Métodos Matemáticos
Álgebra Lineal

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Espacio euclídeo n-dimensional

Conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1, \dots, n\}$$

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1, 2\}$

Operación (binaria) de adición: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \ x_2, \ \dots \ , x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad y = (y_1, \ y_2, \ \dots \ , y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + y := (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \dots \ , x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicación por escalares: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda \in \mathbb{R} \ , \ x = (x_1, \ x_2, \ \dots \ , x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda \ x := (\lambda x_1, \ \lambda x_2, \ \dots \ , \ \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se prueba que cumplen las siguientes propiedades:

1. (propiedad asociativa) $(x+y)+z=x+(y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

2. (existencia de neutro aditivo) Existe $0 \in \mathbb{R}^n$, $0=(0,0,...,0)$,tal que $x+0=0+x=x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3. (existencia de opuesto para cada elemento) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $-x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$.

4. (propiedad conmutativa) $x+y=y+x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

$f \longrightarrow (\quad) \in \mathbb{R}^n$

5. (doble propiedad distributiva)

$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6. (propiedad asociativa para escalares) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7. (neutralidad de la identidad multiplicativa escalar) $1\,x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2)$

Con estas dos operaciones se dice que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, o simplemente $\mathbb{R}^n$, es un **espacio vectorial real**.

- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Todo conjunto V donde se ha definido una operación de adición $+$ que cumple las propiedades 1 - 4 se dice que es un **grupo** (aditivo) **conmutativo** (o abeliano).

Si $(V, +)$ es un grupo conmutativo donde está definida una multiplicación por elementos de $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 5 - 7 se dice que es un **espacio vectorial real.**

Se denota $(V, +, \cdot)$ o $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$

Ejemplo: $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ **espacio de funciones continuas,** con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación por constantes (escalares).

Nota : Los escalares también podrían ser números complejos en cuyo caso se dice que V es un **espacio vectorial complejo** y se denota por $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$.

Más general: los escalares también podrían ser elementos de un cuerpo F en cuyo caso se dice que V es un **espacio vectorial sobre** F y se denota por $(V, +, \cdot, F)$.

Producto interior

Definición

El **producto interior** *(o escalar) en* $\mathbb{R}^n$ *es la función* $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ \ldots \ + x_n y_n$$

para $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots\ , y_n) \in \mathbb{R}^n$

Con este producto interior se dice que el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es el **espacio euclídeo n-dimensional**.

Propiedades del producto interior

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $x \cdot x \geq 0, \quad$ y $\quad x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $x \cdot y = y \cdot x$

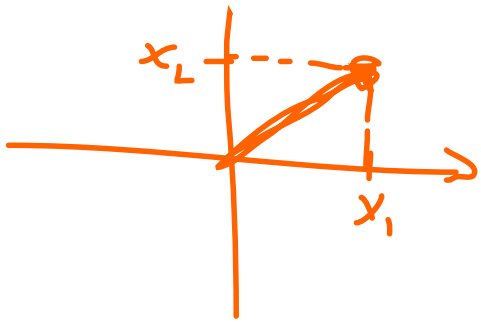
(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(iv) $(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda (x \cdot y)$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

en $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$



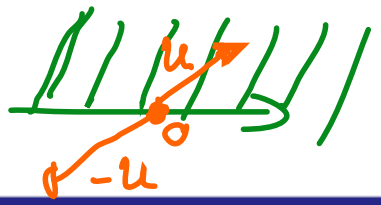
Con este producto se puede definir la **norma euclídea**:

$$\|x\| = \|x\|_2 = (x \cdot x)^{1/2}$$

Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **ortogonales**.

Subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F .



Definición

Un subconjunto $S \subset V$ es un **subespacio vectorial** *de V si él mismo es un espacio vectorial con las operaciones de adición y de multiplicación por escalares restringidas a S.*

El conjunto de todas las **combinaciones lineales** de **m** vectores $v_1, \ldots, v_m$ en V es el **subespacio generado** por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y se denota por

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$$

$S_1 = \{0\}$, $S_2 = \mathbb{R}^2$ o S_3 = rectas que pasan por origen.

Dada una colección de vectores $E = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ el subespacio generado por esta colección es el conjunto de todas las combinaciones lineales de todo número finito arbitrario de vectores v_i, denotado por

$$\operatorname{span} E \qquad \text{gen}\{v_1, v_2\}$$

o por

$$\operatorname{span} \{v_i\}_{i \in I}.$$

Definición

Una colección de vectores $E = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ es un **conjunto generador** *de V si* $\operatorname{span} E = V$.

Ejemplo 1:

Los **vectores canónicos** $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2:

Si V es el espacio vectorial de todos los **polinomios** reales de grado a lo sumo m, $m \in \mathbb{N}$, un conjunto de generadores es $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^m\}$ ya que todo polinomio de grado $\leq m$ se escribe como

$$P(x) = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., m$.

Independencia lineal

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_m\}$ en V es **linealmente independiente** *si ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros.*

Equivalentemente, para todo $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ v_i = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$$

Una colección de vectores $E = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ es linealmente independiente si todo subconjunto finito lo es.

Base

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ en V es una **base** *(de Hamel) de V si es un conjunto linealmente independiente generador de V.*

Ejemplo: el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$, donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix},$$

es una base de $\mathbb{R}^n$, llamada **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Propiedad

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. La dimensión de V es el número de elementos de una base cualquiera de V.

Definición

Una base $\{x_1, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es una **base ortonormal** *si*

$$x_i \cdot x_j = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Transformación lineal

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo F. Una función $T : V \to W$ es una **transformación o aplicación lineal** *si para todo $v_1, v_2 \in V$ y todo $\lambda \in F$ se tiene*

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ T(\lambda v) &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Definición

Dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, V y W , son **isomorfos** *si existe una transformación lineal biyectiva $T : V \to W$.*

Ejemplo: El espacio de los polinomios reales de grado ≤ 2 es isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Imagen. Núcleo.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

$$\text{Imagen}\,(T) \;=\; \{w \in W :\; w = T(v) \;\text{ para algún }\; v \in V\}$$

$$\text{Ker}\,(T) \;=\; \{v \in V :\; T(v) = 0\}$$

T inyectiva $\Leftrightarrow$ $\ker(T) = \{0\}$

Propiedad

$\text{Imagen}\,(T)$ *es un subespacio de* W *y* $\text{Ker}\,(T)$ *es un subespacio de* V.

Teorema de la dimensión

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo F, entonces

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Imagen}(T).$$

Propiedad:

$$V / \operatorname{Ker}(T) \approx \operatorname{Imagen}(T)$$

Suma directa:

$$V \approx \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Imagen}(T)$$

Matrices

Una matriz A (real) de orden $n \times m$ es un arreglo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1\cdot} \\ A_{2\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{\cdot m} \end{bmatrix},$$

donde $A_{i\cdot}$ son las filas de A y $A_{\cdot j}$ las columnas de A.

Algebra matricial

Adición de matrices: A de orden $n \times m$ y B de orden $n \times m$.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

Multiplicación por escalar: A de orden $n \times m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha A = [\alpha \ a_{ij}] .$$

Multiplicación de matrices: A de orden $n \times m$ y B de orden $m \times p$.

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \ b_{kj} \right] .$$

AB es de orden $n \times p$.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 & & \\ & A_2 \cdot B_4 & \\ & & \end{bmatrix}$$

AB

Propiedades de operaciones matriciales

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$A+B = B+A$

$A+0 = 0+A = A$ donde $0 = [0]$ es la matriz **nula.**

$(AB)\,C = A\,(BC)$

$A\,(B+C) = AB \;+\; AC$

Matriz **identidad** de orden n :

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Si A es de orden $n \times n$, entonces $A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A$

En general: $AB \neq BA$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea M el conjunto de todas las matrices (reales) de orden $n \times m$, entonces:

$(M, +)$ es un grupo conmutativo

$(M, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión nm ($\cdot$ indica multiplicación por escalares αA)

Si $n = m$, entonces $(M, +, .)$ es un anillo con identidad. (. indica multiplicación de matrices $A.B = AB$)

$(a; b; c; d)$

Transpuesta

Matriz **transpuesta** de $A = [a_{ij}]$:

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}$$

A' es de orden $m \times n$.

"Intercambia" filas con columnas.

Propiedades:

$$(A+B)' = A' + B' \quad \text{y} \quad (AB)' = B'A'$$

Traza

Traza de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $n \times n$

$$\text{traza}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ w_1 & z_1 \end{bmatrix} = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 w_1 + d_1 z_1$

producto escalar

Propiedades:

1. $\text{traza}\,(A) = \text{traza}\,(A')$
2. $\text{traza}\,(A + B) = \text{traza}\,(A) + \text{traza}\,(B)$
3. $\text{traza}\,(\alpha A) = \alpha\,\text{traza}\,(A)$
4. $\text{traza}\,(A'B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$, si $A : m \times n$, $B : m \times n$

$A \cdot B = \text{traza}(A'B)$

Tipos de matrices

Sea $A = [a_{ij}]$

- Matriz **cuadrada**: $A = [a_{ij}]$ de orden $n \times n$.
- **Simétrica**: A es cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, ..., n$.
- **Diagonal**: A es cuadrada y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$.
- **Triangular inferior** D_L y **triangular superior** D_U :

$$D_L = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}, \qquad D_U = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Idempotente**: P cuadrada y $P^2 = P$.

Matriz inversa

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n. La matriz B cuadrada de orden n es la **matriz inversa** *de A si*

$$AB = BA = \mathrm{I}.$$

Escribimos A^{-1}. A se dice **inversible**, o **regular**, o **no singular**.

Propiedades:

1. Si A^{-1} existe, entonces es única.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
3. $\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$,
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$,

siempre que existan A^{-1} y B^{-1}.

$A \in M_{n\times n}$

$Ax = b \in \mathbb{R}^n$

$ax = b$

$x = \frac{b}{a}$

$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

$Ix = A^{-1}b$

$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$, si $a \neq 0$

$1x = a^{-1}b$

$x = a^{-1}b$

Rango de una matriz

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times m$.

Definición

El **rango fila** *de A es el máximo número de filas de A linealmente independientes.*
El **rango columna** *de A es el máximo número de columnas de A linealmente independientes.*

Teorema

Sea A una matriz $n \times m$. El rango fila y el rango columna de A coinciden.

Definición

El **rango** *de A, $\rho(A)$, es el rango fila o columna de A.*



Definición

A de orden $n \times m$ es de **rango completo** *si* $\rho(A) = \min\{n, m\}$.

Si A es cuadrada $n \times n$, A es de rango completo si $\rho(A) = n$.

Propiedades:

Teorema

Sea A una matriz de orden $n \times m$:
(i) Si B una matriz de orden $m \times p$, entonces
$\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$,

(ii) Si P y Q son matrices cuadradas de orden n y m respectivamente, ambas de rango completo, entonces

$$\rho(PA) = \rho(AQ) = \rho(PAQ) = \rho(A).$$

Transformaciones lineales matriciales

Sea A una matriz de orden $n \times m$. Se puede definir una transformación lineal asociada a A :

$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad T(x) = Ax$$

Observación: Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{\cdot m} \end{bmatrix}$, entonces

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$$

$$T(x) = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \, A_{\cdot \mathbf{i}}$$

El rango de A es la dimensión del espacio imagen de T.

Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal matricial:

Teorema

Para toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existe una matriz A de orden $n \times m$ tal que $T(x) = Ax$.

Observación: esta propiedad es cierta para toda transformación lineal $T : V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales de dimensión m y n respectivamente.

Sistemas lineales

Sea el sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1m}\ x_m = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2m}\ x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nm}\ x_m = b_n \end{cases}$$

se puede escribir como

$$Ax = b,$$

con $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times m$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$.

A es inv.

$Ax = b \rightarrow x = A^{-1}b$

El sistema $Ax = b$ tiene solución si y solo si b es un elemento del espacio columna de la matriz A.

Un **sistema homogéneo** $Ax = 0$ siempre tiene al menos la **solución trivial** $x = 0$. Sus soluciones forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

Dado un sistema **compatible** $Ax = b$, su **conjunto solución** es $\bar{x} + S$, donde S es el espacio solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ y $\bar{x}$ es una solución particular.

$Ax = 0$

$x = x^h + \bar{x}$

Teorema

La dimensión del espacio solución del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ *es* $m - \rho(A)$.

Corolario

Un sistema cuadrado $Ax = b$, $(m = n)$, *tiene solución única si y solo si* $\rho(A) = n$.

Teorema

Si A es inversible, entonces todo sistema $Ax = b$ tiene una única solución dada por

$$\bar{x} = A^{-1}b.$$

Determinantes de matrices

Definimos **determinante** de matrices cuadradas A, $\det(A) = |A|$, en forma inductiva sobre el orden n de la matriz:

$$n = 1, \quad A = [a], \quad \det(A) = a \quad .$$

Supongamos $\det(A)$ definido para matrices cuadradas de orden $n-1$.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n. Sea A_{1j} la sub-matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida de eliminar la fila 1 y la columna j de A. Entonces

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \; a_{1j} \; |A_{1j}| .$$

$M_{1j} := |A_{1j}|$ es el **menor** correspondiente a a_{1j}.
$C_{1j} := (-1)^{1+j} |A_{1j}|$ es el **cofactor** de a_{1j} .

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \; C_{1j}.$$

Propiedad

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n. Sea A_{ij} la sub-matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida de eliminar la fila i y la columna j de A. Entonces

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; a_{ij} \; |A_{ij}| .$$

$M_{ij} := |A_{ij}|$ es el **menor** correspondiente a a_{ij}.
$C_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ es el **cofactor** de a_{ij} .

Desarrollo de Laplace:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; C_{ij}.$$

Propiedades de determinantes

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n.

1. $\det(A) = \det(A')$ Luego toda propiedad de determinantes referida a filas de una matriz también es válida para columnas.
2. Si B es la matriz obtenida de A intercambiando dos de sus filas, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
3. Si B es la matriz obtenida de A multiplicando una de sus filas por un escalar α, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.
4. Si A, B y C son tres matrices de orden n tales que la fila i de A es la suma de las filas i de B y de C, mientras que todas las demás filas coinciden, entonces $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.
5. $\det(\mathrm{I}) = 1$.
6. Si A es una matriz triangular, en particular diagonal, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.
7. Si B es una matriz cuadrada de orden n, entonces $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Son equivalentes:

(i) A *es no singular.*

(ii) $\rho(A) = n$.

(iii) $\det(A) \neq 0$.

Propiedad

Si A es inversible, entonces $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

Valores propios y vectores propios

De aquí en adelante las matrices que se indiquen serán cuadradas de orden $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo F .
Asimismo, a menos que se especifique lo contrario, todo vector será un vector (columna) de F^n .

Definición

Un escalar λ es un **valor propio** *(o* **valor característico** *o* **autovalor***) de una matriz A si existe un vector no nulo x tal que*

$$Ax = \lambda x.$$

Definición

Un vector x es un vector propio (o vector característico o autovector) de una matriz A si existe un escalar λ tal que $Ax = \lambda x$. Si $x \neq 0$ se dice que x es un vector propio correspondiente al valor propio λ.

Conexión entre ecuaciones diferenciales y autovalores

Recordemos la ecuación diferencial de segundo orden para el sistema masa-resorte:

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0.$$

Realizando el cambio de variables $x = y'$, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}x. \end{cases}$$

Este es un sistema plano de ecuaciones diferenciales, que puede escribirse en la forma:

$$X'(t) = AX(t),$$

donde

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

$Av = \lambda v$ vector propio

valor propio

Sea v un vector propio de A con valor propio λ. Entonces, la función vectorial

$$X(t) = e^{\lambda t} v \in \mathbb{R}^2$$

es solución del sistema anterior, ya que

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t} v) = AX(t).$$

Recordando que toda matriz representa una transformación lineal, es dable esperar que exista una definición similar para operadores, o sea para transformaciones lineales de un espacio vectorial sobre sí mismo.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea

$$T : V \to V$$

un operador de V. Se dice que un vector $v \in V$ es un vector propio de T si existe $\lambda \in F$ tal que

$$Tv = \lambda v.$$

Si $v \neq 0$ se dice que λ es un valor propio de T.

Nota: Algunos autores exigen en la definición de vector propio que sea un vector no nulo.

Ejemplo

Sea $V = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *infinitamente derivables. Sea* D *el operador diferencial*

$$D : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$$
$$D(f) = f'.$$

La función $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *definida por* $f(t) = e^{\lambda t}$ *es un vector propio correspondiente al valor propio* λ*, para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *. En efecto*

$$D(f)(t) = f'(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *.*

Ejemplo

Sea la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Todo vector canónico $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)'$, $i = 1, 2, ..., n$, *es un vector propio ya que*

$$Ae_i = d_i e_i$$

y los escalares $d_1, ..., d_n$ *son valores propios de* A.

Propiedades de valores y vectores propios

Se desarrollarán en el contexto más amplio de operadores, pero son válidas si se reemplazan estos últimos por matrices.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea $A : V \to V$ un operador. Sea λ un valor propio de A y sea V_λ el subespacio de V generado por los vectores propios de A correspondientes a λ . Entonces todo elemento no nulo de V_λ es un vector propio de A correspondiente a λ como valor propio.

Demostración: Esbozo: si

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i$$

entonces

$$Av = A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \; Av_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \; \lambda v_i = \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \; v_i = \lambda v.$$

Definición

Al subespacio V_λ se lo conoce como espacio propio (o espacio característico) de A correspondiente a λ.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea $A : V \to V$ un operador. Si $v_1, v_2, ..., v_m$ son vectores propios de A correspondientes a diferentes valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, entonces los vectores $v_1, v_2, ..., v_m$ son linealmente independientes.

Demostración: Por inducción sobre m.

Ejemplo

Sea V el espacio vectorial complejo de las funciones infinitamente derivables. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$ distintos entre sí. Las funciones dadas por

$$e^{-\alpha_1 t}, \ \dots \ , e^{-\alpha_m t}$$

son vectores propios del operador derivada, con valores propios distintos $\alpha_1, ..., \alpha_m$, por lo tanto son linealmente independientes.

En Análisis Matemático son muy utilizadas las funciones definidas por

$$e^{2\pi i n t} = \cos 2\pi n t + i \operatorname{sen} 2\pi n t \ , n \in \mathbb{N}.$$

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F y sea $\lambda \in F$. Sea $A : V \to V$ un operador. Entonces λ es un valor propio de A si y solo si el operador $\lambda \mathtt{I} - A$ es singular, esto es no es invertible.

Corolario

Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en un cuerpo F, entonces $\lambda \in F$ es un valor propio de A si y solo si $\det(\lambda \mathtt{I} - A) = 0$.

Polinomio característico

Definición

Si A es una matriz cuadrada de orden n con coeficientes en un cuerpo F, su polinomio característico, P_A, es el determinante

$$P_A(t) := \det(t\mathrm{I} - A).$$

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *es*

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - t^2 + t - 1.$$

Obsérvese que siempre el polinomio característico es mónico y de grado n.

Teorema

Sea A una matriz de orden n en un cuerpo F y sea $\lambda \in F$. Entonces λ es un valor propio de A si y solo si λ es una raíz del polinomio característico de A.

Forma diagonal de una matriz

Ejemplo

Dada la matriz real diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

su polinomio característico es

$$P_A(t) = \det(t\mathrm{I} - A) = (t-3)(t-1)(t-2)$$

y sus valores propios son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$*; es decir los valores propios de A son los elementos de su diagonal. Los vectores canónicos* e_1, e_2, e_3 *son vectores propios no nulos de A.*

Este ejemplo en que se pueden hallar los valores y vectores propios por simple inspección (¡sin necesidad de cálculo alguno!) motiva el tema de esta sección: transformar A en una matriz diagonal sin cambiar sus valores propios.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes en un cuerpo F . Supóngase que A tiene n vectores propios linealmente independientes, $x_1, ..., x_n$. Si S es la matriz que tiene como columnas estos vectores, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal D, con los valores propios de A, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, en su diagonal

$$S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Corolario

Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes en un cuerpo F y supóngase que A tiene n valores propios distintos entre sí en F. Entonces existe una matriz no singular S con coeficientes en F tal que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal, es decir A es diagonalizable.

- La matriz invertible S no es única. En primer lugar, un vector propio puede multiplicarse por un escalar no nulo y seguir siendo un vector propio. Además los valores propios repetidos dan aún más libertad.

- El recíproco del Teorema anterior es también válido; de hecho se tiene:

Teorema

Una matriz A cuadrada de orden n con coeficientes en un cuerpo F es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

No todas las matrices poseen n vectores propios linealmente independientes y, por lo tanto, no todas las matrices son diagonalizables. El ejemplo más común es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ya que es triangular. Para hallar sus vectores propios:

$$(\lambda_i \mathrm{I} - A)\, x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Esto muestra que, a pesar de que $\lambda = 0$ es un valor propio doble (su multiplicidad algebraica es 2), su correspondiente espacio característico tiene dimensión 1 (la "multiplicidad geométrica" de este valor propio es 1)

Algunas matrices con valores propios repetidos pueden diagonalizarse.

El criterio es calcular todos los vectores propios y ver si hay "suficientes":

Si los valores propios son distintos no hay dificultad alguna.

Si, en cambio, algún valor propio tiene multiplicidad algebraica m mayor que 1, entonces se debe estudiar la dimensión del espacio característico (la que se puede considerar como una "multiplicidad geométrica"). Si esta es también igual a m, tampoco habrá dificultad. En particular esta es la situación en el caso de matrices simétricas reales.

De la demostración del Teorema anterior se deduce que:

- las columnas de la matriz S que diagonaliza a A son siempre vectores propios de A,
- la diagonal de D está formada por los valores propios de A,
- el orden de aparición de los valores propios en A y de sus correspondientes vectores propios en S es el mismo.

Matriz no diagonalizable. Forma canónica de Jordan.

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A es no diagonalizable.

Autovector generalizado: $(A - 3\ I)\ v_2 = v_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = J$$

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A es no diagonalizable.

Autovector generalizado: $(A - 3\ I)\ v_3 = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = J$$

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A es no diagonalizable.

Autovectores generalizados: $(A - \lambda\ I)\ v_2 = v_1, \qquad (A - \lambda\ I)\ v_3 = v_2$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}\ A\ M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J$$

Teorema (forma canónica de Jordan)

Sea A una matriz real $n \times n$. Existe una matriz M inversible tal que

$$MAM^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

donde J_i son matrices cuadradas y tiene la forma

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} C_2 & I_2 & & & \\ & C_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & C_2 \end{pmatrix}$$

con

$$C_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Algoritmo para encontrar M y J

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.

Algoritmo para encontrar M y J

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.
- Si $\delta_2 > \delta_1$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$ tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(2)} = V_j^{(1)}$$

tenga $\delta_2 - \delta_1$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(2)}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$.

Algoritmo para encontrar M y J

Sea

$$\delta_k = \dim \ker (A - \lambda I)^k.$$

- Encontrar una base $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$.
- Si $\delta_2 > \delta_1$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1}$ de $\ker (A - \lambda I)$ tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(2)} = V_j^{(1)}$$

tenga $\delta_2 - \delta_1$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(2)}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$.Entonces

$$\left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2} = \left\{ V_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$$

es la base buscada para $\ker (A - \lambda I)^2$.

Algoritmo para encontrar M y J

- Si $\delta_3 > \delta_2$, elegir una nueva base $\left\{ V_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2}$ de $\ker (A - \lambda I)^2$ con $V_j^{(2)} \in span \left\{ v_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$, tal que

$$(A - \lambda I) v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

tenga $\delta_3 - \delta_2$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(3)}$, $j = 1, ..., \delta_3 - \delta_2$.

Algoritmo para encontrar M y J

- Si $\delta_3 > \delta_2$, elegir una nueva base $\left\{V_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2}$ de $\ker (A-\lambda I)^2$ con $V_j^{(2)} \in span\left\{v_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1}$, $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$, tal que

$$(A-\lambda I)v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

tenga $\delta_3 - \delta_2$ soluciones linealmente independientes $v_j^{(3)}$, $j = 1, ..., \delta_3 - \delta_2$. Si para $j = 1, ..., \delta_2 - \delta_1$,

$$V_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{\delta_2-\delta 1} c_i v_i^{(2)},$$

tomamos

$$\hat{V}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2-\delta_1} c_i V_i^{(1)}$$

y $\hat{V}_j^{(1)} = V_j^{(1)}$, para $j = \delta_2 - \delta_1 + 1, ..., \delta_1$.

Algoritmo para encontrar M y J

Luego,

$$\left\{ v_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3} = \left\{ \hat{V}_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{ V_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1} \cup \left\{ v_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3 - \delta_2}$$

es una base para $\ker (A - \lambda I)^3$.

Algoritmo para encontrar M y J

Luego,

$$\left\{v_j^{(3)}\right\}_{j=1}^{\delta_3} = \left\{\hat{V}_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{V_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1} \cup \left\{v_j^{(3)}\right\}_{j=1}^{\delta_3-\delta_2}$$

es una base para $\ker (A-\lambda I)^3$.
Continuamos este proceso hasta llegar a $\delta_k = n$ y obtener una base $\left\{v_j^{(n)}\right\}_{j=1}^{n}$ de $\mathbb{R}^n$. La matriz M es

$$M = [v_1^{(n)} \cdots v_n^{(n)}].$$

- Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se reduce a su forma canónica.

- Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se reduce a su forma canónica.

- ídem al anterior, pero para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$