# Métodos Matemáticos
# Álgebra Lineal

Pablo Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Octubre, 2026

# Espacio euclídeo n-dimensional

**Conjunto**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1, \dots, n\}$$

**Operación (binaria) de adición**: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \ x_2, \ \dots \ , x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad y = (y_1, \ y_2, \ \dots \ , y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + y := (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \dots \ , x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Multiplicación por escalares**: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda \in \mathbb{R} \ , \ x = (x_1, \ x_2, \ \dots \ , x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda \ x := (\lambda x_1, \ \lambda x_2, \ \dots \ , \ \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se prueba que cumplen las siguientes propiedades:

**1.** (propiedad asociativa) $(x+y)+z=x+(y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ .

**2.** (existencia de neutro aditivo) Existe $0 \in \mathbb{R}^n$ , $0=(0,0,...,0)$,tal que $x+0=0+x=x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

**3.** (existencia de opuesto para cada elemento) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $-x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$.

**4.** (propiedad conmutativa) $x+y=y+x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

**5.** (doble propiedad distributiva)

$\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ , y

$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**6.** (propiedad asociativa para escalares) $(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**7.** (neutralidad de la identidad multiplicativa escalar) $1\, x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Con estas dos operaciones se dice que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , o simplemente $\mathbb{R}^n$, es un **espacio vectorial real**.

Todo conjunto $V$ donde se ha definido una operación de adición $+$ que cumple las propiedades 1 - 4 se dice que es un **grupo** (aditivo) **conmutativo** (o abeliano).

Si $(V, +)$ es un grupo conmutativo donde está definida una multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 5 - 7 se dice que es un **espacio vectorial real.**

Se denota $(V, +, \cdot)$ o $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$

Ejemplo: $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ **espacio de funciones continuas,** con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación por constantes (escalares).

Nota : Los escalares también podrían ser números complejos en cuyo caso se dice que $V$ es un **espacio vectorial complejo** y se denota por $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$.

Más general: los escalares también podrían ser elementos de un cuerpo $F$ en cuyo caso se dice que $V$ es un **espacio vectorial sobre** $F$ y se denota por $(V, +, \cdot, F)$.

# Producto interior

## Definición

*El* **producto interior** *(o escalar) en* $\mathbb{R}^n$ *es la función* $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ \ldots \ + x_n y_n$$

*para* $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots\ , y_n) \in \mathbb{R}^n$

Con este producto interior se dice que el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es el **espacio euclídeo n-dimensional**.

# Propiedades del producto interior

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ :

(i) $x \cdot x \geq 0, \quad$ y $\quad x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $x \cdot y = y \cdot x$

(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(iv) $(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda (x \cdot y)$

Con este producto se puede definir la **norma euclídea**:

$$\|x\| = \|x\|_2 = (x \cdot x)^{1/2}$$

Si $x \cdot y = 0$ se dice que $x$ e $y$ son **ortogonales**.

# Subespacio vectorial

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$ .

## Definición

*Un subconjunto $S \subset V$ es un* **subespacio vectorial** *de $V$ si él mismo es un espacio vectorial con las operaciones de adición y de multiplicación por escalares restringidas a $S$.*

El conjunto de todas las **combinaciones lineales** de **m** vectores $v_1, \ldots, v_m$ en $V$ es el **subespacio generado** por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y se denota por

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$$

Dada una colección de vectores $E = \{v_i\}_{i \in \mathrm{I}} \subset V$ el subespacio generado por esta colección es el conjunto de todas las combinaciones lineales de todo número finito arbitrario de vectores $v_i$, denotado por

$$\operatorname{span} E$$

o por

$$\operatorname{span} \{v_i\}_{i \in \mathrm{I}} .$$

**Definición**

*Una colección de vectores* $E = \{v_i\}_{i \in \mathrm{I}} \subset V$ *es un* **conjunto generador** *de* $V$ *si* $\operatorname{span} E = V$ .

**Ejemplo 1**:

Los **vectores canónicos** $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$.

**Ejemplo 2**:
Si $V$ es el espacio vectorial de todos los **polinomios** reales de grado a lo sumo $m$, $m \in \mathbb{N}$ , un conjunto de generadores es $\left\{1, x, x^2, x^3, ..., x^m\right\}$ ya que todo polinomio de grado $\leq m$ se escribe como

$$P(x) = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., m$.

# Independencia lineal

**Definición**

*Un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_m\}$ en $V$ es* **linealmente independiente** *si ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros.*

Equivalentemente, para todo $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ v_i = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$$

Una colección de vectores $E = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ es linealmente independiente si todo subconjunto finito lo es.

# Base

## Definición

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$. Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ en $V$ es una* **base** *(de Hamel) de $V$ si es un conjunto linealmente independiente generador de $V$.*

**Ejemplo**: el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$, donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix},$$

es una base de $\mathbb{R}^n$, llamada **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

## Propiedad

*Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos.*

## Definición

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$. La dimensión de $V$ es el número de elementos de una base cualquiera de $V$.*

## Definición

*Una base $\{x_1, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es una* **base ortonormal** *si*

$$x_i \cdot x_j = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

# Transformación lineal

## Definición

*Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $F$. Una función $T : V \to W$ es una* **transformación o aplicación lineal** *si para todo $v_1, v_2 \in V$ y todo $\lambda \in F$ se tiene*

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ T(\lambda v) &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

## Definición

*Dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, $V$ y $W$ , son* **isomorfos** *si existe una transformación lineal biyectiva $T : V \to W$ .*

**Ejemplo**: El espacio de los polinomios reales de grado $\leq 2$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ .

# Imagen. Núcleo.

Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $F$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

$$\text{Imagen}\,(T) = \{w \in W : \ w = T(v) \ \text{ para algún } \ v \in V\}$$

$$\text{Ker}\,(T) = \{v \in V : \ T(v) = 0\}$$

**Propiedad**

$\text{Imagen}\,(T)$ *es un subespacio de* $W$ *y* $\text{Ker}\,(T)$ *es un subespacio de* $V$.

# Teorema de la dimensión

**Teorema**

*Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales $V$ y $W$ sobre un mismo cuerpo $F$, entonces*

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Imagen}(T).$$

**Propiedad:**

$$V / \operatorname{Ker}(T) \approx \operatorname{Imagen}(T)$$

**Suma directa**:

$$V \approx \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Imagen}(T)$$

# Matrices

Una matriz $A$ (real) de orden $n \times m$ es un arreglo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1\cdot} \\ A_{2\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{\cdot m} \end{bmatrix},$$

donde $A_{i\cdot}$ son las filas de $A$ y $A_{\cdot j}$ las columnas de $A$.

# Algebra matricial

**Adición** de matrices: $A$ de orden $n \times m$ y $B$ de orden $n \times m$.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

**Multiplicación por escalar:** $A$ de orden $n \times m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha A = [\alpha \ a_{ij}] .$$

**Multiplicación** de matrices: $A$ de orden $n \times m$ y $B$ de orden $m \times p$.

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \ b_{kj} \right] .$$

$AB$ es de orden $n \times p$.

# Propiedades de operaciones matriciales

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$A+B = B+A$

$A+0 = 0+A = A$ donde $0 = [0]$ es la matriz **nula.**

$(AB)\,C = A\,(BC)$

$A\,(B+C) = AB \;+\; AC$

Matriz **identidad** de orden $n$ :

$$\mathtt{I} = \mathtt{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Si $A$ es de orden $n \times n$, entonces $A\mathtt{I}_\mathtt{n} = \mathtt{I}_\mathtt{n}A = A$

En general: $AB \neq BA$

Sea $M$ el conjunto de todas las matrices (reales) de orden $n \times m$, entonces:

$(M, +)$ es un grupo conmutativo

$(M, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión $nm$. ( $\cdot$ indica multiplicación por escalares $\alpha A$)

Si $n = m$, entonces $(M, +, .)$ es un anillo con identidad. ( . indica multiplicación de matrices $A.B = AB$)

# Transpuesta

Matriz **transpuesta** de $A = [a_{ij}]$:

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$A'$ es de orden $m \times n$ .

"Intercambia" filas con columnas.

Propiedades:

$$(A+B)' = A' + B' \quad \text{y} \quad (AB)' = B'A'$$

# Traza

**Traza** de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $n \times n$

$$\text{traza}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propiedades:

1. $\text{traza}\,(A) = \text{traza}\,(A')$
2. $\text{traza}\,(A + B) = \text{traza}\,(A) + \text{traza}\,(B)$
3. $\text{traza}\,(\alpha A) = \alpha\,\text{traza}\,(A)$
4. $\text{traza}\,(A'B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, si $A : m \times n$ , $B : m \times n$

# Tipos de matrices

Sea $A = [a_{ij}]$

- Matriz **cuadrada**: $A = [a_{ij}]$ de orden $n \times n$.
- **Simétrica**: $A$ es cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, ..., n$.
- **Diagonal**: $A$ es cuadrada y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$.
- **Triangular inferior** $D_L$ y **triangular superior** $D_U$ :

$$D_L = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}, \qquad D_U = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Idempotente**: $P$ cuadrada y $P^2 = P$.

# Matriz inversa

## Definición

*Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$. La matriz $B$ cuadrada de orden $n$ es la* **matriz inversa** *de $A$ si*

$$AB = BA = \mathtt{I}.$$

Escribimos $A^{-1}$. $A$ se dice **inversible**, o **regular**, o **no singular**.

**Propiedades**:

1. Si $A^{-1}$ existe, entonces es única.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
3. $\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$,
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$,

siempre que existan $A^{-1}$ y $B^{-1}$.

# Rango de una matriz

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times m$.

## Definición

*El* **rango fila** *de $A$ es el máximo número de filas de $A$ linealmente independientes.*
*El* **rango columna** *de $A$ es el máximo número de columnas de $A$ linealmente independientes.*

## Teorema

*Sea $A$ una matriz $n \times m$. El rango fila y el rango columna de $A$ coinciden.*

## Definición

*El* **rango** *de $A$, $\rho(A)$, es el rango fila o columna de $A$.*

## Definición

*$A$ de orden $n \times m$ es de* **rango completo** *si* $\rho(A) = \min\{n, m\}$.

Si $A$ es cuadrada $n \times n$ , $A$ es de rango completo si $\rho(A) = n$.

Propiedades:

## Teorema

*Sea $A$ una matriz de orden $n \times m$ :*
*(i) Si $B$ una matriz de orden $m \times p$, entonces*
$\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$,

*(ii) Si $P$ y $Q$ son matrices cuadradas de orden $n$ y $m$ respectivamente, ambas de rango completo, entonces*

$$\rho(PA) = \rho(AQ) = \rho(PAQ) = \rho(A).$$

# Transformaciones lineales matriciales

Sea $A$ una matriz de orden $n \times m$. Se puede definir una transformación lineal asociada a $A$ :

$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad T(x) = Ax.$$

Observación: Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} A_{.1} & A_{.2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{.m} \end{bmatrix}$, entonces

$$T(x) = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \, A_{.\mathbf{i}}$$

El rango de $A$ es la dimensión del espacio imagen de $T$.

Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal matricial:

**Teorema**

*Para toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existe una matriz $A$ de orden $n \times m$ tal que $T(x) = Ax$.*

**Observación**: esta propiedad es cierta para toda transformación lineal $T : V \to W$, donde $V$ y $W$ son espacios vectoriales de dimensión $m$ y $n$ respectivamente.

# Sistemas lineales

Sea el sistema lineal de $n$ ecuaciones con $m$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1m}\ x_m = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2m}\ x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nm}\ x_m = b_n \end{cases}$$

se puede escribir como

$$Ax = b,$$

con $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times m$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$.

El sistema $Ax = b$ tiene solución si y solo si $b$ es un elemento del espacio columna de la matriz $A$.

Un **sistema homogéneo** $Ax = 0$ siempre tiene al menos la **solución trivial** $x = 0$. Sus soluciones forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Dado un sistema **compatible** $Ax = b$, su **conjunto solución** es $\bar{x} + S$, donde $S$ es el espacio solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ y $\bar{x}$ es una solución particular.

**Teorema**

*La dimensión del espacio solución del sistema lineal homogéneo* $Ax = 0$ *es* $m - \rho(A)$.

**Corolario**

*Un sistema cuadrado* $Ax = b$, $(m = n)$, *tiene solución única si y solo si* $\rho(A) = n$.

**Teorema**

*Si $A$ es inversible, entonces todo sistema $Ax = b$ tiene una única solución dada por*

$$\bar{x} = A^{-1}b.$$

# Determinantes de matrices

Definimos **determinante** de matrices cuadradas $A$, $\det(A) = |A|$, en forma inductiva sobre el orden $n$ de la matriz:

$$n = 1, \quad A = [a], \quad \det(A) = a \quad .$$

Supongamos $\det(A)$ definido para matrices cuadradas de orden $n-1$.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n$. Sea $A_{1j}$ la sub-matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida de eliminar la fila 1 y la columna $j$ de $A$. Entonces

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \; a_{1j} \; |A_{1j}| .$$

$M_{1j} := |A_{1j}|$ es el **menor** correspondiente a $a_{1j}$.
$C_{1j} := (-1)^{1+j} |A_{1j}|$ es el **cofactor** de $a_{1j}$ .

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \; C_{1j}.$$

**Propiedad**

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n$. Sea $A_{ij}$ la sub-matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida de eliminar la fila $i$ y la columna $j$ de $A$. Entonces

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; |A_{ij}| .$$

$M_{ij} := |A_{ij}|$ es el **menor** correspondiente a $a_{ij}$.
$C_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ es el **cofactor** de $a_{ij}$ .

**Desarrollo de Laplace**:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; C_{ij}.$$

# Propiedades de determinantes

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n$.

1. $\det(A) = \det(A')$ Luego toda propiedad de determinantes referida a filas de una matriz también es válida para columnas.
2. Si $B$ es la matriz obtenida de $A$ intercambiando dos de sus filas, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
3. Si $B$ es la matriz obtenida de $A$ multiplicando una de sus filas por un escalar $\alpha$, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.
4. Si $A, B$ y $C$ son tres matrices de orden $n$ tales que la fila $i$ de $A$ es la suma de las filas $i$ de $B$ y de $C$, mientras que todas las demás filas coinciden, entonces $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.
5. $\det(\mathrm{I}) = 1$.
6. Si $A$ es una matriz triangular, en particular diagonal, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.
7. Si $B$ es una matriz cuadrada de orden $n$, entonces $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

## Teorema

*Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$. Son equivalentes:*

*(i)* $A$ *es no singular.*

*(ii)* $\rho(A) = n$.

*(iii)* $\det(A) \neq 0$.

## Propiedad

*Si $A$ es inversible, entonces* $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

# Valores propios y vectores propios

De aquí en adelante las matrices que se indiquen serán cuadradas de orden $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $F$ .
Asimismo, a menos que se especifique lo contrario, todo vector será un vector (columna) de $F^n$ .

## Definición

*Un escalar $\lambda$ es un* **valor propio** *(o* **valor característico** *o* **autovalor***) de una matriz $A$ si existe un vector no nulo $x$ tal que*

$$Ax = \lambda x.$$

## Definición

*Un vector $x$ es un vector propio (o vector característico o autovector) de una matriz $A$ si existe un escalar $\lambda$ tal que $Ax = \lambda x$. Si $x \neq 0$ se dice que $x$ es un vector propio correspondiente al valor propio $\lambda$.*

# Conexión entre ecuaciones diferenciales y autovalores

Recordemos la ecuación diferencial de segundo orden para el sistema masa-resorte:

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0.$$

Realizando el cambio de variables $x = y'$, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}x. \end{cases}$$

Este es un sistema plano de ecuaciones diferenciales, que puede escribirse en la forma:

$$X'(t) = AX(t),$$

donde

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Sea $v$ un vector propio de $A$ con valor propio $\lambda$. Entonces, la función vectorial

$$X(t) = e^{\lambda t} v$$

es solución del sistema anterior, ya que

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t} v) = AX(t).$$

Recordando que toda matriz representa una transformación lineal, es dable esperar que exista una definición similar para operadores, o sea para transformaciones lineales de un espacio vectorial sobre sí mismo.

## Definición

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$ y sea*

$$T : V \to V$$

*un operador de $V$. Se dice que un vector $v \in V$ es un vector propio de $T$ si existe $\lambda \in F$ tal que*

$$Tv = \lambda v.$$

*Si $v \neq 0$ se dice que $\lambda$ es un valor propio de $T$.*

**Nota**: Algunos autores exigen en la definición de vector propio que sea un vector no nulo.

## Ejemplo

*Sea* $V = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *infinitamente derivables. Sea* $D$ *el operador diferencial*

$$D : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$$
$$D(f) = f'.$$

*La función* $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *definida por* $f(t) = e^{\lambda t}$ *es un vector propio correspondiente al valor propio* $\lambda$*, para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *. En efecto*

$$D(f)(t) = f'(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t)$$

*para todo* $t \in \mathbb{R}$ *.*

## Ejemplo

*Sea la matriz diagonal*

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

*Todo vector canónico* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)'$ , $i = 1, 2, ..., n$ , *es un vector propio ya que*

$$Ae_i = d_i e_i$$

*y los escalares* $d_1, ..., d_n$ *son valores propios de* $A$.

# Propiedades de valores y vectores propios

Se desarrollarán en el contexto más amplio de operadores, pero son válidas si se reemplazan estos últimos por matrices.

## Teorema

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$ y sea $A : V \to V$ un operador. Sea $\lambda$ un valor propio de $A$ y sea $V_\lambda$ el subespacio de $V$ generado por los vectores propios de $A$ correspondientes a $\lambda$ . Entonces todo elemento no nulo de $V_\lambda$ es un vector propio de $A$ correspondiente a $\lambda$ como valor propio.*

**Demostración**: Esbozo: si

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i$$

entonces

$$Av = A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \; Av_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \; \lambda v_i = \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \; v_i = \lambda v.$$

## Definición

*Al subespacio $V_\lambda$ se lo conoce como espacio propio (o espacio característico) de $A$ correspondiente a $\lambda$.*

## Teorema

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $F$ y sea $A : V \to V$ un operador. Si $v_1, v_2, ..., v_m$ son vectores propios de $A$ correspondientes a diferentes valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ , entonces los vectores $v_1, v_2, ..., v_m$ son linealmente independientes.*

**Demostración**: Por inducción sobre $m$.

## Ejemplo

*Sea $V$ el espacio vectorial complejo de las funciones infinitamente derivables. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$ distintos entre sí. Las funciones dadas por*

$$e^{-\alpha_1 t}, \ \dots \ , e^{-\alpha_m t}$$

*son vectores propios del operador derivada, con valores propios distintos $\alpha_1, ..., \alpha_m$, por lo tanto son linealmente independientes.*

En Análisis Matemático son muy utilizadas las funciones definidas por

$$e^{2\pi i n t} = \cos 2\pi n t + i \operatorname{sen} 2\pi n t \ , n \in \mathbb{N}.$$

## Teorema

*Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $F$ y sea $\lambda \in F$. Sea $A : V \to V$ un operador. Entonces $\lambda$ es un valor propio de $A$ si y solo si el operador $\lambda \mathtt{I} - A$ es singular, esto es no es invertible.*

## Corolario

*Sea $A$ una matriz cuadrada con coeficientes en un cuerpo $F$, entonces $\lambda \in F$ es un valor propio de $A$ si y solo si* $\det(\lambda \mathtt{I} - A) = 0$.

# Polinomio característico

## Definición

*Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$ con coeficientes en un cuerpo $F$, su polinomio característico, $P_A$, es el determinante*

$$P_A(t) := \det(t\mathrm{I} - A).$$

## Ejemplo

*El polinomio característico de* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *es*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - t^2 + t - 1.$$

*Obsérvese que siempre el polinomio característico es mónico y de grado $n$.*

**Teorema**

*Sea $A$ una matriz de orden $n$ en un cuerpo $F$ y sea $\lambda \in F$. Entonces $\lambda$ es un valor propio de $A$ si y solo si $\lambda$ es una raíz del polinomio característico de $A$.*

# Forma diagonal de una matriz

## Ejemplo

*Dada la matriz real diagonal*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*su polinomio característico es*

$$P_A(t) = \det(t\mathrm{I} - A) = (t-3)(t-1)(t-2)$$

*y sus valores propios son* $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$*; es decir los valores propios de A son los elementos de su diagonal. Los vectores canónicos* $e_1, e_2, e_3$ *son vectores propios no nulos de A.*

Este ejemplo en que se pueden hallar los valores y vectores propios por simple inspección (¡sin necesidad de cálculo alguno!) motiva el tema de esta sección: transformar $A$ en una matriz diagonal sin cambiar sus valores propios.

## Teorema

*Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ con coeficientes en un cuerpo $F$ . Supóngase que $A$ tiene $n$ vectores propios linealmente independientes, $x_1, ..., x_n$. Si $S$ es la matriz que tiene como columnas estos vectores, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal $D$, con los valores propios de $A$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ , en su diagonal*

$$S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**Corolario**

*Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ con coeficientes en un cuerpo $F$ y supóngase que $A$ tiene $n$ valores propios distintos entre sí en $F$. Entonces existe una matriz no singular $S$ con coeficientes en $F$ tal que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal, es decir $A$ es diagonalizable.*

- La matriz invertible $S$ no es única. En primer lugar, un vector propio puede multiplicarse por un escalar no nulo y seguir siendo un vector propio. Además los valores propios repetidos dan aún más libertad.

- El recíproco del Teorema anterior es también válido; de hecho se tiene:

**Teorema**

*Una matriz $A$ cuadrada de orden $n$ con coeficientes en un cuerpo $F$ es diagonalizable si y solo si $A$ tiene $n$ vectores propios linealmente independientes.*

No todas las matrices poseen $n$ vectores propios linealmente independientes y, por lo tanto, no todas las matrices son diagonalizables. El ejemplo más común es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ya que es triangular. Para hallar sus vectores propios:

$$(\lambda_i \mathrm{I} - A)\, x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Esto muestra que, a pesar de que $\lambda = 0$ es un valor propio doble (su multiplicidad algebraica es 2), su correspondiente espacio característico tiene dimensión 1 (la "multiplicidad geométrica" de este valor propio es 1)

Algunas matrices con valores propios repetidos pueden diagonalizarse.

El criterio es calcular todos los vectores propios y ver si hay "suficientes":

Si los valores propios son distintos no hay dificultad alguna.

Si, en cambio, algún valor propio tiene multiplicidad algebraica $m$ mayor que 1, entonces se debe estudiar la dimensión del espacio característico (la que se puede considerar como una "multiplicidad geométrica"). Si esta es también igual a $m$, tampoco habrá dificultad. En particular esta es la situación en el caso de matrices simétricas reales.

De la demostración del Teorema anterior se deduce que:

- las columnas de la matriz $S$ que diagonaliza a $A$ son siempre vectores propios de $A$,
- la diagonal de $D$ está formada por los valores propios de $A$,
- el orden de aparición de los valores propios en $A$ y de sus correspondientes vectores propios en $S$ es el mismo.

# Matriz no diagonalizable. Forma canónica de Jordan.

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$A$ es no diagonalizable.

Autovector generalizado: $(A - 3\ I)\ v_2 = v_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = J$$

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A$ es no diagonalizable.

Autovector generalizado: $(A - 3\ I)\ v_3 = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = J$$

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$A$ es no diagonalizable.

Autovectores generalizados: $(A - \lambda\ I)\ v_2 = v_1, \qquad (A - \lambda\ I)\ v_3 = v_2$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J$$

## Teorema (forma canónica de Jordan)

Sea $A$ una matriz real $n \times n$. Existe una matriz $M$ inversible tal que

$$MAM^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

donde $J_i$ son matrices cuadradas y tiene la forma

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} C_2 & I_2 & & & \\ & C_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_2 \end{pmatrix}$$

con

$$C_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.
- Si $\delta_2 > \delta_1$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$ tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(2)} = V_j^{(1)}$$

tenga $\delta_2 - \delta_1$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(2)}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.
- Si $\delta_2 > \delta_1$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$ tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(2)} = V_j^{(1)}$$

tenga $\delta_2 - \delta_1$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(2)}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$.Entonces

$$\left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2} = \left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$$

es la base buscada para $\ker (A - \lambda I)^2$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

- Si $\delta_3 > \delta_2$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2}$ de $\ker (A - \lambda I)^2$ con $V_j^{(2)} \in span \left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$, tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

tenga $\delta_3 - \delta_2$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(3)}$, $j = 1, ..., \delta_3 - \delta_2$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

- Si $\delta_3 > \delta_2$, elegir una nueva base $\left\{V_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2}$ de $\ker (A-\lambda I)^2$ con $V_j^{(2)} \in span\left\{v_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$, tal que

$$(A-\lambda I)v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

tenga $\delta_3 - \delta_2$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(3)}$, $j = 1, ..., \delta_3 - \delta_2$. Si para $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$,

$$V_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{\delta_2-\delta 1} c_i v_i^{(2)},$$

tomamos

$$\hat{V}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2-\delta_1} c_i V_i^{(1)}$$

y $\hat{V}_j^{(1)} = V_j^{(1)}$, para $j = \delta_2 - \delta_1 + 1, ..., \delta_1$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

Luego,

$$\left\{ v_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3} = \left\{ \hat{V}_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{ V_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1} \cup \left\{ v_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3 - \delta_2}$$

es una base para $\ker (A - \lambda I)^3$.

# Algoritmo para encontrar $M$ y $J$

Luego,

$$\left\{v_j^{(3)}\right\}_{j=1}^{\delta_3} = \left\{\hat{V}_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{V_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1} \cup \left\{v_j^{(3)}\right\}_{j=1}^{\delta_3-\delta_2}$$

es una base para $\ker (A-\lambda I)^3$.
Continuamos este proceso hasta llegar a $\delta_k = n$ y obtener una base $\left\{v_j^{(n)}\right\}_{j=1}^{n}$ de $\mathbb{R}^n$. La matriz $M$ es

$$M = [v_1^{(n)} \cdots v_n^{(n)}].$$

- Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se reduce a su forma canónica.

- Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se reduce a su forma canónica.

- ídem al anterior, pero para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$