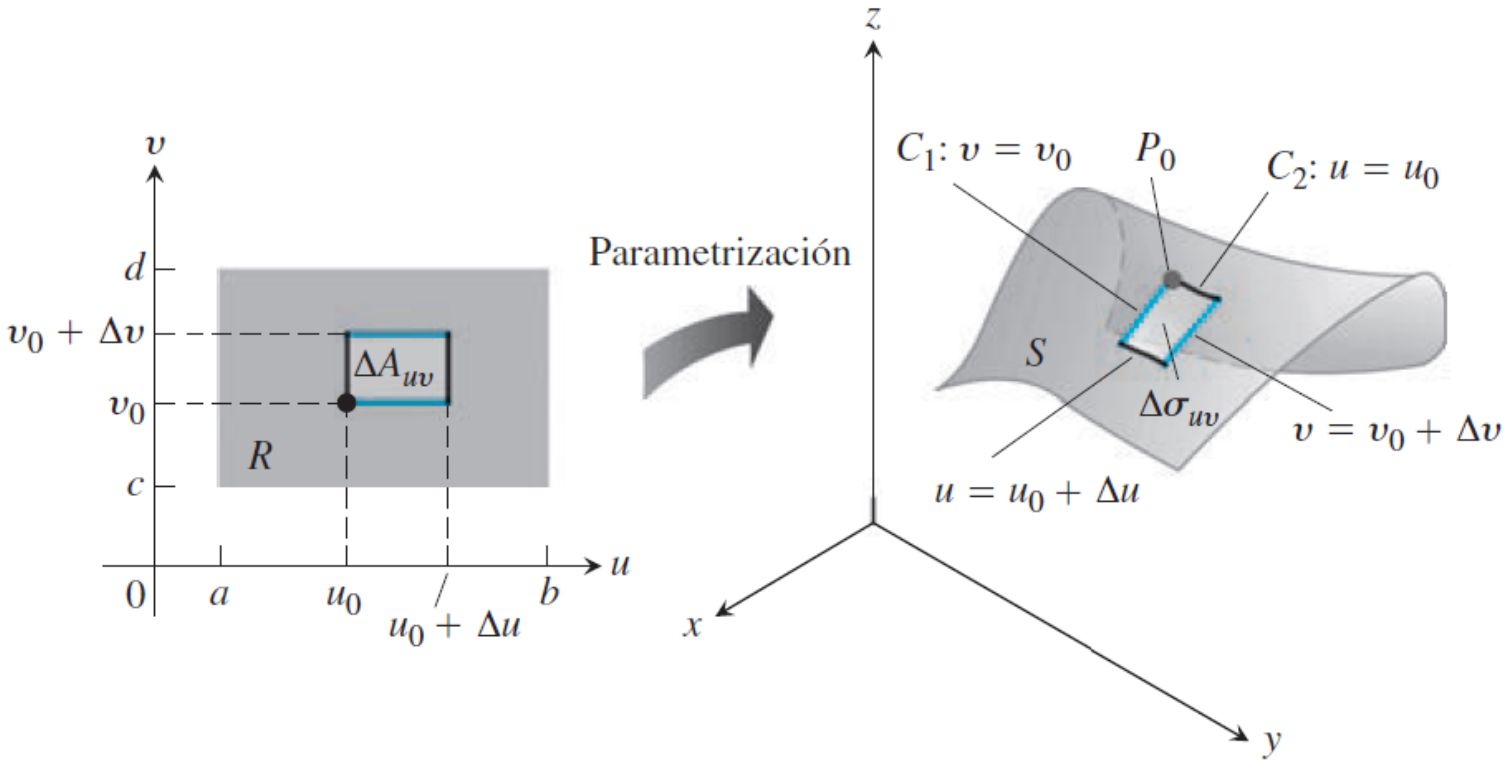


Parametrizaciones de superficies

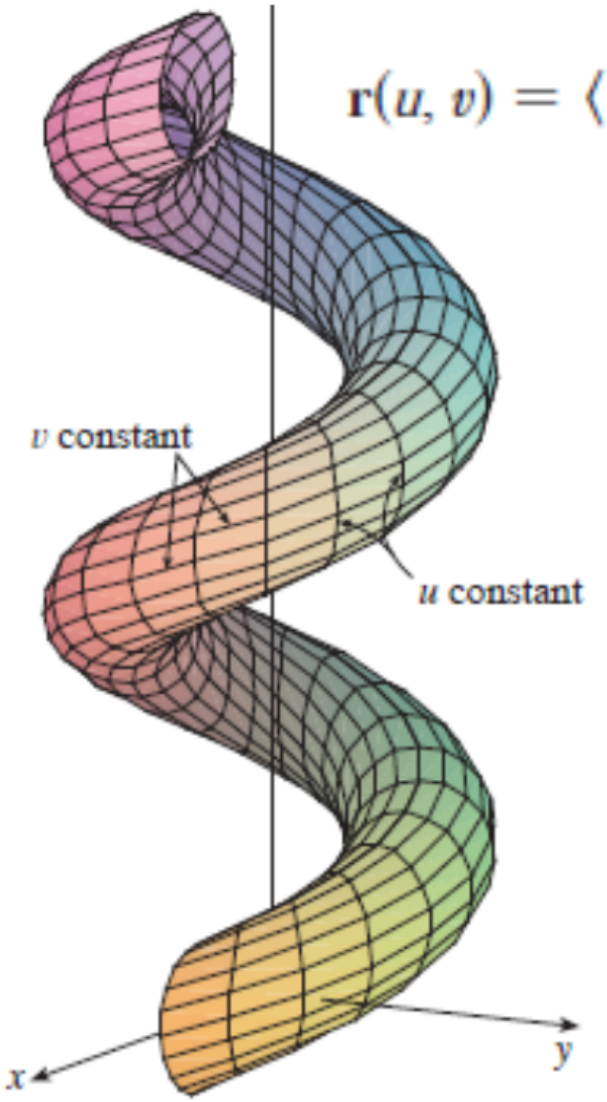
Sea

$$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R. El rango de $\mathbf{r}$ es la superficie S, parametrizada por $\mathbf{r}$; u y v son los parámetros y R es el dominio de los parámetros.



Ejemplo superficie paramétrica

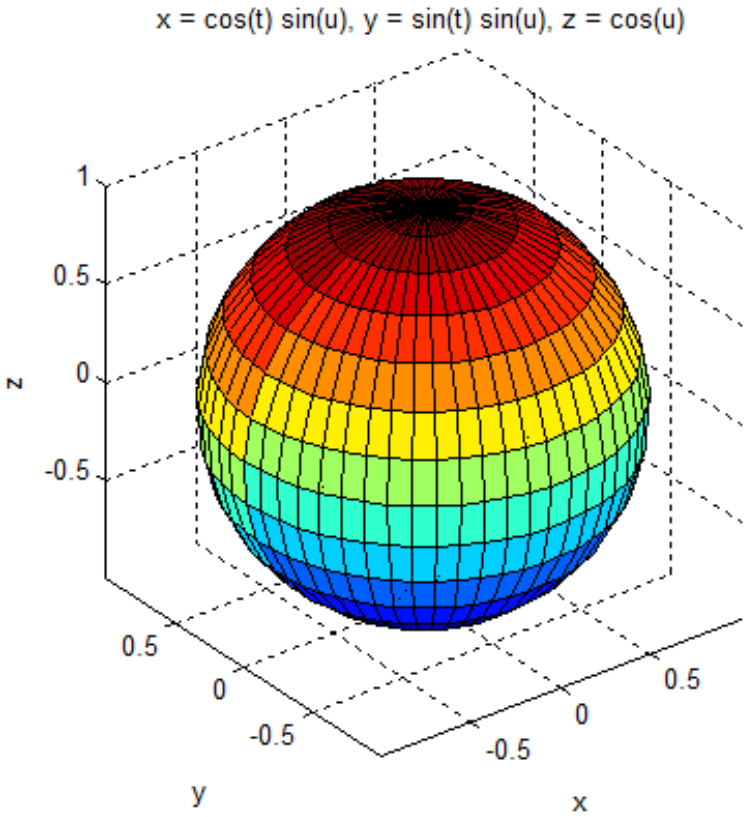


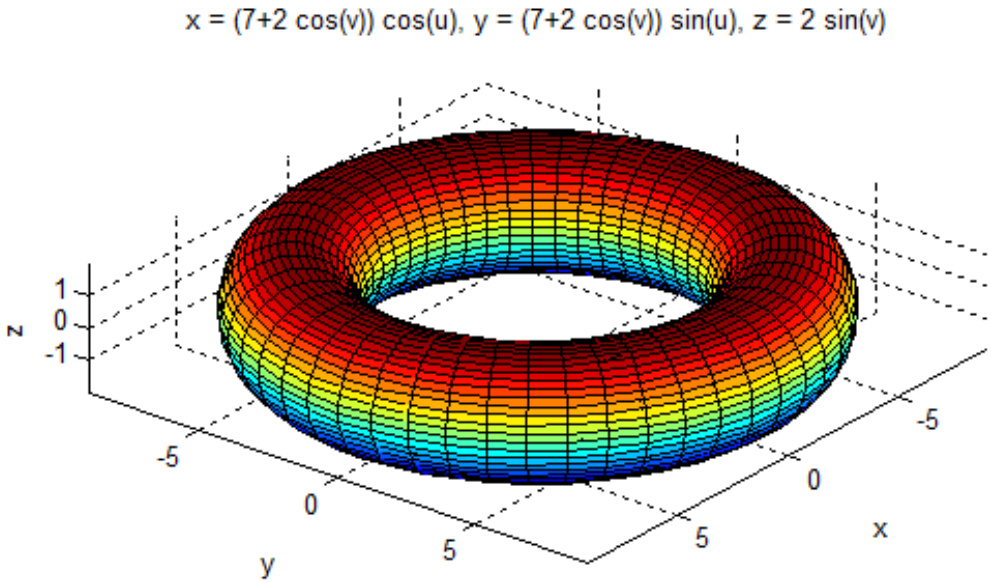
$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

$0 \leq u \leq 4\pi$; $0 \leq v \leq 2\pi$

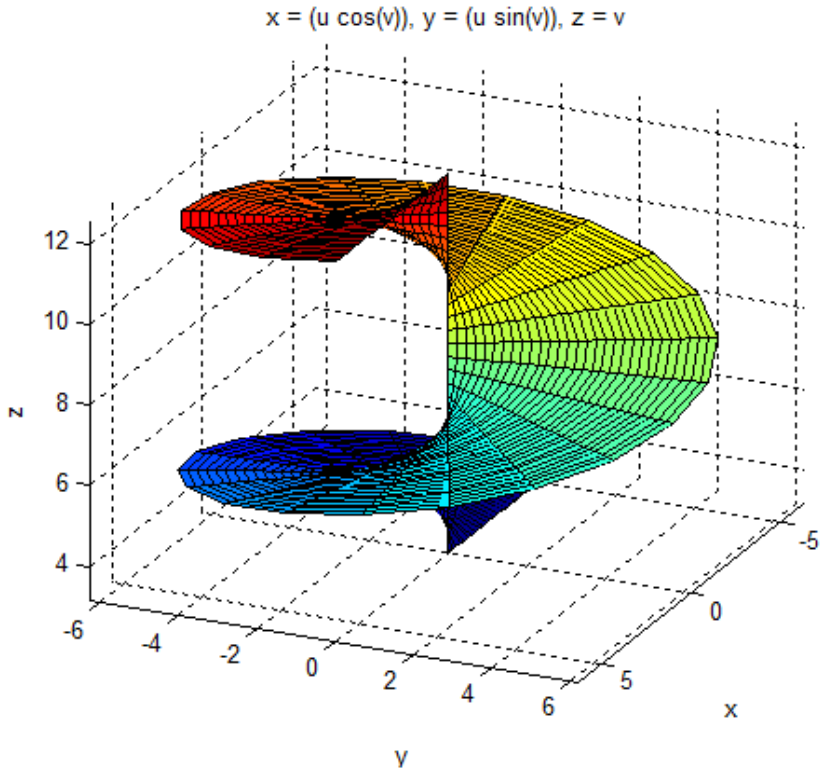
CURVAS RETICULARES

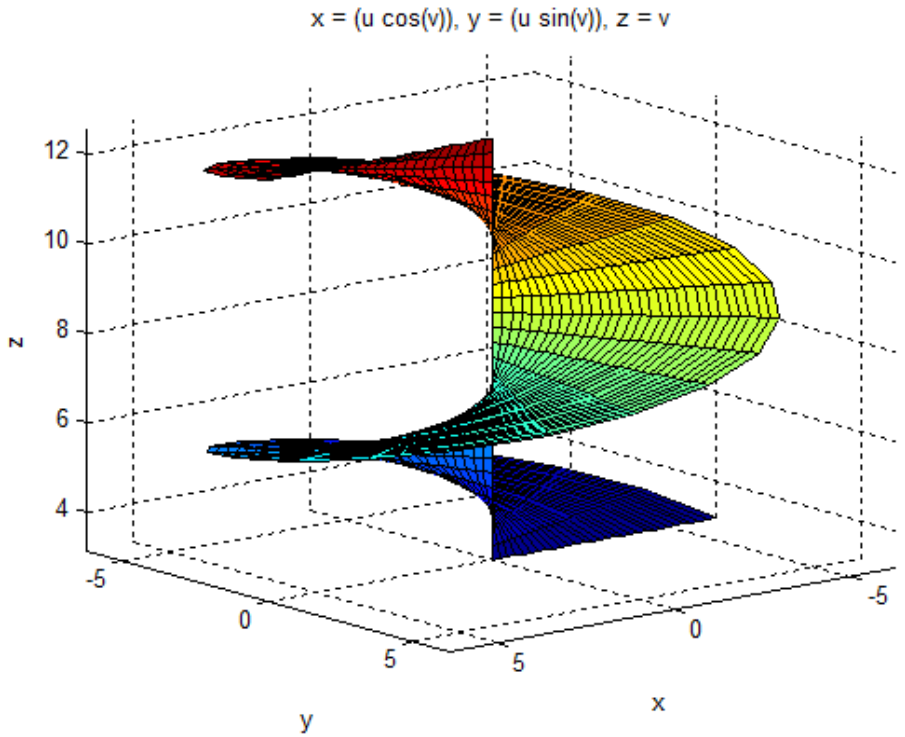
Ejemplo superficie paramétrica



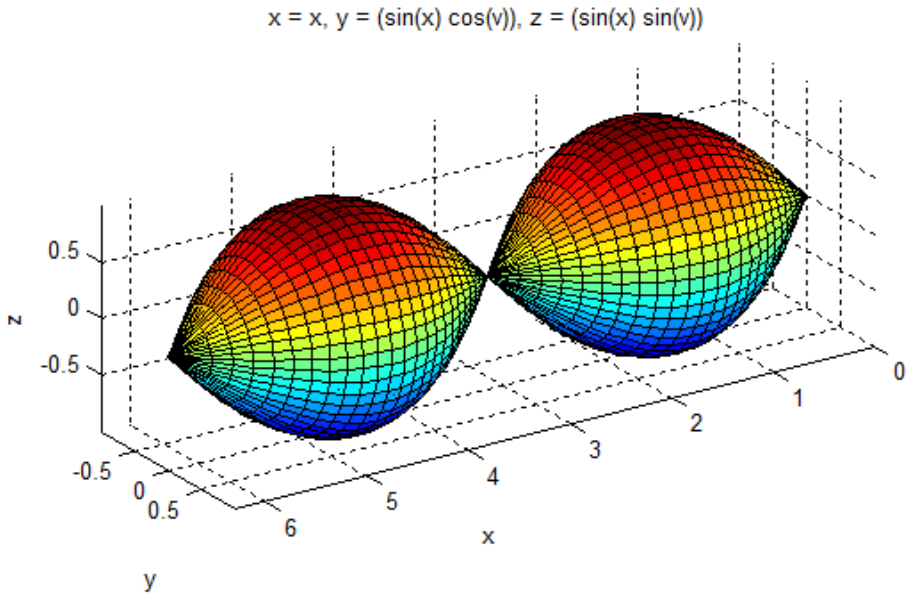


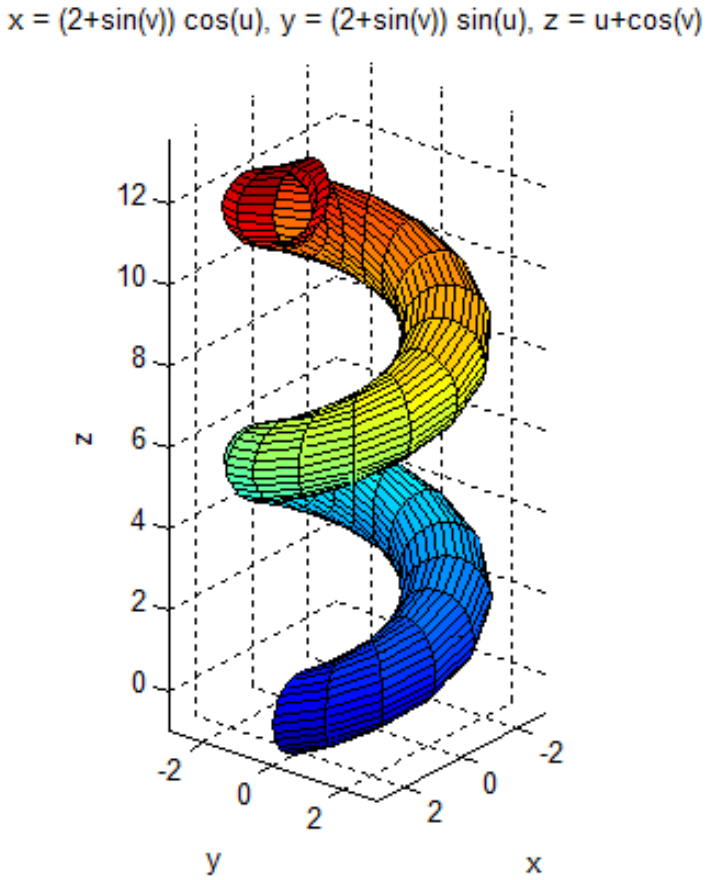
Ejemplo superficie paramétrica



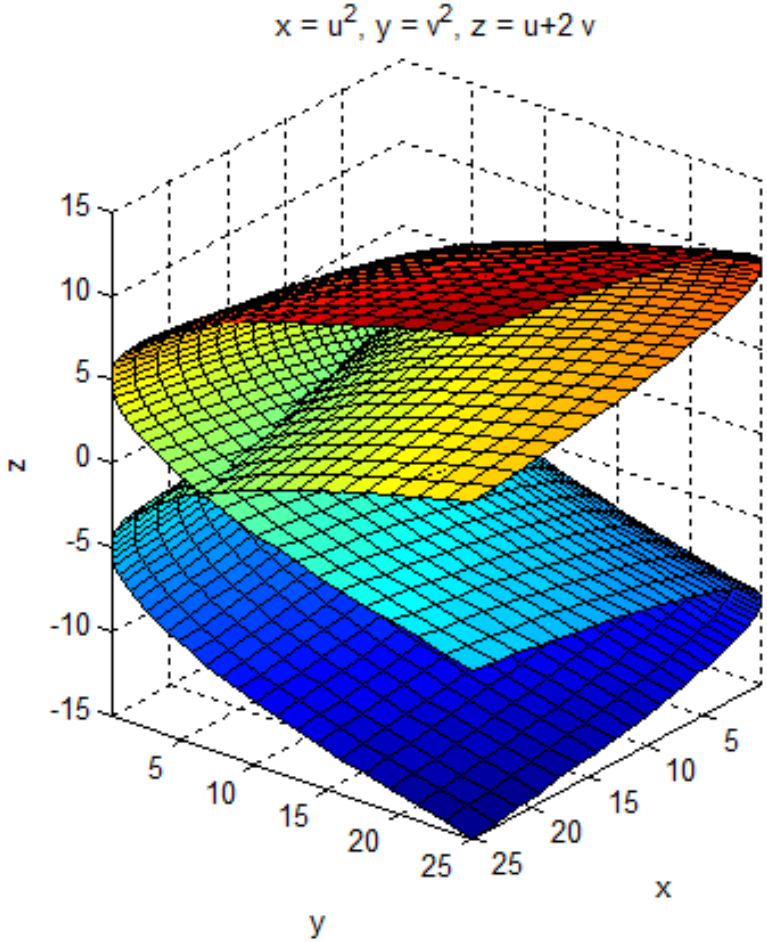


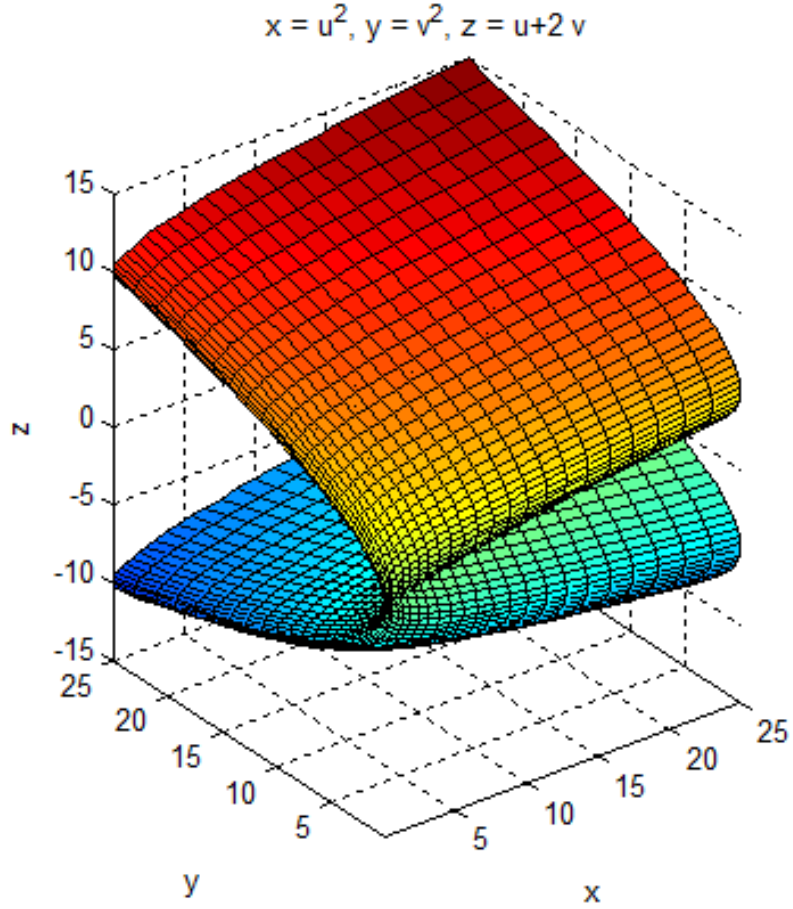
Ejemplo superficie paramétrica





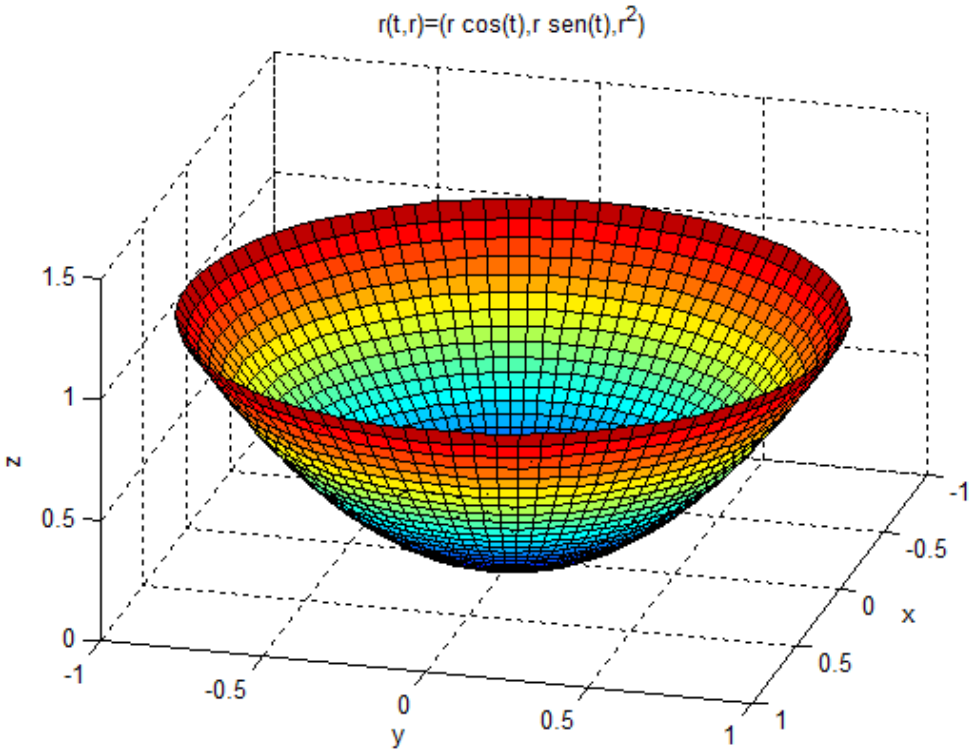
Ejemplo superficie paramétrica

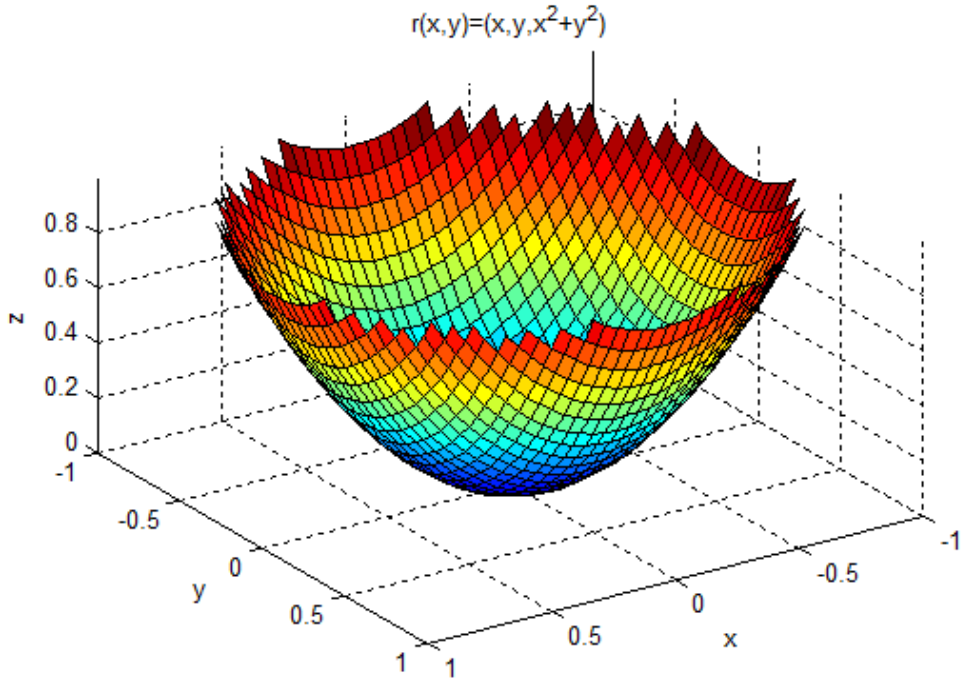




$$\mathbf{r}\left(u, -\frac{u}{2}\right) = \left(u^2, \frac{u^2}{4}, 0\right) = \mathbf{r}\left(-u, \frac{u}{2}\right)$$

Ejemplo superficie paramétrica





$$\mathbf{r_1}(t,s) = (s\cos(t), s\,\mathrm{sen}(t), s^2), \quad 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le 1;$$

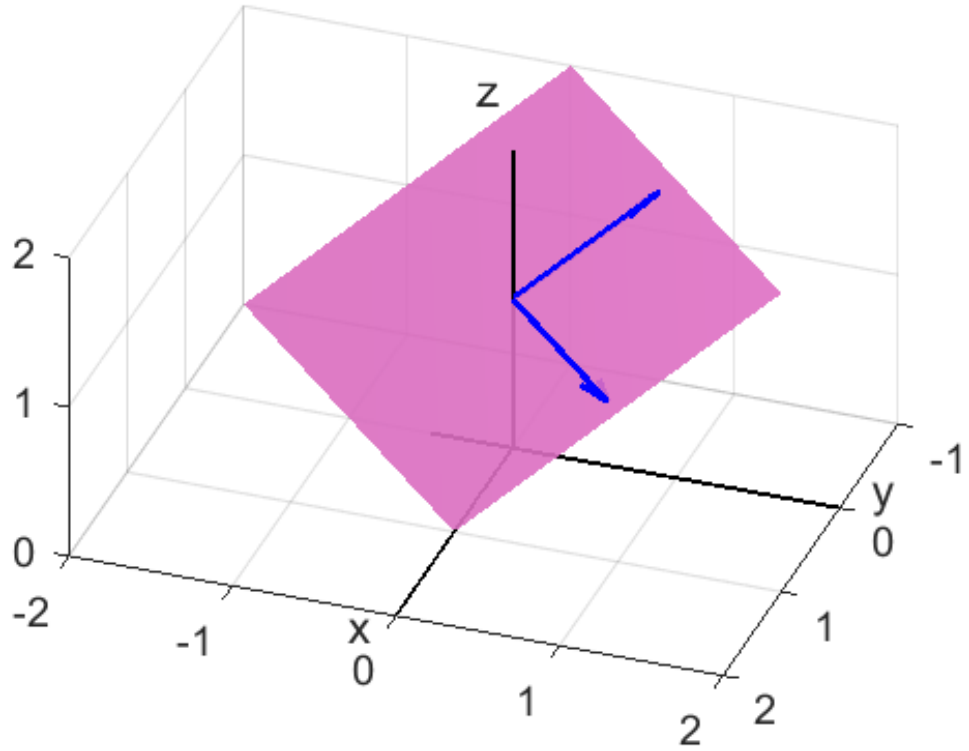
$$\mathbf{r_2}(x,y) = (x, y, x^2+y^2), \quad -1 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

Ejemplos

1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1,1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1,1)$.

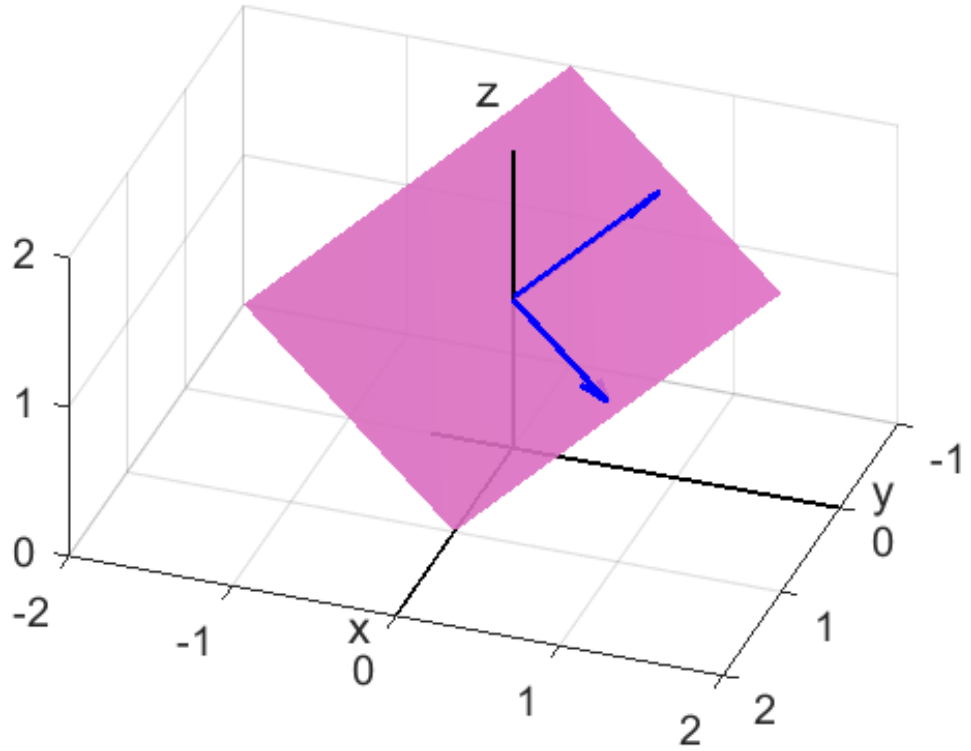
Ejemplos

1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1,1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1,1)$.



Ejemplos

1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1,1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1,1)$.



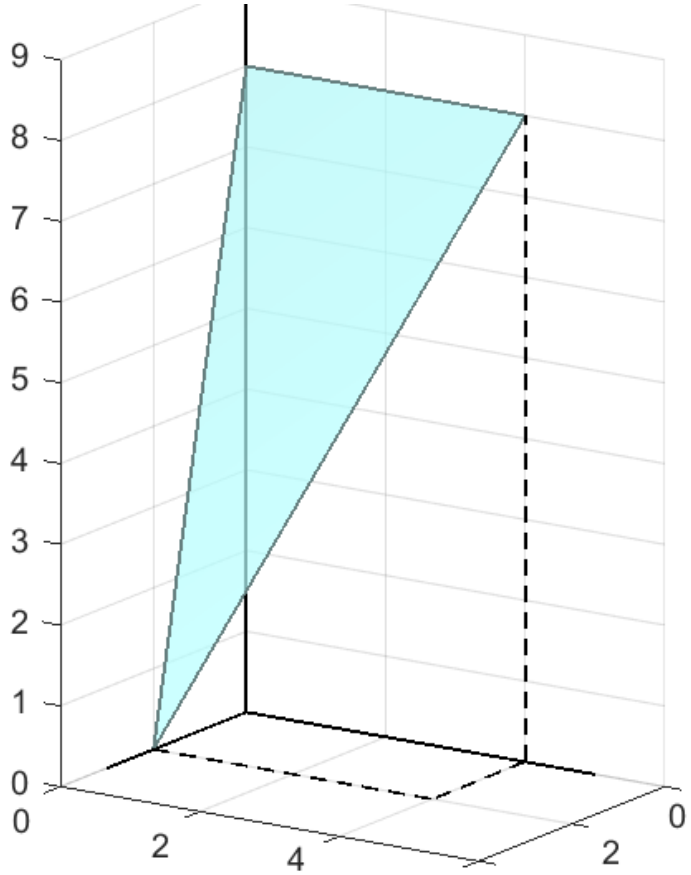
$$\mathbf{r}(s,t) = (0,0,1) + s(1,1,0) + t(0,1,1),\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ejemplos

2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 8)$ y $(0, 0, 8)$:

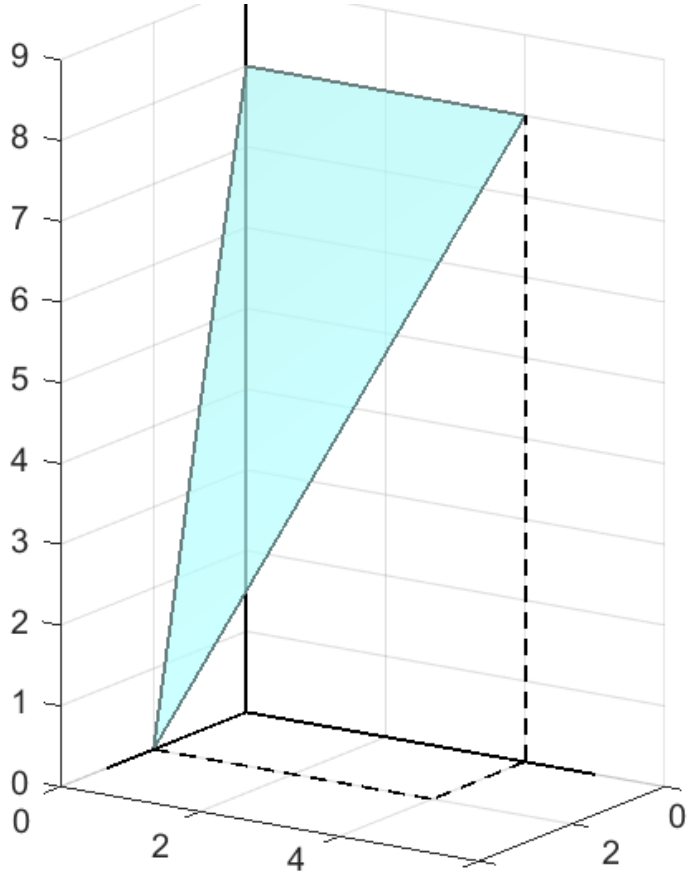
Ejemplos

2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 8)$ y $(0, 0, 8)$:



Ejemplos

2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2,0,0)$, $(0,4,8)$ y $(0,0,8)$:



$$\mathbf{r}(x,h) = (x, h(4-2x), 8-4x),\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le h \le 1.$$

Ejemplos

3) Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

Ejemplos

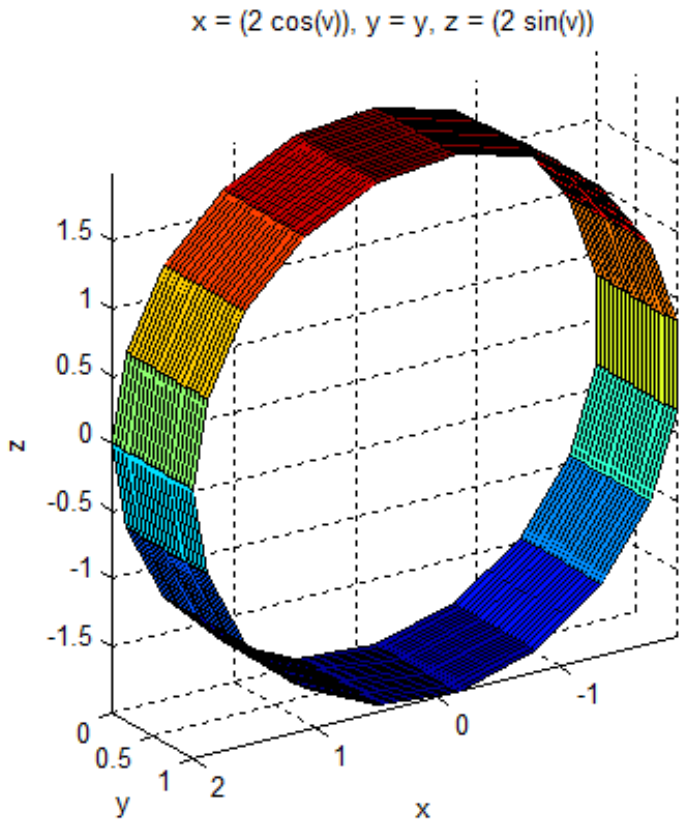
3) Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 3\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 3\cos\phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Observar que cuando $\phi = 0$, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

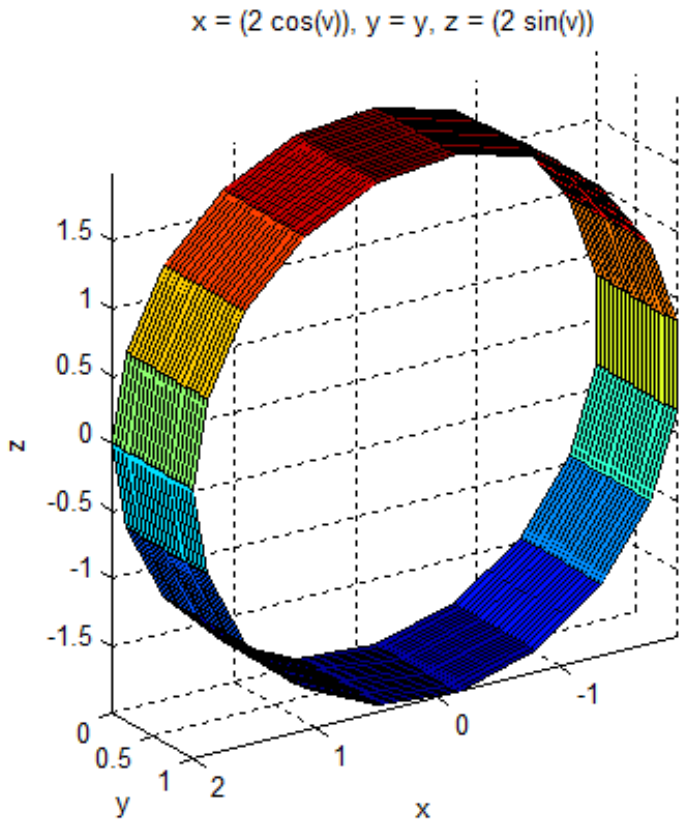
Ejemplos

Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Ejemplos

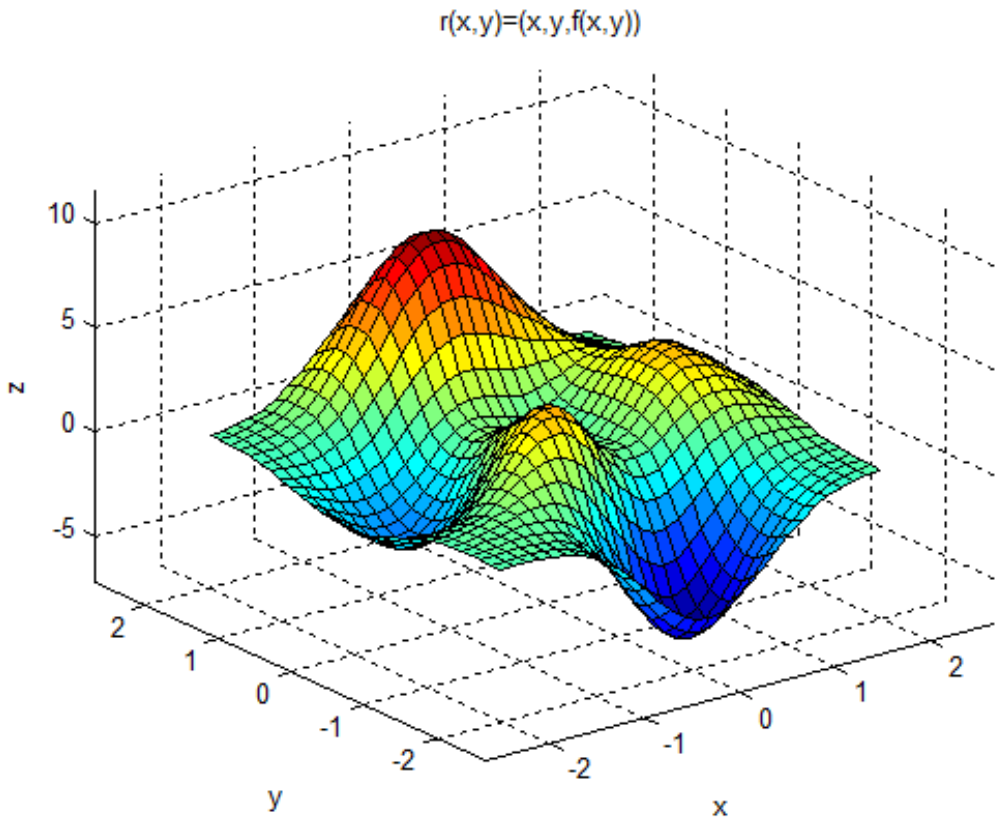
Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Solución: $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

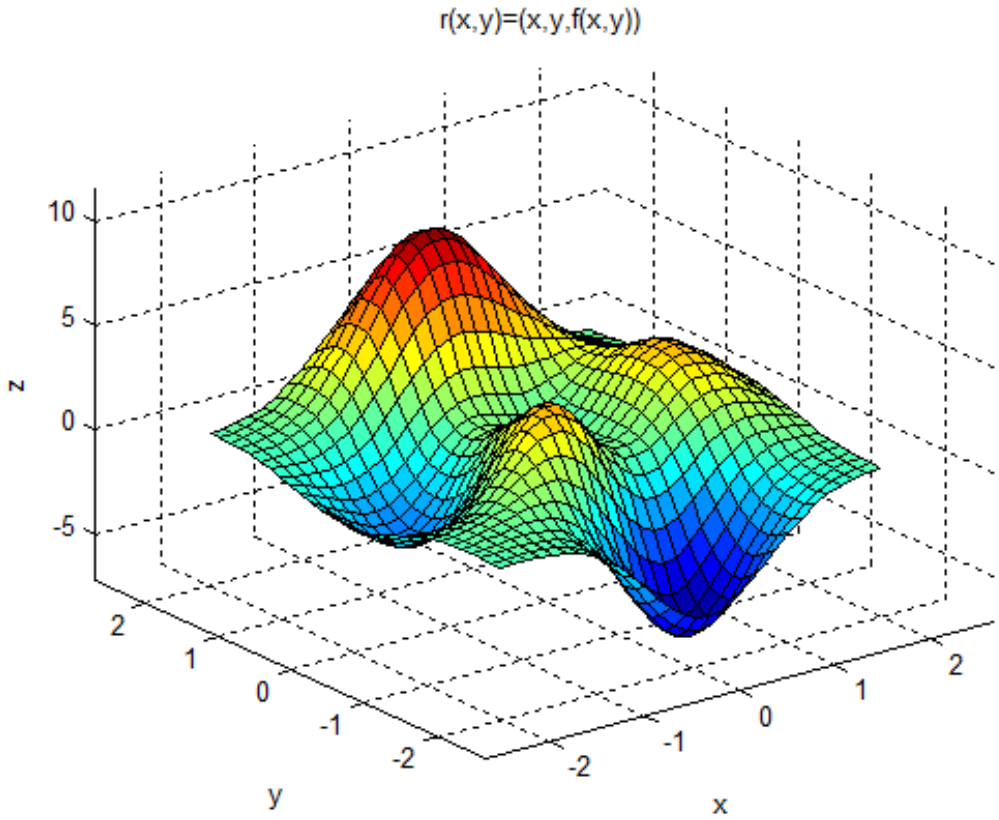
Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?



Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?



Solución: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D(f)$.

Ejercicios del TP4B

1. Ejercicios tomados de Geometría Analítica: repaso. Dadas las siguientes representaciones vectoriales paramétricas de superficies, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen.

a) (o) $\mathbf{r}(\beta, t) = (2t \operatorname{ch} \beta, 8t \operatorname{sh} \beta, t^2)$. Es decir:

$$\begin{cases} x = 2t \operatorname{ch} \beta \\ y = 8t \operatorname{sh} \beta \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0; \beta \in \mathbb{R}.$$

c) (r) $\mathbf{r}(\alpha, t) = (4t \cos \alpha, 7t \operatorname{sen} \alpha, t^2)$. Es decir:

$$\begin{cases} x = 4t \cos \alpha \\ y = 7t \operatorname{sen} \alpha \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0; \alpha \in [0, 2\pi].$$

Ejercicios del TP4B

2. Determine una parametrización para la superficie. (Hay más de una manera correcta de hacerlo.)

$a)$ (o) Porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ tal que $z \leq 4$.

$c)$ (r) Cono truncado: parte del cono $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre los planos $z = 0$ y $z = 3$.

$e)$ (r) Región esférica: parte "inferior" de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

$g)$ (o) Plano inclinado dentro de un cilindro: porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Superficies suaves

Definición

Una superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, $(u,v) \in R$, es suave si $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \bar{\mathbf{0}}$ en R.

Observación: Si se parametriza un cono SIN VÉRTICE o un tronco de cono mediante $\mathbf{r}(r,t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t, r)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\delta < r \leq R$ para algún $\delta \geq 0$, se tiene una superficie suave. La misma parametrización, pero con $0 \leq r \leq R$, refleja un cono (con su vértice) y **no es una superficie suave**.

Área de una superficie suave dada paramétricamente

Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv.$$

Área de una superficie suave dada paramétricamente

Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv.$$

Observación 1: el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Área de una superficie suave dada paramétricamente

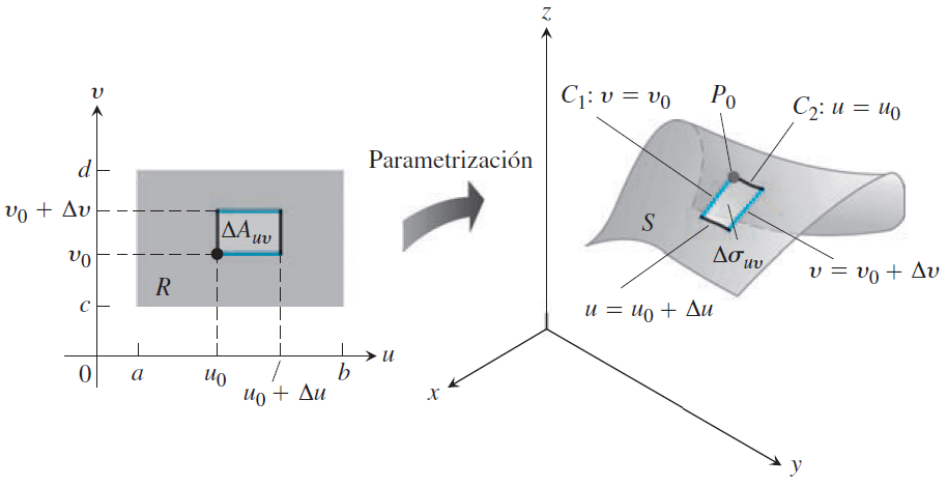
Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

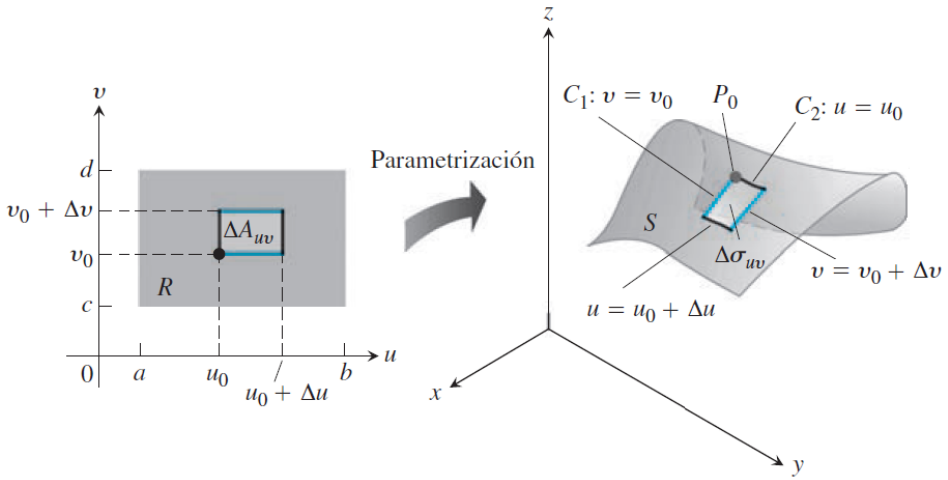
$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv.$$

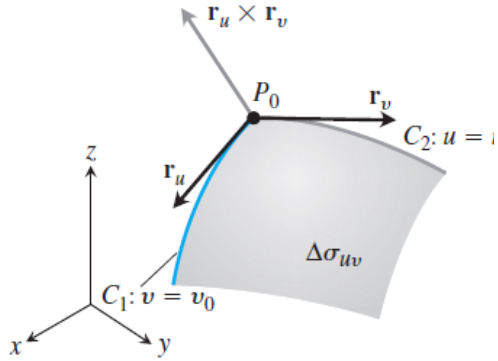
Observación 1: el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)
Observación 2: en el caso de un cono, por ejemplo, se puede calcular el área planteando una integral impropia.

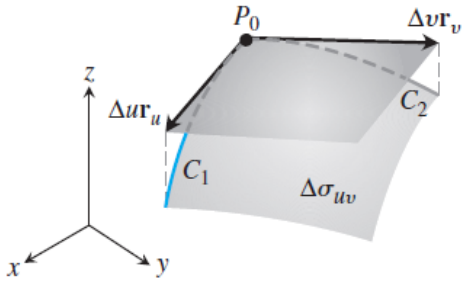
Justificación de la definición de área de una superficie



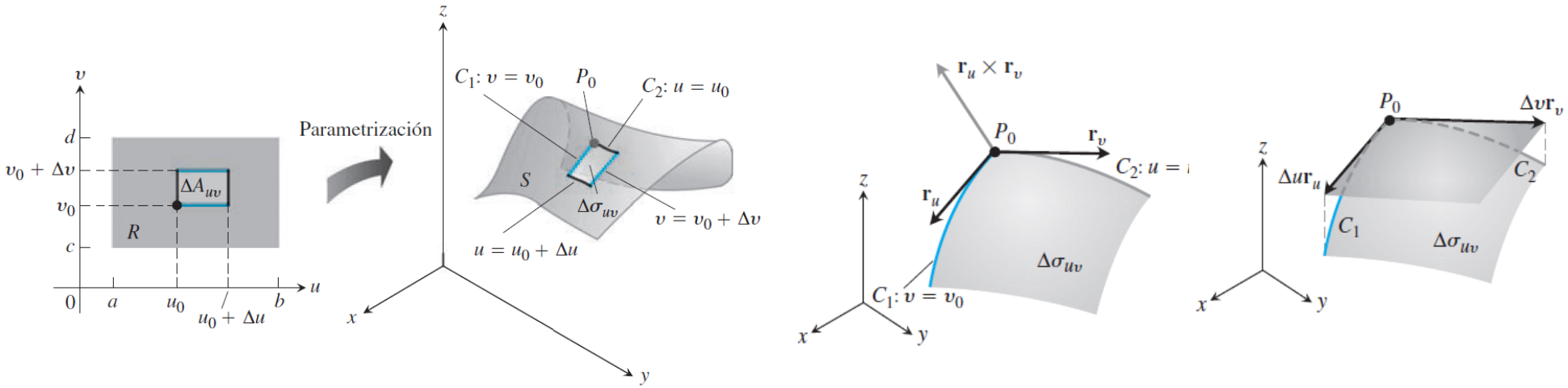
Justificación de la definición de área de una superficie







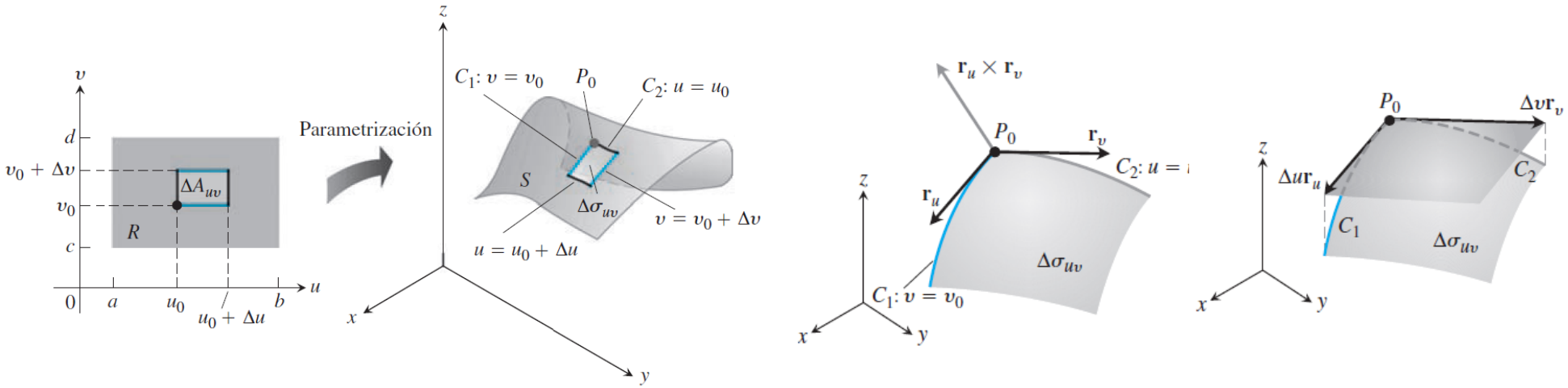
Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

Justificación de la definición de área de una superficie

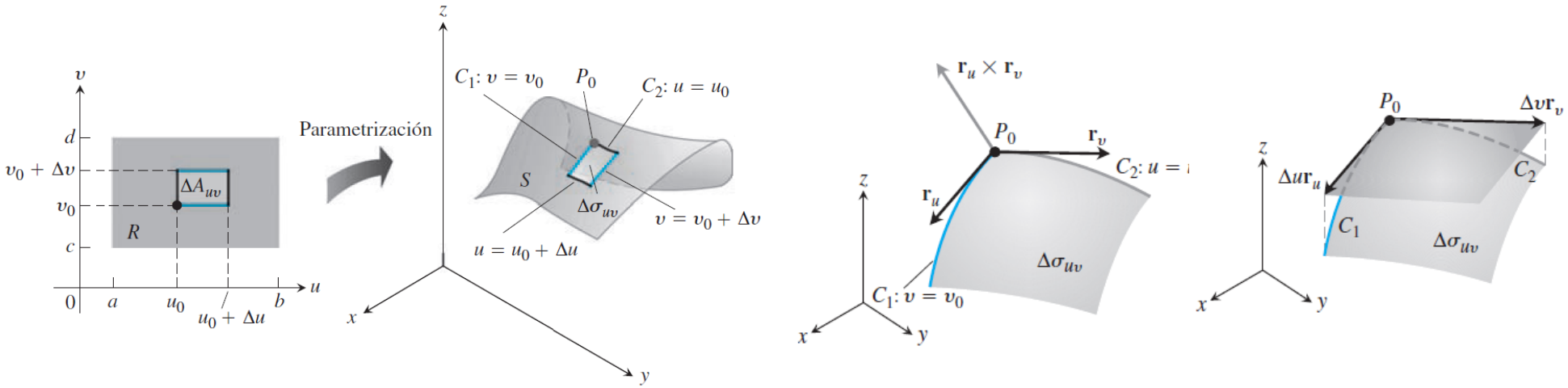


$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

$$\|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\Delta u\Delta v,$$

Justificación de la definición de área de una superficie



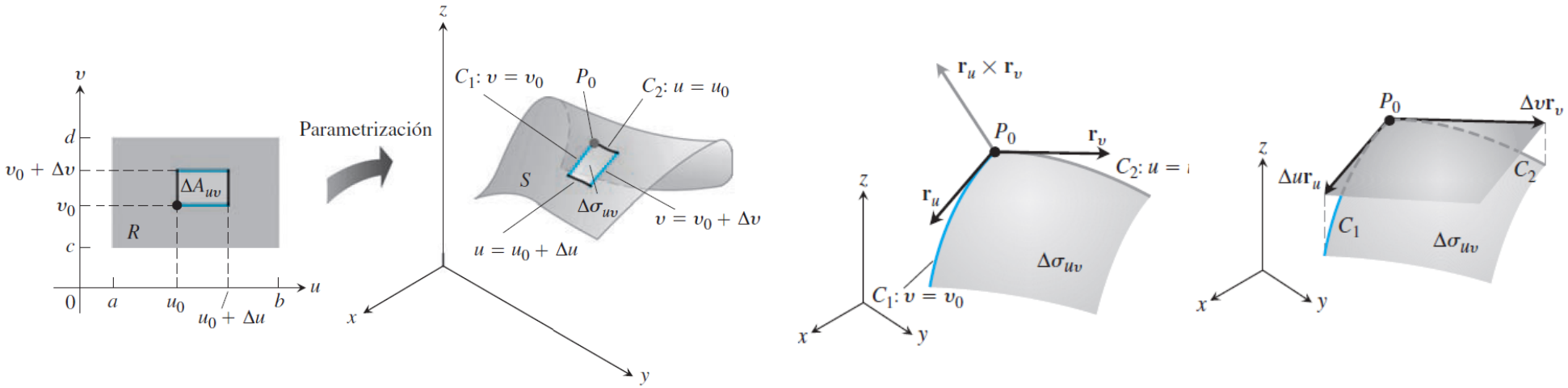
$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

$$\|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\Delta u\Delta v,$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)\|\Delta u_i \Delta v_j.$$

Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

$$\|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\Delta u\Delta v,$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)\|\Delta u_i \Delta v_j. \quad A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta),\ \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y\| = 2.$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta),\ \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y\| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\, dy\, d\theta = 4\pi.$$

Ejercicios del TP4B

4. Calcule el área de la superficie dada por:

$a)$ (o) la porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 1$

$d)$ (o) La porción inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicios del TP4B

6. (o) Encuentre una ecuación para el plano tangente al cilindro circular parametrizado por $\mathbf{r}(\theta, z) = (3\,\mathrm{sen}(2\theta), 6\,\mathrm{sen}^2\,\theta, z)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, en el punto $P_0(3\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ correspondiente a $(\theta, z) = (\frac{\pi}{3}, 0)$. Agregue, si es posible, una ecuación para la recta normal a la superficie en el mismo punto.
11. (o) Calcule el área de la proción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano xy.

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Definición

Dados la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r} : R \to \mathbb{R}^3$ y el campo escalar f definido en S, se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du \, dv,$$

siempre que exista la integral del segundo miembro.

Observación: la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Justificación

Si S está parametrizada por $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in R$, tomamos una partición en R y

$$\iint_S f\,d\sigma \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(u_i,v_j))\Delta\sigma_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(u_i,v_j))\|\mathbf{r}_u(u_i,v_j)\times\mathbf{r}_v(u_i,v_j)\|\Delta u\Delta v$$

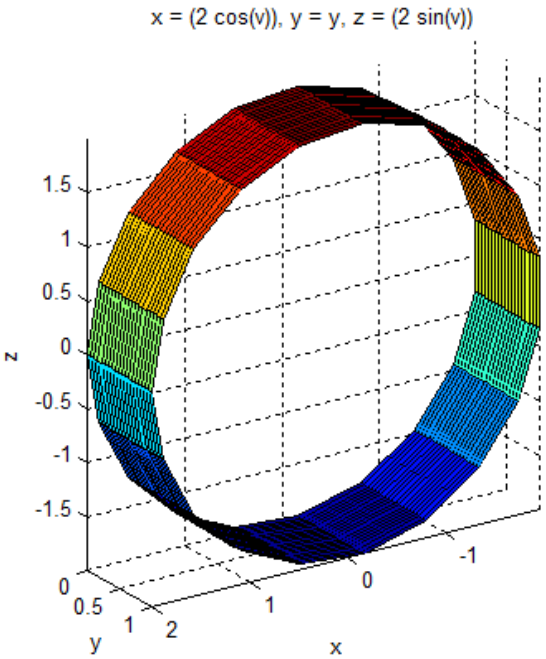
$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|du\,dv.$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$.

Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$.



$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le y \le 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2\cos\theta, 0, -2\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\|\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y)\| = 2$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z)\, dA = \\ &= \iint_R \delta(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta(2\cos\theta, y, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, 2\, dy\, d\theta. \end{aligned}$$

Ejercicios del TP4B

12. Calcule la integral de la función f dada, sobre la superficie S indicada:
    - $a)$ (o) $f(x, y, z) = x$ sobre $S : y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.
    - $d)$ (o) $f(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

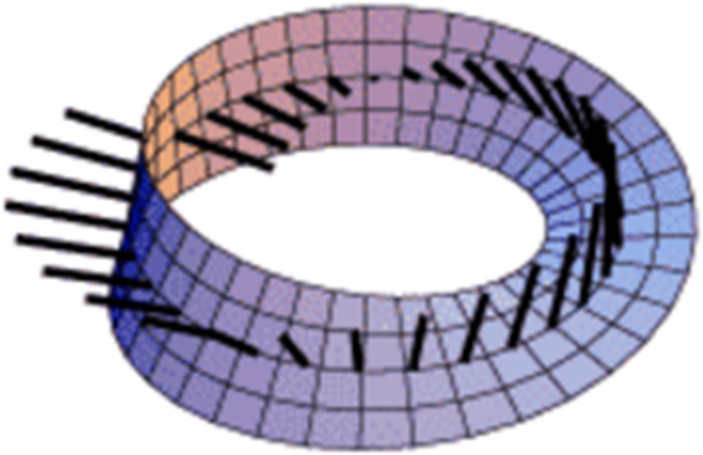
- Agregue planteos usando integrales apropiadas, para calcular valores medios de las funciones anteriores sobre las superficies correspondientes.
- Además, si en algún caso se puede interpretar a la función f como la densidad en cada punto de la superficie S, indique cómo se podrían calcular la masa y las coordenadas del centro de masa de la placa delgada.

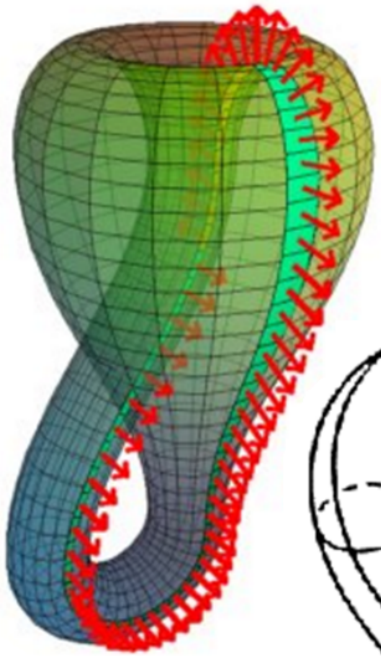
Recorrido

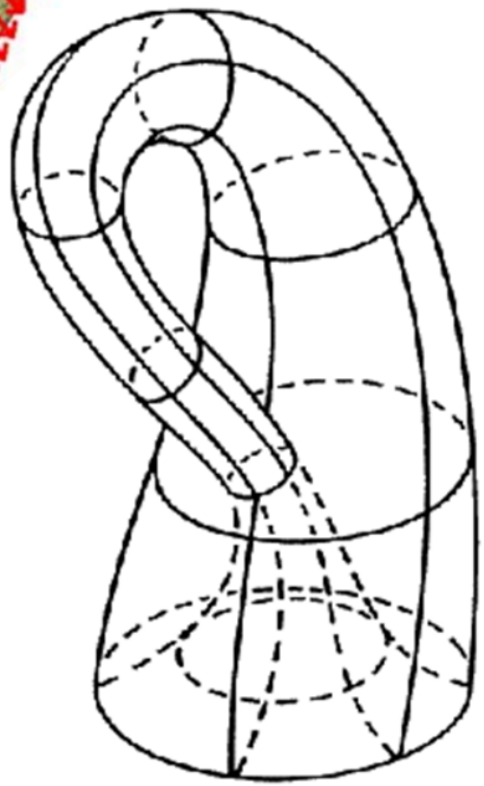
1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

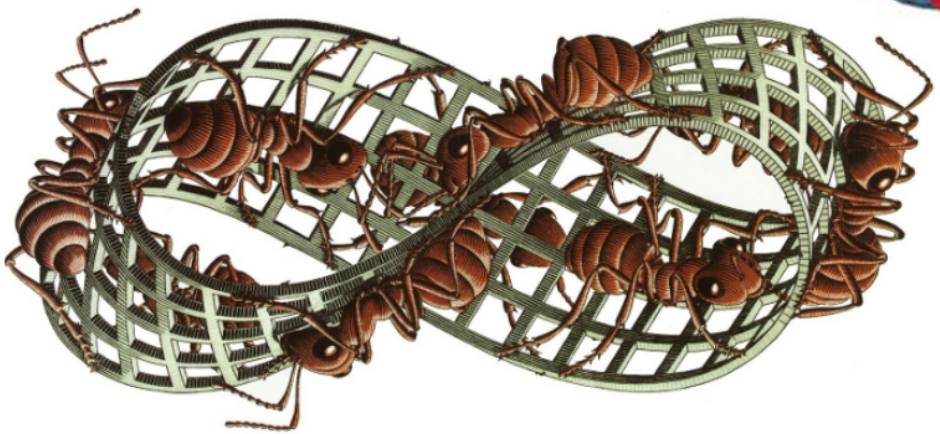
Superficies no orientables

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.









Definición

Definición

Una superficie suave S es orientable cuando es posible definir un campo vectorial continuo $\mathbf{n}$ que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario.
Una superficie suave S está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial $\mathbf{n}$ sobre S.

Observación: Una superficie que no es suave (como un cono con su vértice, con las parametrizaciones usuales), **no es una superficie orientable**. Pero una superficie suave, como un cono sin vértice, sí puede serlo.

Definición

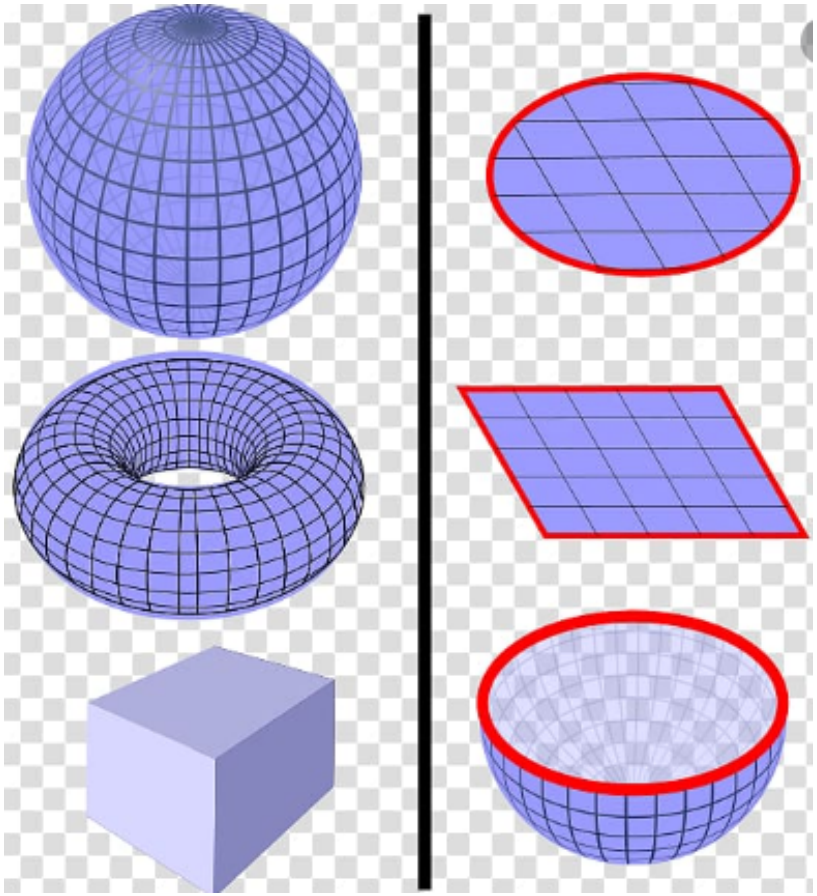
Definición

Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la "interior", que es acotada, y la "exterior", que es no acotada.

Una superficie suave cerrada está orientada positivamente si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S. Si es suave por partes, podemos extender esta idea.

Ejemplo

Las siguientes son superficies suaves por partes y orientables:

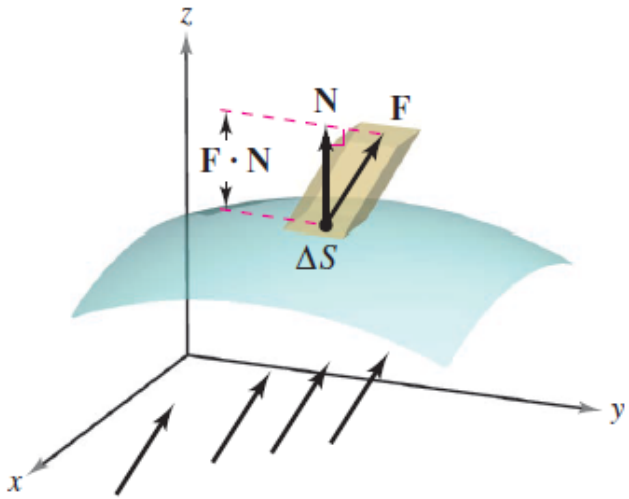


Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Integral de superficie de campos vectoriales

El flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ definido en $\mathbb{R}^3$ a través de una superficie orientada S en la dirección de $\mathbf{n}$ es $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.



$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma =$$

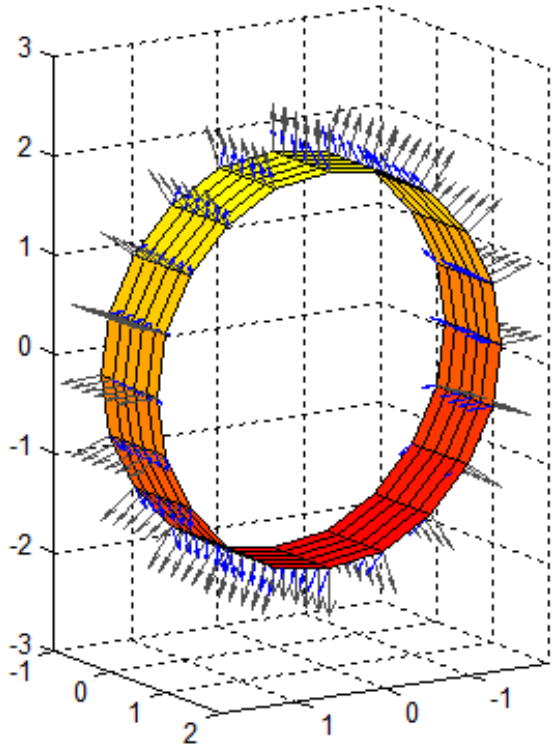
$$= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du\, dv$$

$$= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du\, dv.$$

Notación: si la superficie S es cerrada, se suele anotar $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

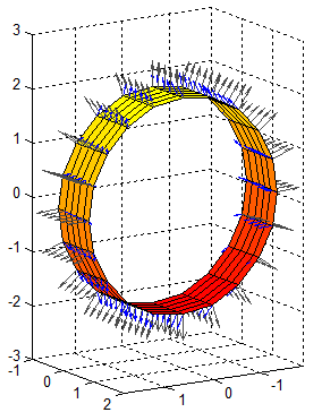
Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y.



Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y.



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le y \le 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

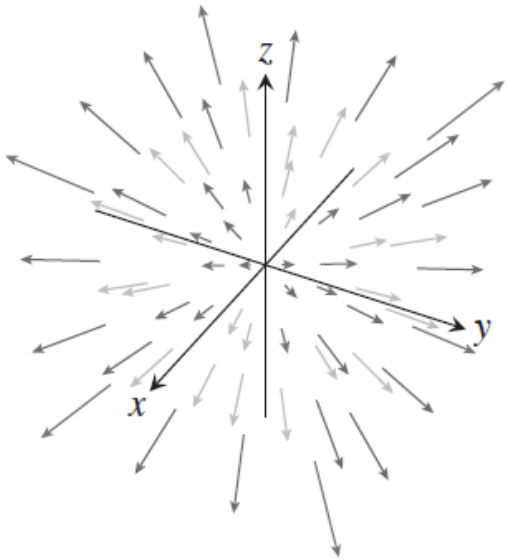
$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)$$

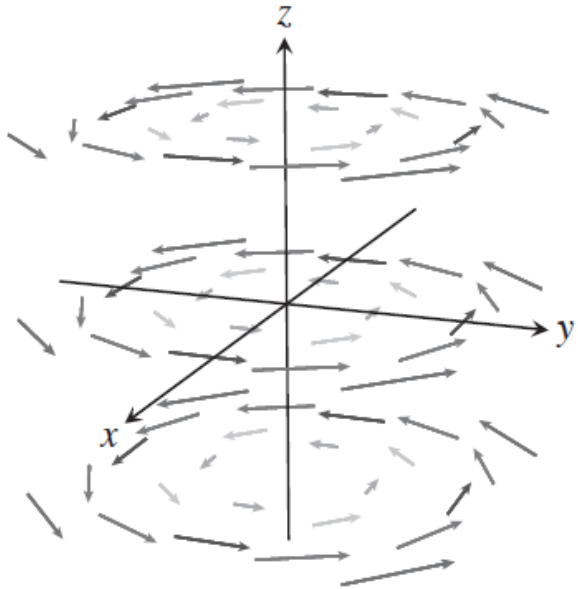
Elijo $\theta = 0$ y $y = 0$. Allí: $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y)(0, 0) = (-2, 0, 0)$, hacia el eje y.

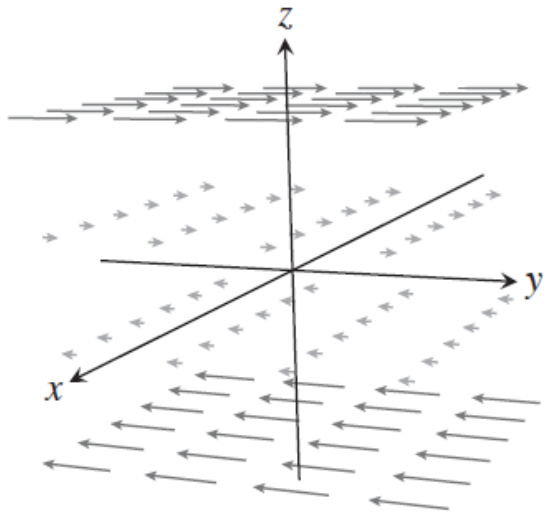
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta) \cdot (2\cos\theta, 0, 2\operatorname{sen}\theta) dy\, d\theta$$

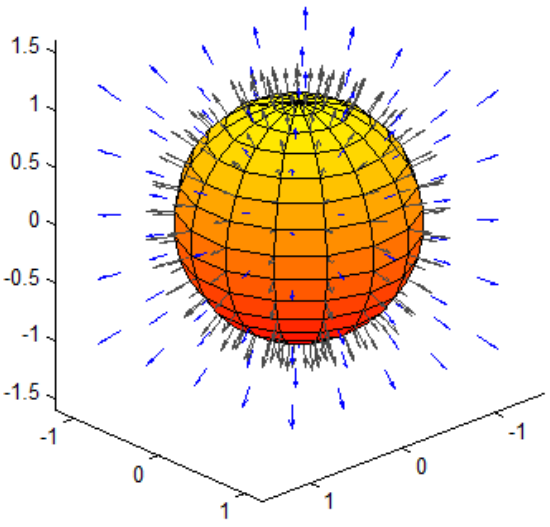
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y\cos\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) dy\, d\theta = 4\pi.$$

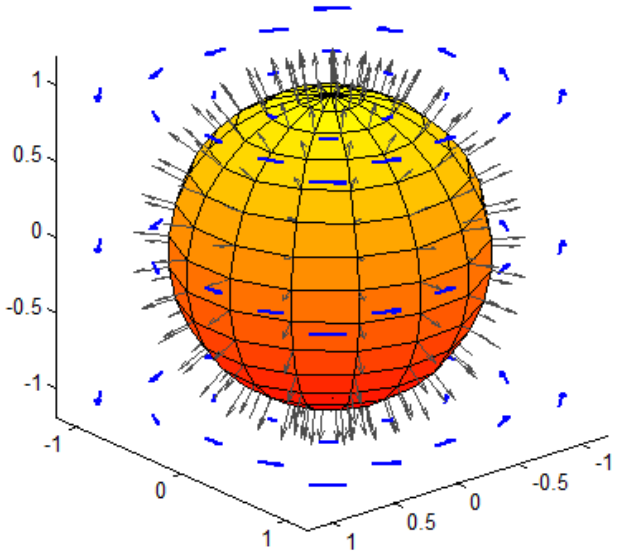
Ejemplos gráficos

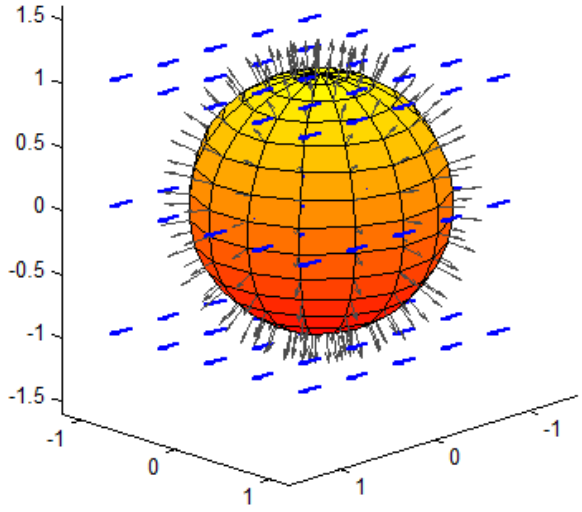












Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, a\cos\phi),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi.$$

$$flujo = \oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta,\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta,\phi) = (-a^2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi)$$

Para $\theta = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$: $\mathbf{r}(0,\frac{\pi}{2}) = (a,0,0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(0,\frac{\pi}{2}) = (-a^2,0,0)$.
Apunta hacia el origen: cambio el sentido.

$$flujo = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ a\cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi \\ a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi \\ a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi \end{pmatrix} d\phi\,d\theta = 4a^3\pi.$$

Observación

Si el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es k, ¿necesariamente el flujo a través de una superficie S_1 que es una parte de S con exactamente la mitad de área que S es $k/2$?



Ejercicios del TP4B

15. Utilice una parametrización para determinar el flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superficie S en la dirección dada.

a) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro
$x^2 + y^2 = 1$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$, en la dirección que se aleja del eje z. Realice un esbozo de la superficie y del campo vectorial, interpretando el valor obtenido.

c) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x, -3z)$ a través de la superficie del cilindro $z = 4 - y^2$ cortado por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$ en la dirección que se aleja del eje x.

d) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a través de la porción de esfera en el primer octante $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, para cierto $a > 0$, en la dirección que se aleja del origen.

Ejercicios del TP4B

18. (r) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

$a)$ Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1, incluida en el plano $z = 0$, orientada positivamente vista desde el semieje z positivo.

$b)$ Indique, justificando su respuesta, si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en $\mathbb{R}^3$.

$c)$ ~~Calcule~~ Plantee una integral para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la porción del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ que está por arriba del plano $z = 0$, en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

$d)$ Calcule el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de a porción del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ que está por arriba del plano $z = 0$, en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

$e)$ Observe si hay alguna relación entre algunos de los resultados obtenidos. **Vuelva a este ejercicio luego de haber visto el Teorema de Stokes.**

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Teoremas de Stokes y de Gauss

Enunciados por Thomas. Demostración del Teorema de Stokes, por Stewart.
Teorema de Stokes: se ofrece un video con una prueba del mismo en https://www.youtube.com/watch?v=aaJgkbqjCSg

Teorema de Stokes: 1850



GEORGE GABRIEL STOKES
(1819–1903)

Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

Teorema



Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C.



Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S.



Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, $\mathbf{n}$, es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



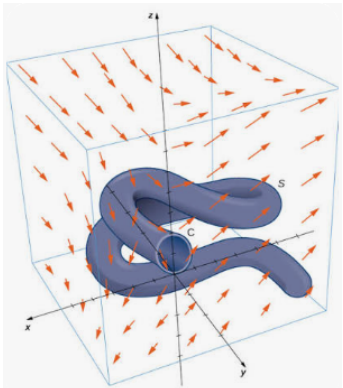
Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, $\mathbf{n}$, es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$





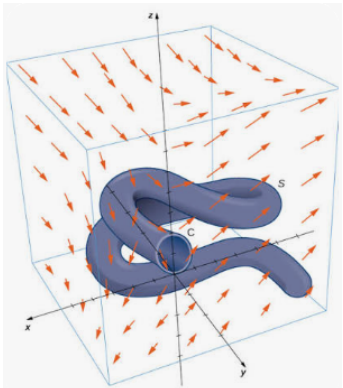
Teorema de Stokes: DEMOSTRAR más adelante

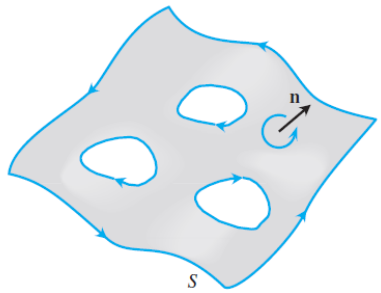
Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, $\mathbf{n}$, es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$







superficies con agujeros

Ejemplo

Sea C la curva intersección de las superficies dadas por $y + z = 2$ y $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente si se mira desde "arriba". Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$. Plantee una integral para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C.

Solución:

$$\text{circ} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{¿circ} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \ ? \quad \text{¿hipótesis?}$$

Ejemplo

Sea C la curva intersección de las superficies dadas por $y + z = 2$ y $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente si se mira desde "arriba". Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$. Plantee una integral para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C.

Solución:

$$\text{circ} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{¿circ} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \ ? \quad \text{¿hipótesis?}$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, 2 - r \operatorname{sen} t),\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

$$\text{circ} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 1 + 2r \operatorname{sen} t) \cdot (0, -r, r) dr\, dt = \pi$$

Ejercicios del TP4B

19. Utilice el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C mediante la integral de superficie correspondiente.
    - *a)* (o) $\mathbf{F} = (x^2, 2x, z^2)$ y C: la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy, en sentido antihorario.
    - *b)* (o) $\mathbf{F} = (2y, 3x, -z^2)$ y C: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy, en sentido antihorario.
21. Calcule el flujo del rotacional a través de la superficie S en la dirección del vector unitario normal exterior $\mathbf{n}$, $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ en cada caso:
    - *a)* (o) $\mathbf{F} = (2z, 3x, 5y)$ y S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$, con $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos (Revisión)

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo D, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

1. *Si $\mathbf{F}$ es conservativo en D, entonces $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$.*
2. *Si D es simplemente conexo y $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en D.*

1 Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo. Entonces es el gradiente de alguna función potencial f. Ya lo hemos demostrado, probando que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ componente a componente.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en un dominio conexo D, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

1. *Si $\mathbf{F}$ es conservativo en D, entonces $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$.*
2. *Si D es simplemente conexo y $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en D.*

2 Supongamos que D es abierto, conexo y simplemente conexo y $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D.
Aplicando un teorema de Topología, dado que D es simplemente conexa, se puede asegurar que existe una superficie S en D que tiene como "frontera" a la curva C. Así:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

Comparar teoremas de Green y Stokes

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy; \qquad \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla\times\vec{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

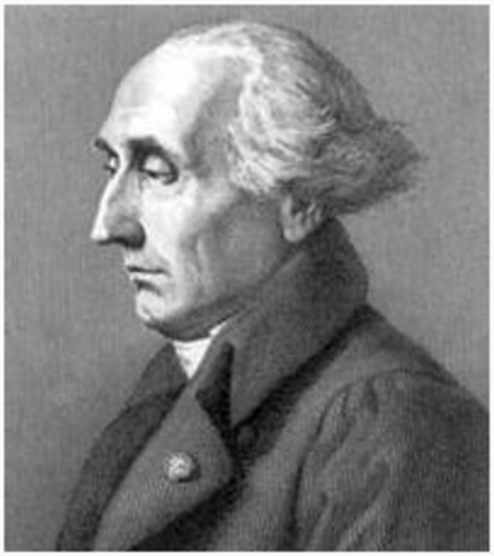
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{\mathrm{n}}\,dS$$

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Teorema de la divergencia de Gauss

Joseph-Louis Lagrange



Joseph-Louis (Giuseppe Luigi), comte de Lagrange

Born	Giuseppe Lodovico Lagrangia 25 January 1736 Turin, Piedmont-Sardinia
Died	10 April 1813 (aged 77) Paris, France

Lagrange 1762

Johann Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), painted by Christian Albrecht Jensen

Born	Johann Carl Friedrich Gauss 30 April 1777 Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Holy Roman Empire
Died	23 February 1855 (aged 77) Göttingen, Kingdom of Hanover

Gauss 1813

Mikhail Ostrogradsky



Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

Born	September 24, 1801 Pashennaya
Died	January 1, 1862 (aged 60) Poltava

Ostrogradsky 1826

Teorema de la divergencia de Gauss

Teorema

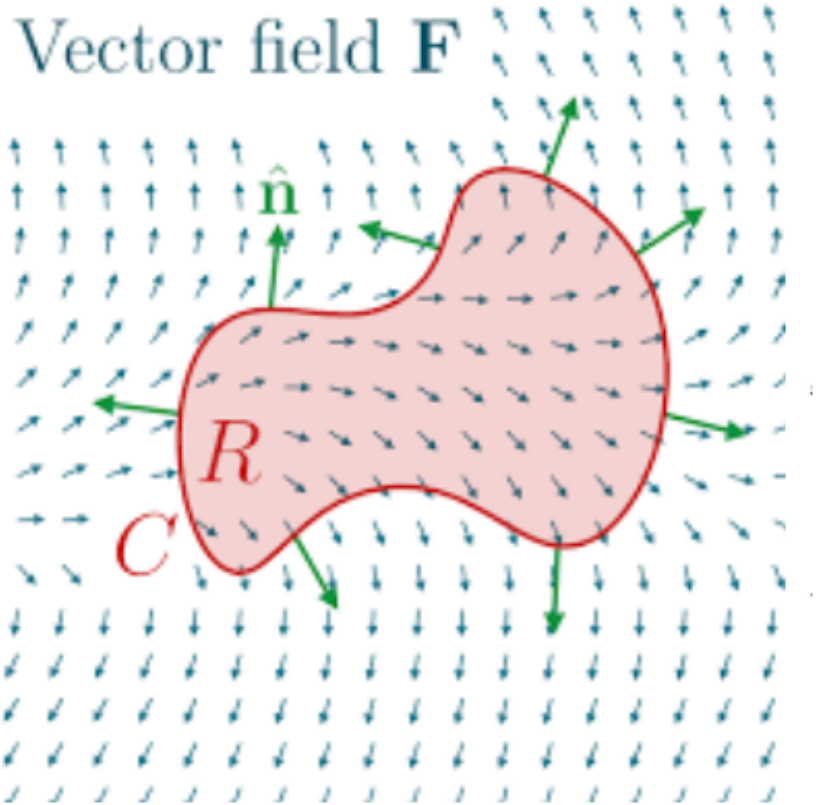
Sea S una superifice cerrada positivamente orientada, suave por partes, sea D la región sólida encerrada por S y sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas paciales continuas en una región abierta que contiene a S. Entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través hacia fuera de S es:

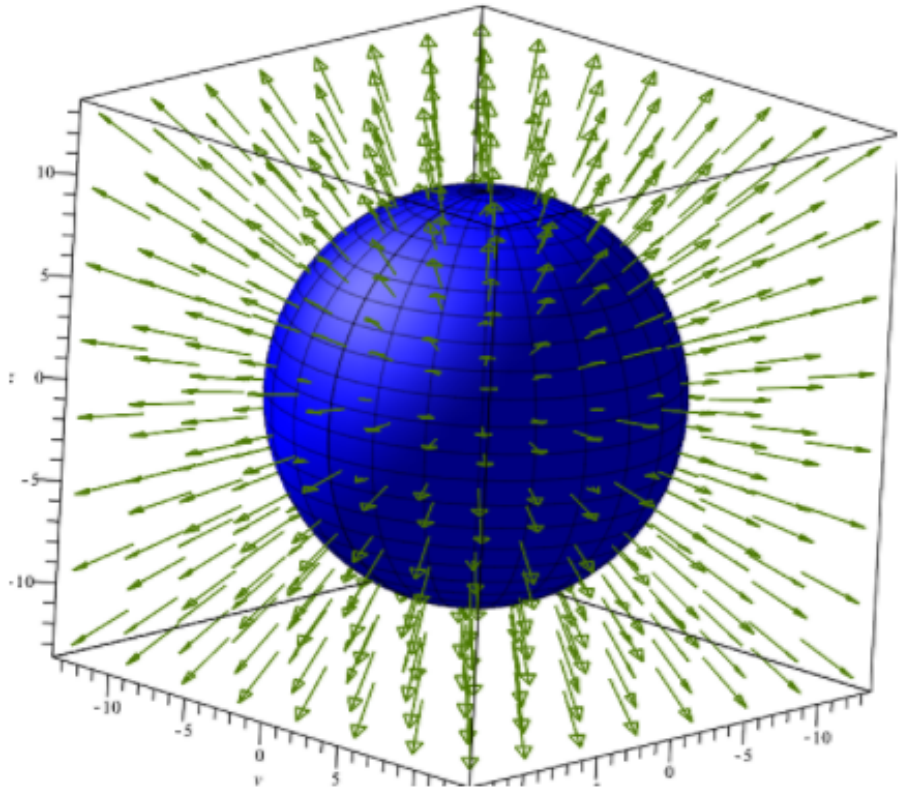
$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

SIN DEMOSTRAR

Comparar teoremas de Green y Gauss

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\,dy; \qquad \oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}dV.$$

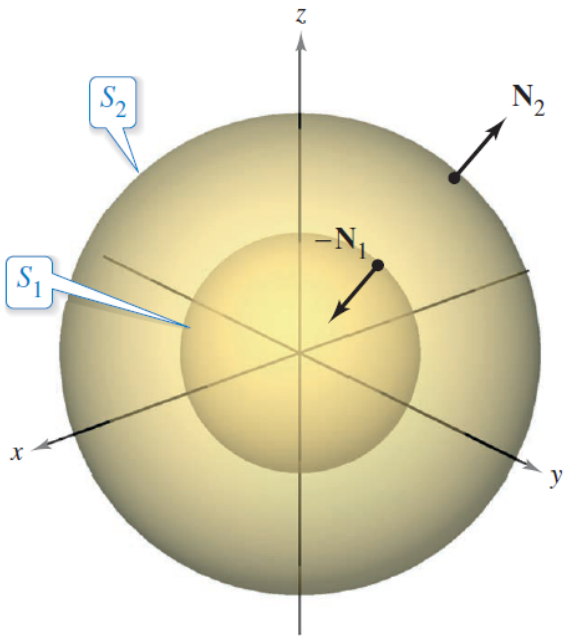




Teorema de la divergencia en otras regiones

El Teorema de la divergencia de Gauss puede aplicarse a regiones más generales, en particular, a regiones con agujeros. Supongamos que D es la región del espacio entre las superficies esféricas S_2 y S_1, como se ve en la imagen siguiente:

Figura: Aplicación del Teorema de la divergencia a regiones con agujeros



Las superficies S_1 y S_2 se orientan de manera conveniente.

Ejercicios del TP4B

29. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de la superficie S frontera de D, siendo

$a)$ (o) $\mathbf{F} = (y - x, z - y, y - x)$ y D el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

$b)$ (o) $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2 z)\mathbf{j} + (4x^2 y^3)\mathbf{k}$ y D la región cerrada en el primer octante cortada por $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$.

Ejercicio 2 del examen final 04/12/2025. Plantear.

Sea S la superficie definida por $S = \{(x, y, z) : x^2 + z = 4,\ z \geq 0\}$, sea S_1 la superficie que es la parte de S comprendida entre los planos $y = 0$ y $y = 2$, y sea el punto $P(1, 0)$.

- $a)$ $a_1)$ Defina una función $f(x, y)$ tal que su gráfica sea la superficie S.
  - $a_2)$ Determine y represente gráficamente el dominio de f; indique, además, cuál es su imagen.
  - $a_3)$ Calcule el gradiente de f en P.
- $b)$ Halle las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie S en el punto $(1, 0, 3)$, si es que existen; en caso contrario, justifique.
- $c)$ Halle la masa del sólido E, encerrado por la superficie S_1, y el plano $z = 0$, si la densidad en cada punto está dada por $\delta(x, y, z) = x + y$.
- $d)$ Plantee una integral que permita calcular el área de la superficie S_1.
- $e)$ Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
  - $e_1)$ Halle el flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva frontera de S_1, en sentido antihorario visto desde el semieje positivo z.
  - $e_2)$ Halle el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera del sólido E, comprendido bajo S_1, sobre el plano $z = 0$ y entre los planos $y = 0$ y $y = 2$.

Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Recorrido

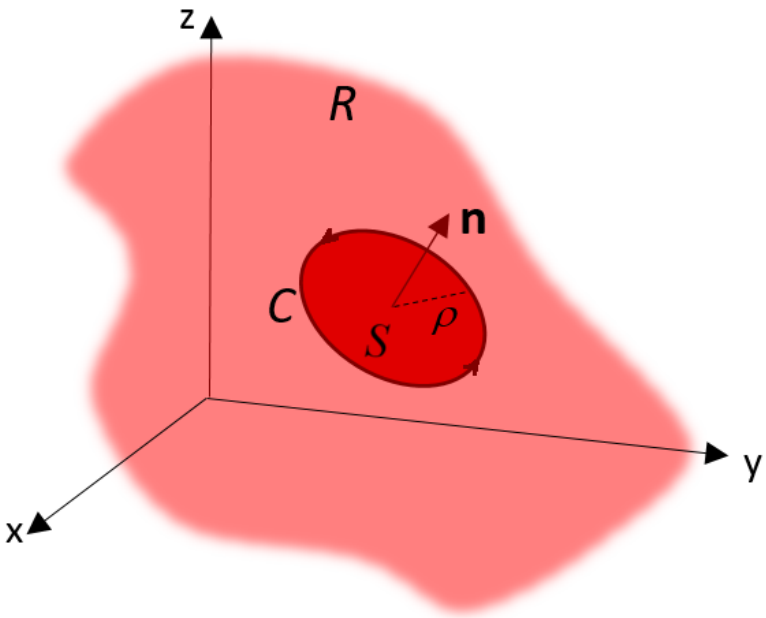
1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Interpretación del rotor.

Sean un punto $Q \in R$; un disco pequeño, S, con centro en Q; C, la curva frontera de S positivamente orientada con respecto a $\mathbf{n}$, un vector unitario normal a S.

Interpretación del rotor.

Sean un punto $Q \in R$; un disco pequeño, S, con centro en Q; C, la curva frontera de S positivamente orientada con respecto a $\mathbf{n}$, un vector unitario normal a S. El Teorema de Stokes establece que

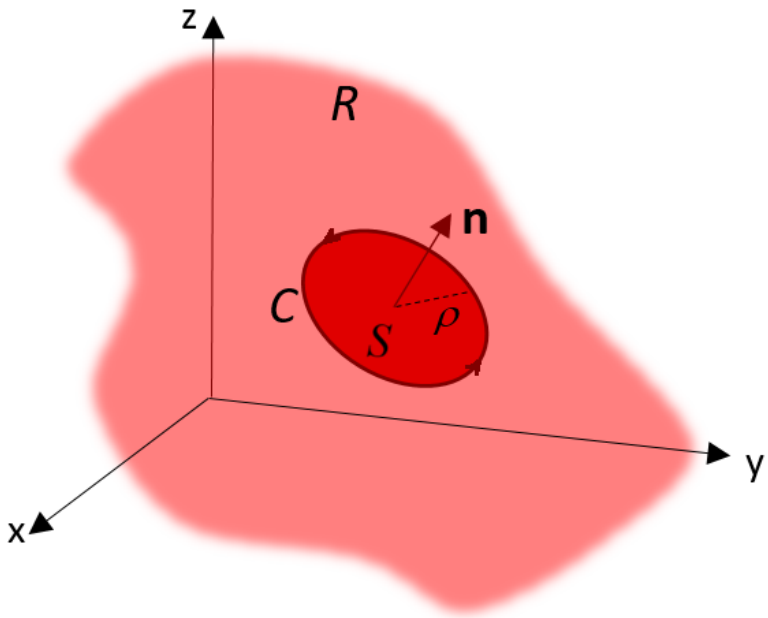


$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

cuando C está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por $\mathbf{n}$ a S.

Interpretación del rotor.

Sean un punto $Q \in R$; un disco pequeño, S, con centro en Q; C, la curva frontera de S positivamente orientada con respecto a $\mathbf{n}$, un vector unitario normal a S. El Teorema de Stokes establece que

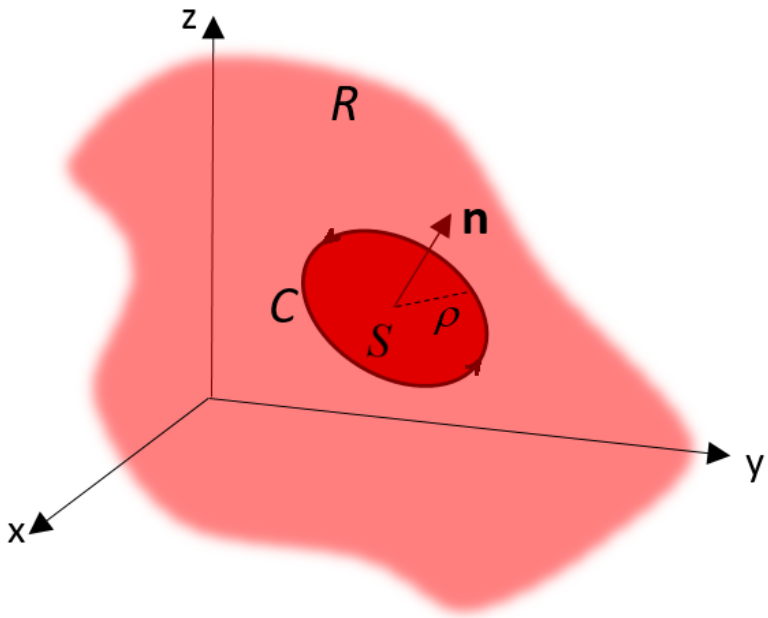


$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

cuando C está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por $\mathbf{n}$ a S. Por ser continuas las derivadas parciales de primer orden de las componentes de $\mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en R y, en particular, es continuo en el disco S y en la curva frontera, C.

Interpretación del rotor.

Sean un punto $Q \in R$; un disco pequeño, S, con centro en Q; C, la curva frontera de S positivamente orientada con respecto a $\mathbf{n}$, un vector unitario normal a S. El Teorema de Stokes establece que



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

cuando C está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por $\mathbf{n}$ a S. Por ser continuas las derivadas parciales de primer orden de las componentes de $\mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en R y, en particular, es continuo en el disco S y en la curva frontera, C.

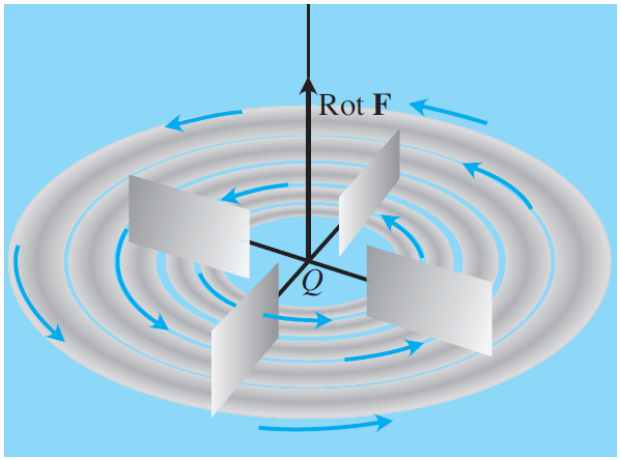
Si consideramos que $\nabla \times \mathbf{F}$ es prácticamente constante en S, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \approx \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, A(S).$$

Interpretación del rotor.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \approx \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, A(S).$$

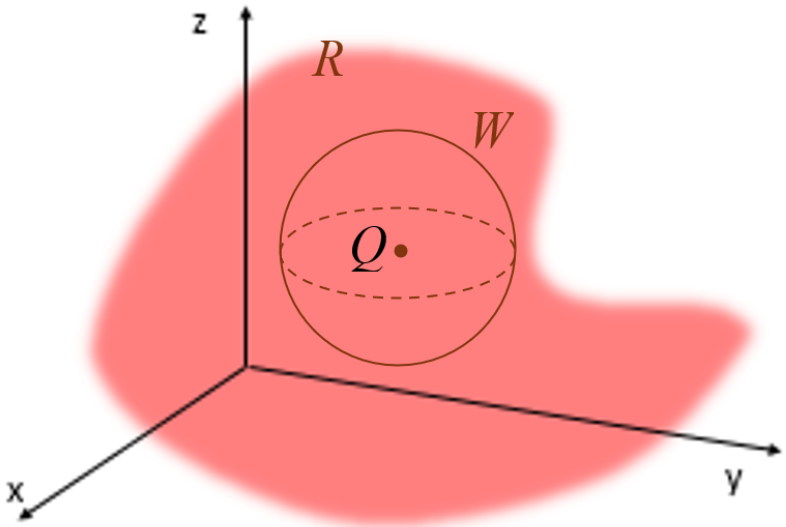
Si hacemos esto para distintos discos de igual área, con centro en Q, vemos que la circulación a lo largo de la frontera de cada disco será máxima cuando $\mathbf{n}$ sea paralelo a $\nabla \times \mathbf{F}$: luego $\nabla \times \mathbf{F}$ indica la dirección $\mathbf{n}$ normal al plano de la curva C que da la máxima circulación de $\mathbf{F}$ en el punto Q.



Recorrido

1. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
   - Superficies paramétricas y sus áreas
   - Integral de superficie de campos escalares
   - Superficies orientadas
   - Integral de superficie de campos vectoriales
2. Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
   - Teorema de Stokes
   - Teorema de la divergencia de Gauss
3. Interpretación de rotor y divergencia
   - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$
   - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$

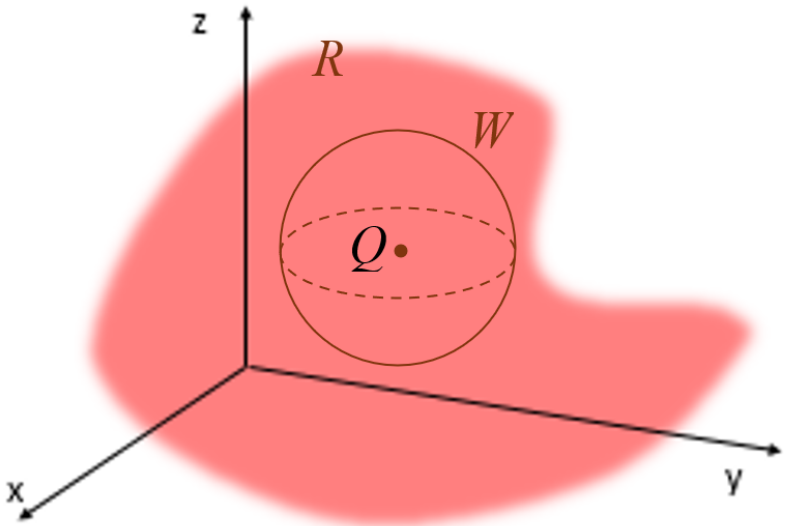


Sean un punto $Q \in R$; W, una bola de radio pequeño con centro en Q, incluida en el dominio de $\mathbf{F}$; S, la frontera de W y V, el volumen de W. Según el Teorema de la divergencia:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV,$$

si S está positivamente orientada (hacia fuera).

Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$



Sean un punto $Q \in R$; W, una bola de radio pequeño con centro en Q, incluida en el dominio de $\mathbf{F}$; S, la frontera de W y V, el volumen de W. Según el Teorema de la divergencia:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV,$$

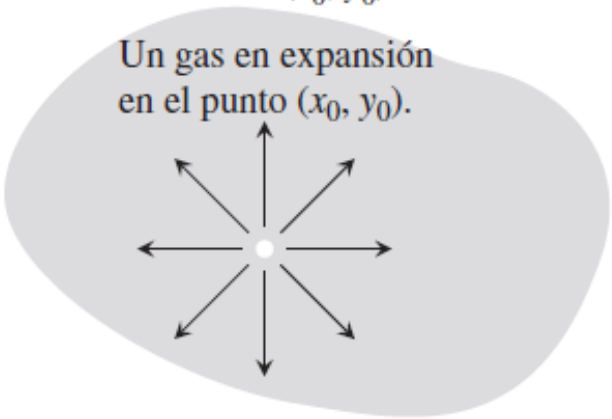
si S está positivamente orientada (hacia fuera).Por ser continuas las derivadas parciales de primer orden de las componentes de $\mathbf{F}$, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es un campo escalar continuo en R. Si consideramos que es prácticamente constante en W, entonces

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(Q)V(W)$$

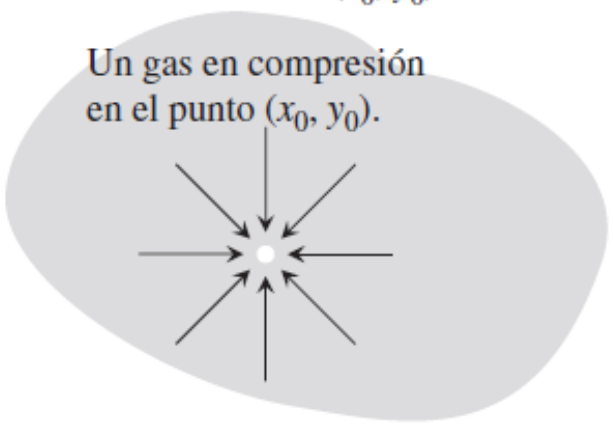
Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(Q) V(W)$$

Fuente: div $\mathbf{F}$ $(x_0, y_0) > 0$

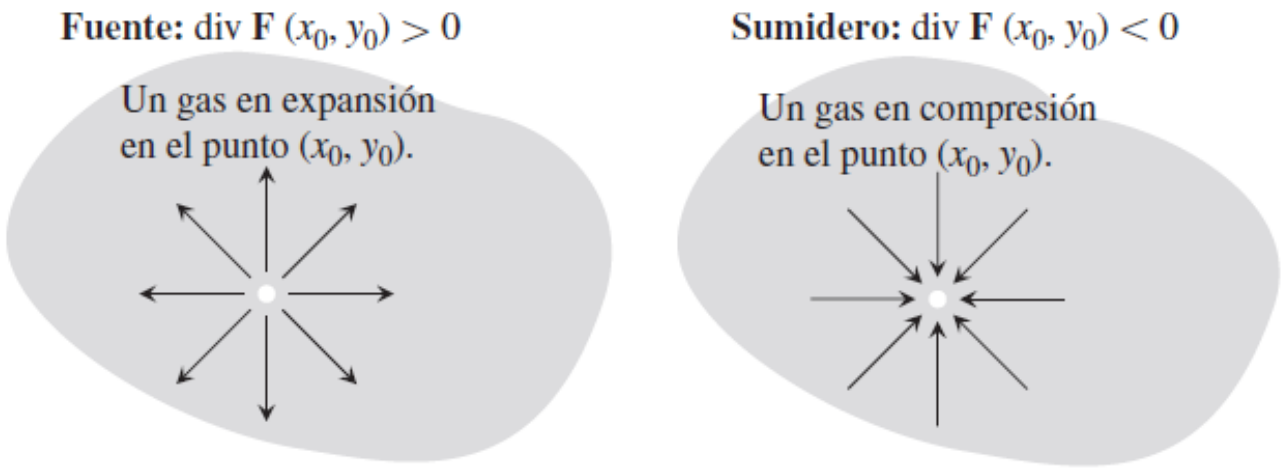


Sumidero: div $\mathbf{F}$ $(x_0, y_0) < 0$



Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(Q) V(W)$$



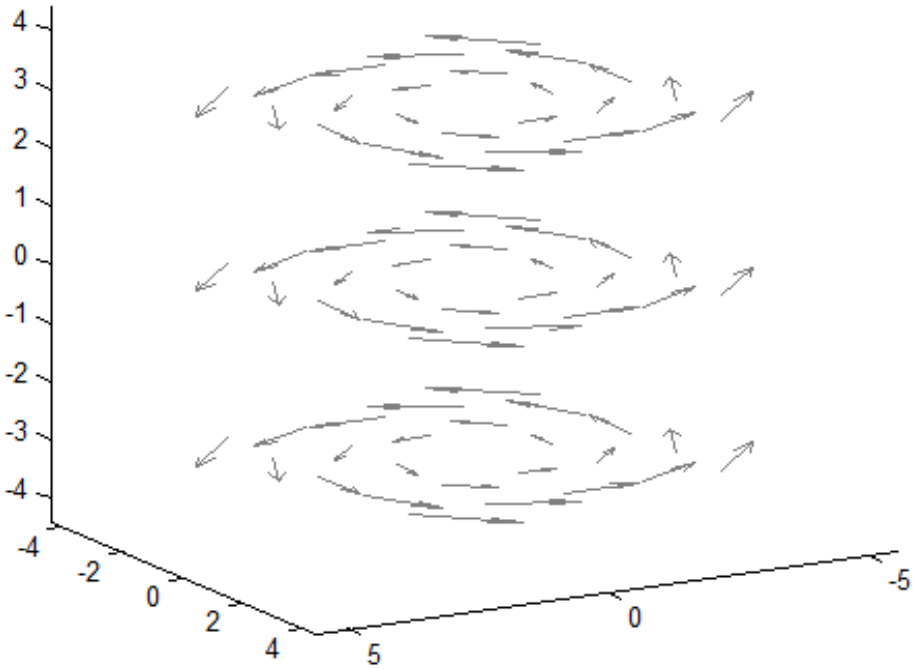
La divergencia en el punto Q es la tasa de flujo neto hacia fuera en Q por unidad de volumen.
Así, si $\operatorname{div} \mathbf{F}(Q) > 0$, el punto Q se llama **fuente** ya que el flujo neto alrededor de Q es positivo; si $\operatorname{div} \mathbf{F}(Q) < 0$, Q se llama **sumidero** para $\mathbf{F}$.
Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{F}$ se llama **solenoidal** y, si es un campo de velocidades de un fluido, decimos que el fluido es **incompresible**.

Interpretación: ejemplos

Supongamos que $\mathbf{F}$ es la velocidad de un gas que fluye en el espacio, para los siguientes casos:

Rotación: $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 2) = 2\mathbf{k};\ (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 0.$$



Rotación

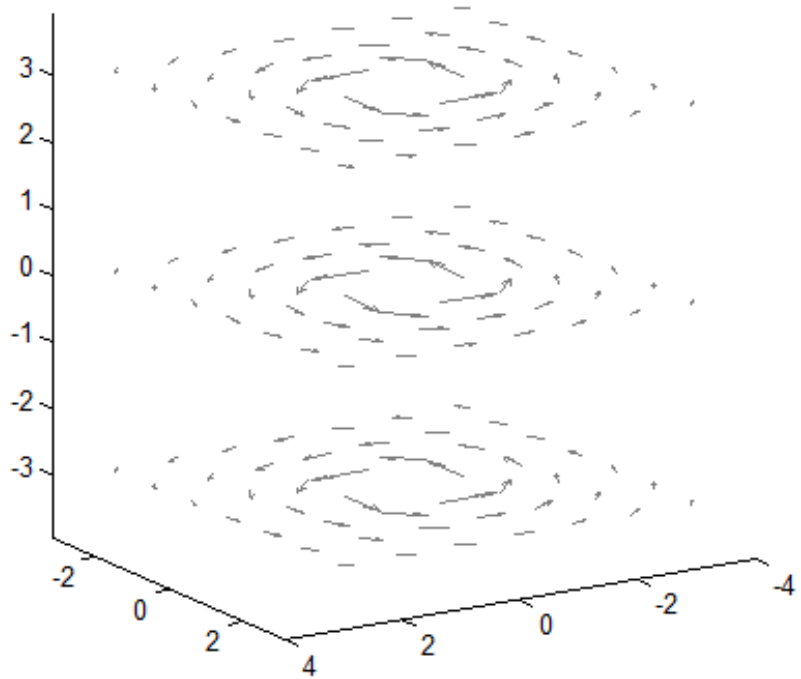
Interpretación: ejemplos

Remolino: $\mathbf{F}(x,y,z) = (-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0)$.

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,0);\ (\nabla \cdot \mathbf{F})(x,y,z) = 0.$$

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \neq 0\right\},\ \text{es } \mathbb{R}^3 \text{ sin el eje } z.$$

D es abierto y conexo pero no es simplemente conexo.

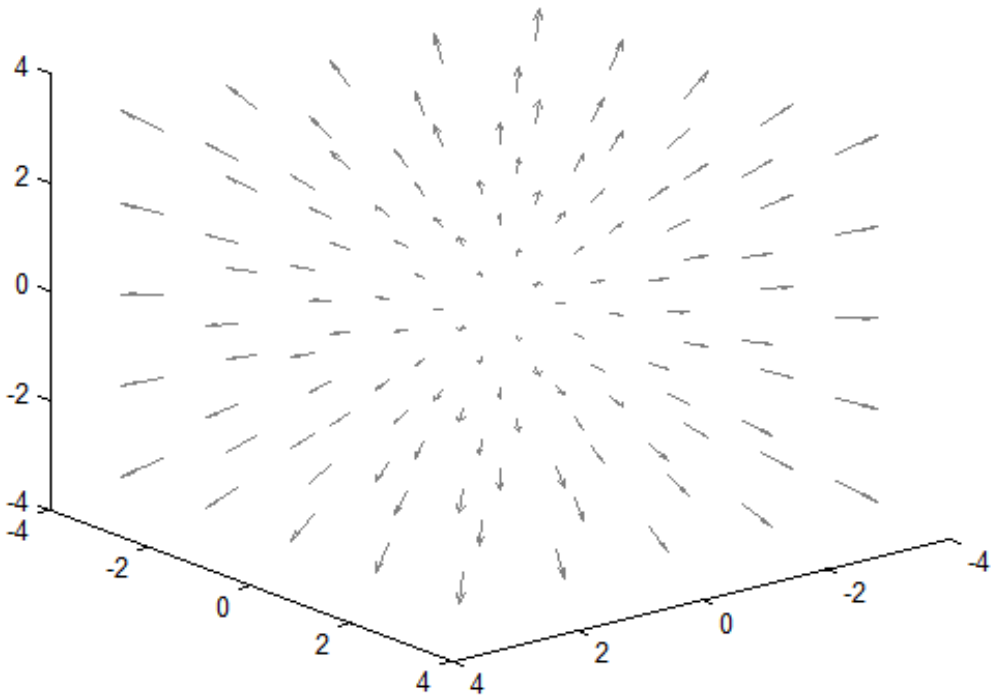


Remolino

Interpretación: ejemplos

Expansión o compresión uniforme: $\mathbf{F}(x, y, z) = (cx, cy, cz)$.

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0);\ (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 3c.$$

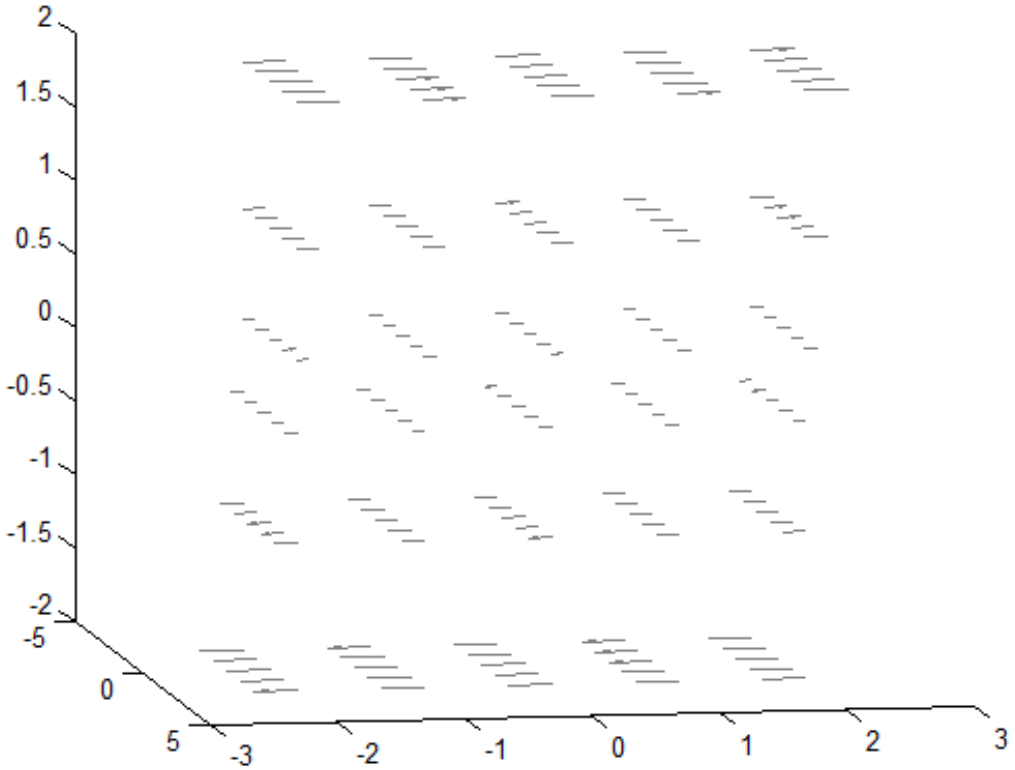


Expansión

Interpretación: ejemplos

Corte: $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, z, 0)$.

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (-1, 0, 0);\ (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 0.$$



Flujo cortante