UNIDAD 4: Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)
Introducción y EDO de primer orden

MATEMÁTICA PARA COMPUTACIÓN

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales

2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales

2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales
2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

$$P'(t) = kP(t)$$

Ejercicio de dinámica poblacional

$$P'(t) = kP(t)$$

Adapte este modelo a los siguientes escenarios:

1. Se agrega un crecimiento constante por inmigración.
2. Hay una tasa de natalidad y una tasa de mortalidad.
3. La natalidad es proporcional a P, la mortalidad es proporcional a P^2.
4. En una población de peces que cumple las condiones presentadas en el ítem 3, agregue una tasa constante de desaparición por ser pescados.

De Malthus a la Ecuación Logística

La ecuación de Malthus suele fallar para valores grandes de t, debido a que usualmente el crecimiento de la población se estanca a causa de la limitación de recursos.

De Malthus a la Ecuación Logística

La ecuación de Malthus suele fallar para valores grandes de t, debido a que usualmente el crecimiento de la población se estanca a causa de la limitación de recursos. **Adaptemos el modelo:** supongamos que en cierta población aislada, el número máximo de individuos que pueden vivir es K y cambiemos la constante k por una variable, que decrece linealmente a medida que la población P aumenta (debido a la competencia por recursos): $k(P) = a - bP$, con $a, b > 0$.

De Malthus a la Ecuación Logística

La ecuación de Malthus suele fallar para valores grandes de t, debido a que usualmente el crecimiento de la población se estanca a causa de la limitación de recursos. **Adaptemos el modelo:** supongamos que en cierta población aislada, el número máximo de individuos que pueden vivir es K y cambiemos la constante k por una variable, que decrece linealmente a medida que la población P aumenta (debido a la competencia por recursos): $k(P) = a - bP$, con $a, b > 0$.

1. Reemplace k por $k(P)$ en la EDO de Malthus $\frac{dP}{dt} = kP$ para obtener la EDO de la *dinámica logística*.
2. Exprese la EDO obtenida en la forma estándar

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \tag{1}$$

   interpretando las constantes r y K en términos de a y b.
3. Analice en la expresión (1) a qué tiende el valor de $\frac{dP}{dt}$ cuando $P \to 0$ y a qué tiende $\frac{dP}{dt}$ cuando $P \to K$. Interprete estos valores como tasas de crecimiento de la población.

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$: temperatura en el instante t

T_m : temperatura del medio

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$: temperatura en el instante t

T_m : temperatura del medio

$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$

Ejercicio sobre la Ley de enfriamiento-calentamiento de Newton

Dadas la ecuación

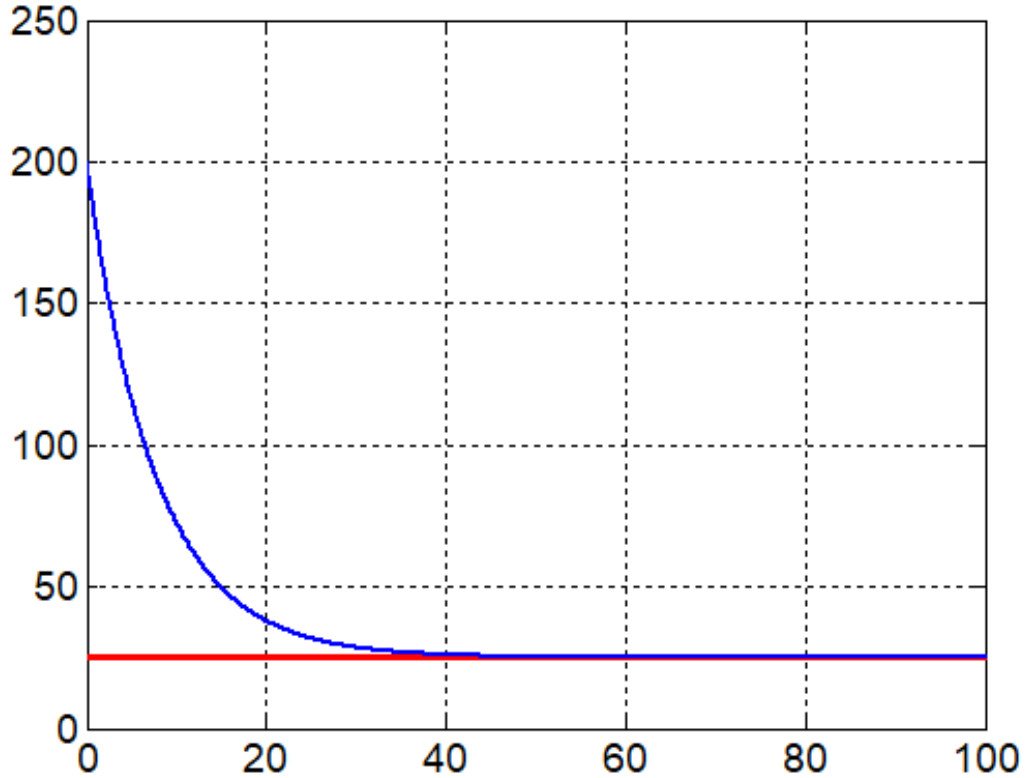
$$T'(t) = k(T(t) - T_m),$$

y el siguiente gráfico de la función T.

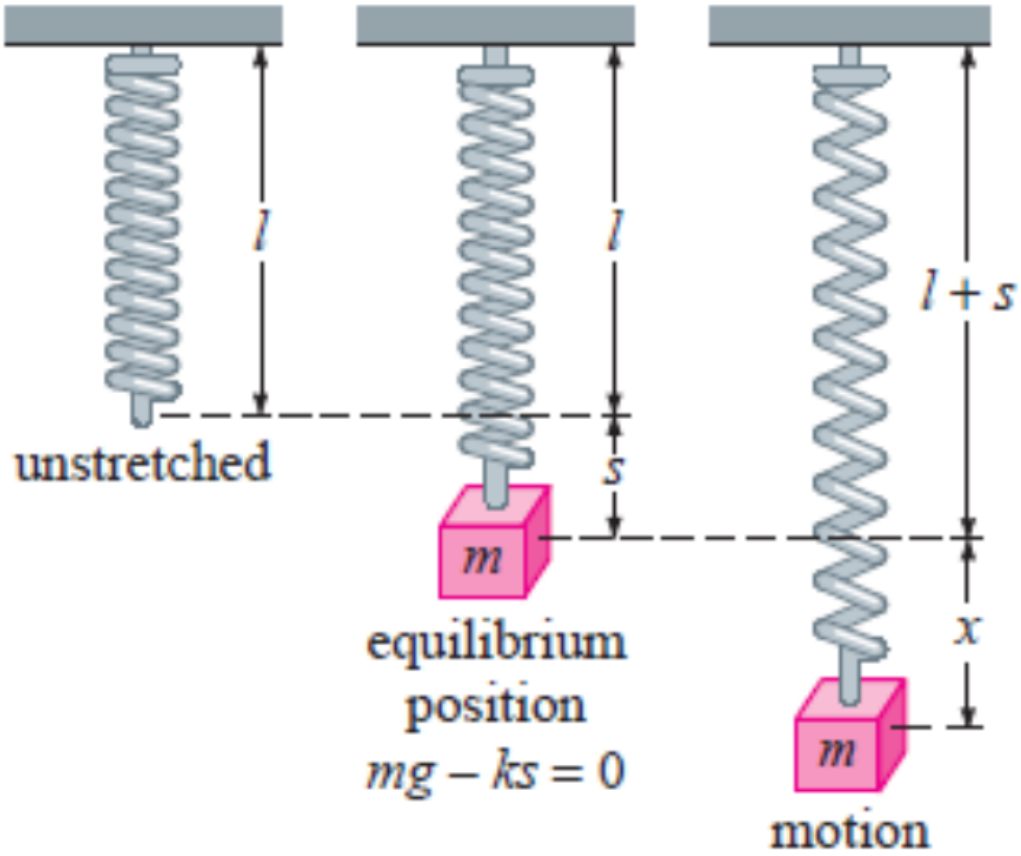
1. Reconozca:

   $T(0)$ y T_m.

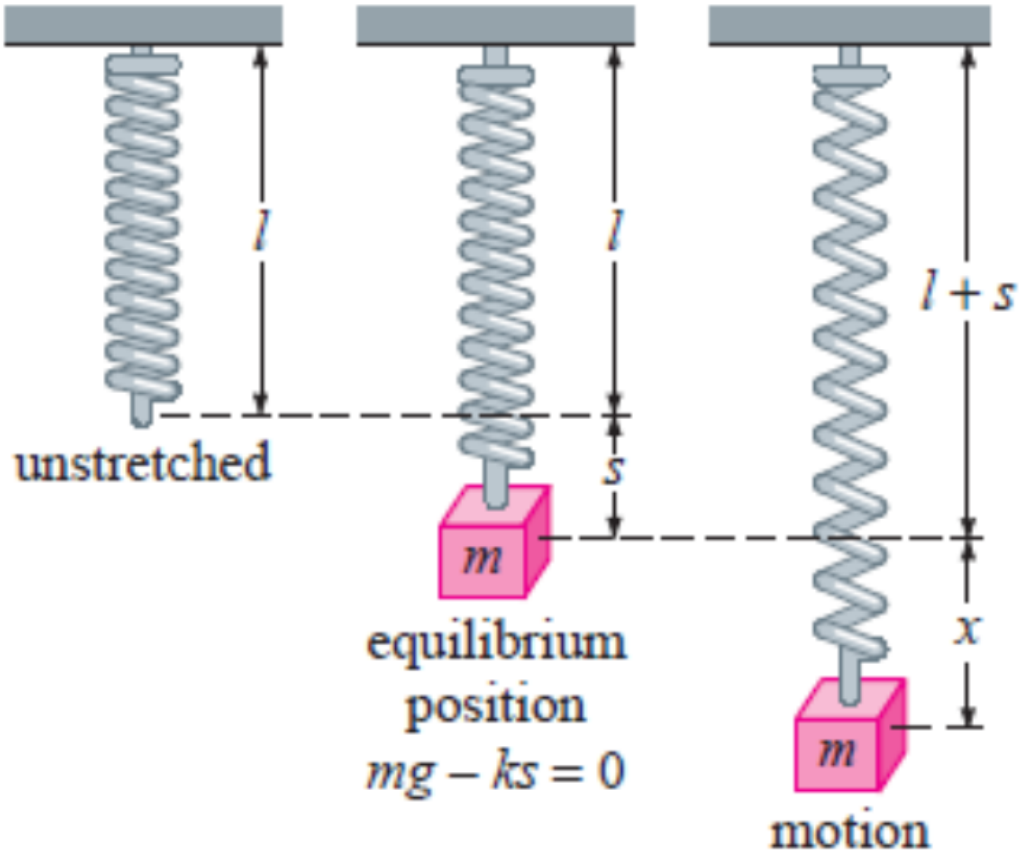
2. Indique cuál es el $\lim_{t\to\infty} T(t)$.



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

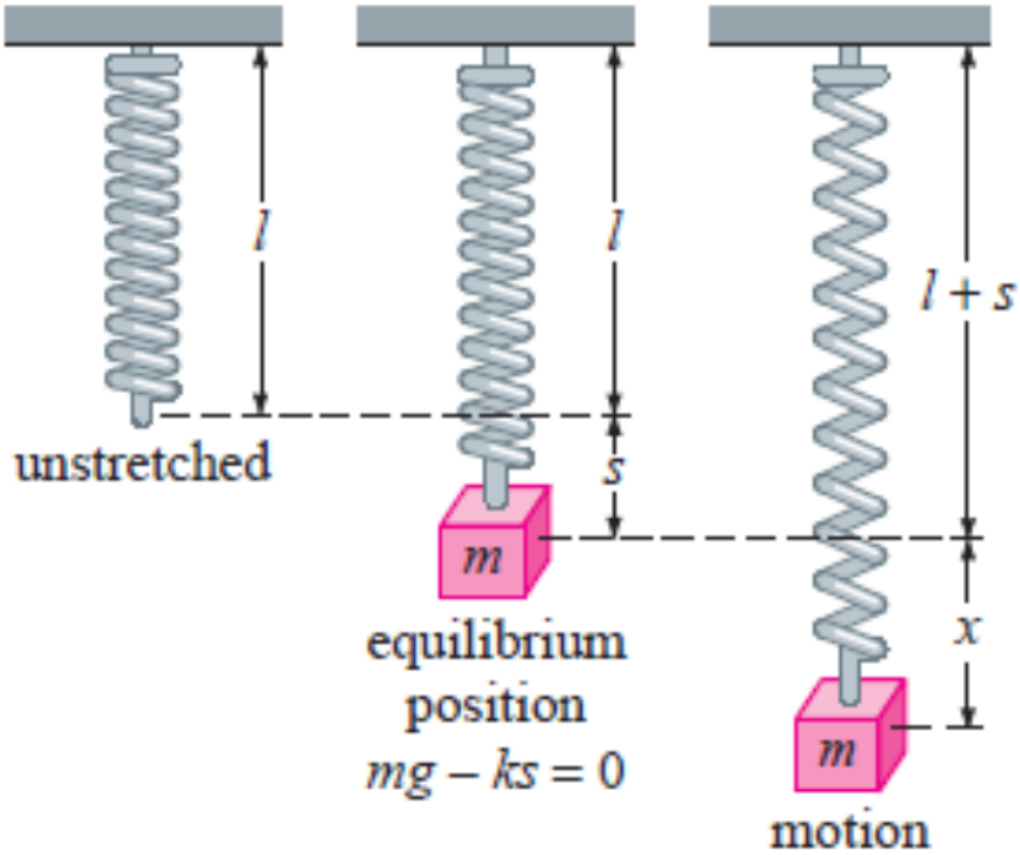
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

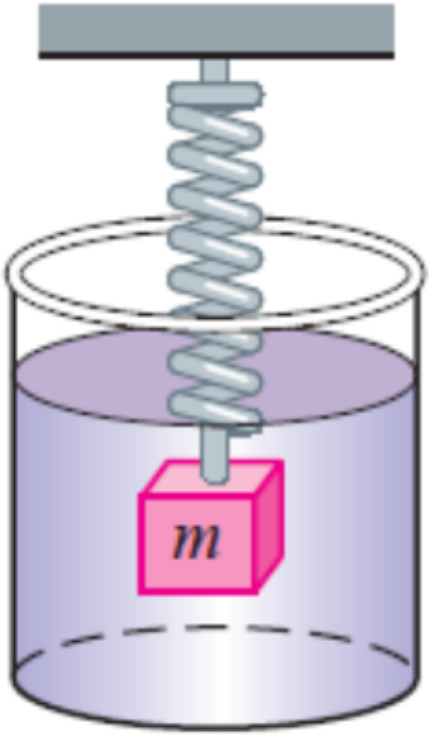
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

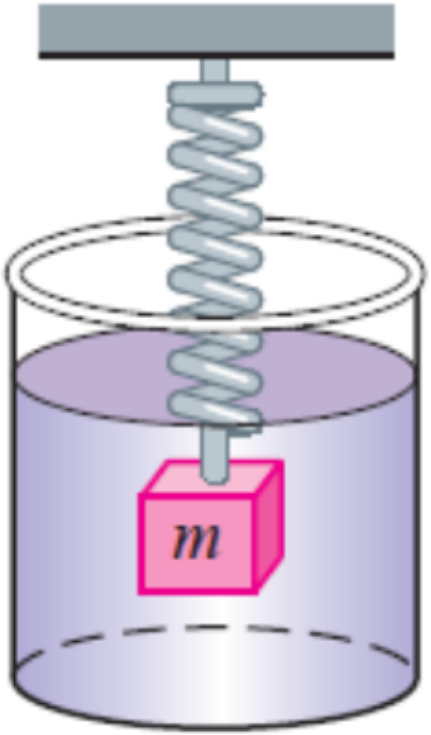
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

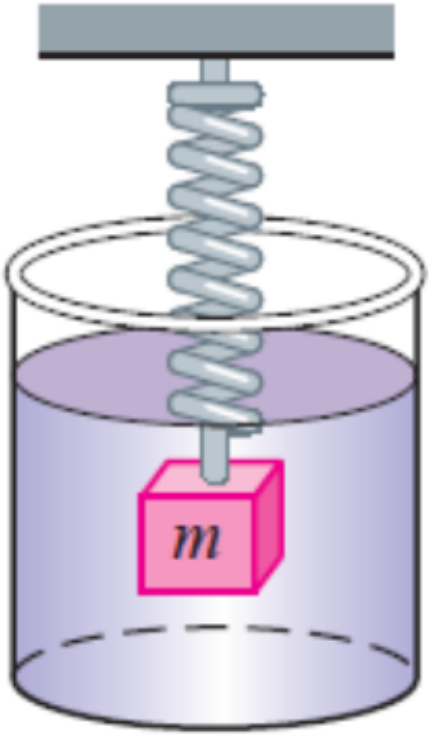
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



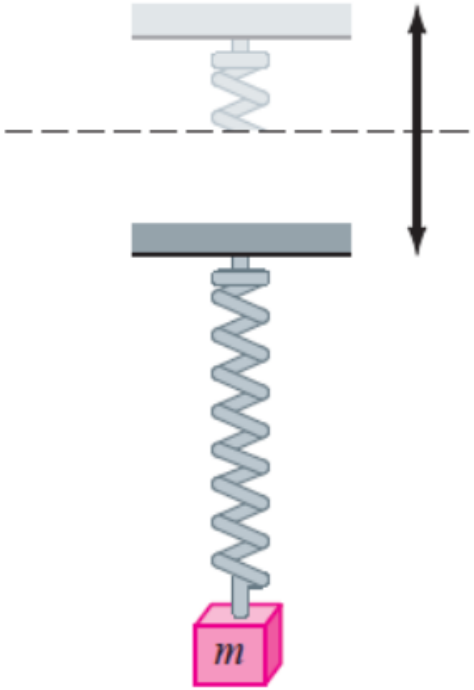
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

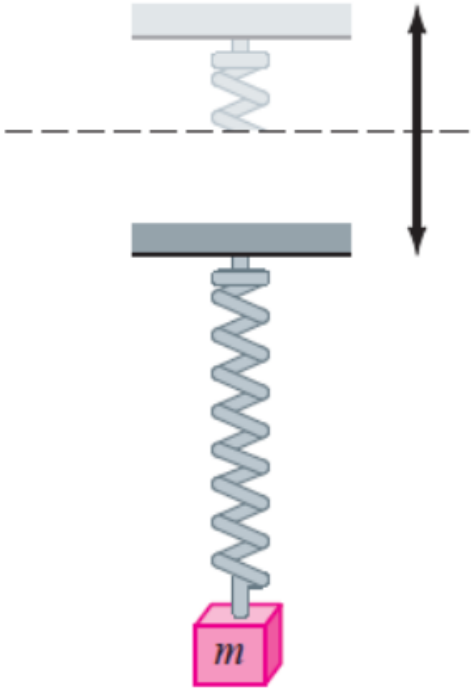
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

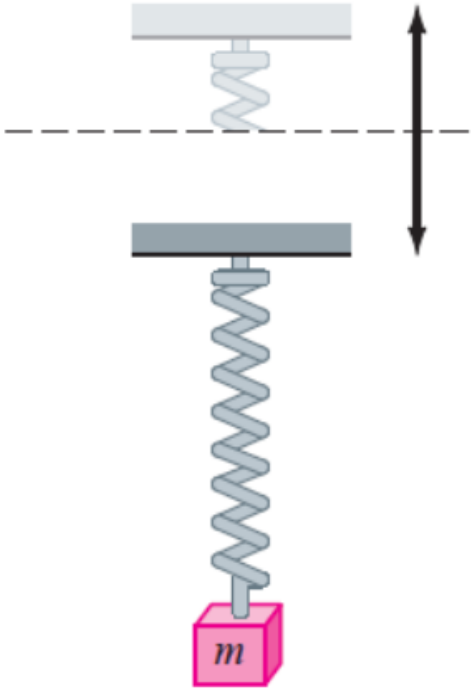
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Aplicación en Economía: modelo de Samuelson-Hicks (comparable al modelo masa-resorte)

$Y(t)$: ingreso total nacional; $C(t)$: consumo; $I(t)$: inversión; G_0: gasto público.
Relaciones:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G_0; \quad C(t) = cY(t),\ 0 < c < 1.$$

Por otra parte:
I_0: Inversión autónoma constante; $v > 0$: mide cuánto capital se requiere por unidad de aumento en la producción. $a > 0$: Coeficiente de inercia o retardo en el ajuste de capital. Así: $I(t) = I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t)$.

$$Y(t) = cY(t) + I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t) + G_0$$

$$a\,\ddot{Y}(t) - v\,\dot{Y}(t) + (1-c)\,Y(t) = I_0 + G_0.$$

Definición

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales
2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ejercicios del TP4

1. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden; distinga variable dependiente y variable independiente.

1. $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}.$
3. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10.$
4. $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy.$
5. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x.$
6. $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t.$
7. $(2x+y+1)y' = 1.$
8. $(2x+\ln x+1)y' = 1.$
9. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x.$
10. $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0.$
11. $(\operatorname{sen}\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2.$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales
2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Notación

Solemos escribir las EDO de orden n así:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{n-1}).$$

Ejemplo:

$$y'(x) = \underbrace{x\sqrt{y(x)}}_{f(x,y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = 3\,\mathrm{sen}(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $y''(x) = -y(x)$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = 3\,\mathrm{sen}(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $y''(x) = -y(x)$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, es una solución implícita de $x + yy'(x) = 0$.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejercicio

Sea la EDO $y'(x) = x\sqrt{y}$.

1. Verificar que la familia uniparamétrica

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c$$

   es una familia de soluciones de la misma.
2. ¿Qué valores puede tomar el parámetro c?
3. ¿Qué función constante es solución de la ecuación dada?
4. Dicha solución, ¿se puede encontrar dándole algún valor a c?
5. La ecuación dada, ¿tiene solución general?

Ejercicios del TP4

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la EDO dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.
   - *a)* (o) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$.
   - *b)* (r) $y' + 20y = 24;\ y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$.
   - *c)* (o) $(y - x)y' = y - x + 8;\ y = x + 4\sqrt{x+2}$.
3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la EDO dada.
   - *a)* (o) $y' = (y-1)(1-2y);\ \ln\dfrac{2y-1}{y-1} = x$.
   - *b)* (r) $2xy + (x^2 - y)y' = 0;\ -2x^2y + y^2 = 1$.
4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.
   - *a)* (o) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.
   - *b)* (r) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales
2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Problemas con valores iniciales

Definición (PVI)

Un PVI es un problema que consiste en encontrar una solución $y(x)$ de una EDO de orden n, sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones sobre $y(x)$ y/o sus derivadas.
A dichas condiciones prescritas que debe cumplir la función $y(x)$ y/o sus derivadas, se las llama condiciones iniciales.
Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas con valores iniciales

Definición (PVI)

Un PVI es un problema que consiste en encontrar una solución $y(x)$ de una EDO de orden n, sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones sobre $y(x)$ y/o sus derivadas.
A dichas condiciones prescritas que debe cumplir la función $y(x)$ y/o sus derivadas, se las llama condiciones iniciales.
Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y''(x) &= -y(x) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\, e^x$$

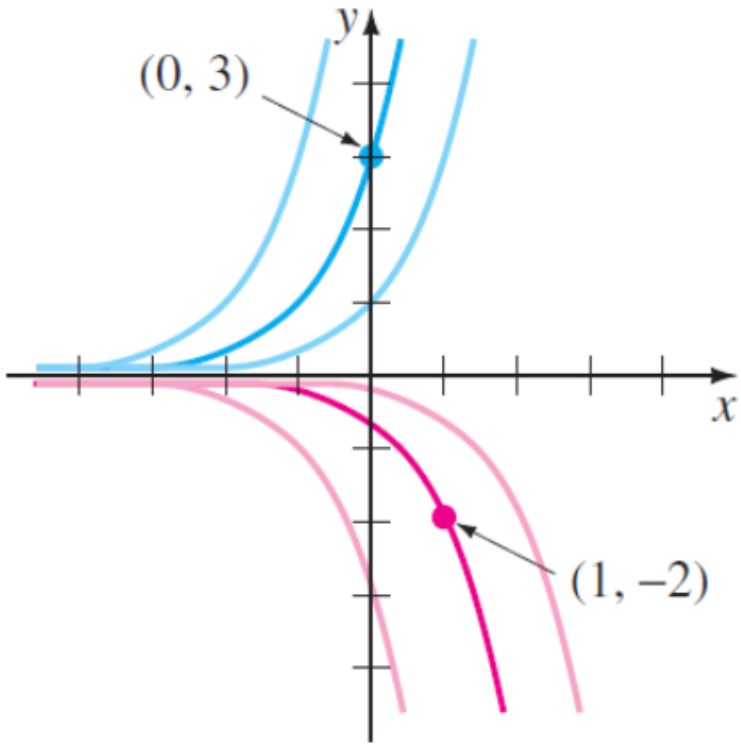
Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\,e^x$$

$$y_1(x) = 3\,e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\,e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.

Las dos soluciones del PVI:

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.

Las dos soluciones del PVI:

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4;$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.

Las dos soluciones del PVI:

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4; \qquad y(x) = 0.$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (2).

Existencia y unicidad de solución a un PVI lineal de orden n

Llamemos (3) al PVI

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \\ \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Teorema (Existencia y unicidad de solución a un PVI lineal de orden n)

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I, entonces ***existe*** *una* ***única*** *solución del PVI (3) en I.*

Sin demostrar.

Ejercicios del TP4

7. Determine los valores de los coeficientes que aparecen en la solución dada de la EDO en cada caso, para resolver el PVI o PVF, según corresponda:

a) (o) solución $y = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\, x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

c) (o) solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

Problema con valores en la frontera: PVF

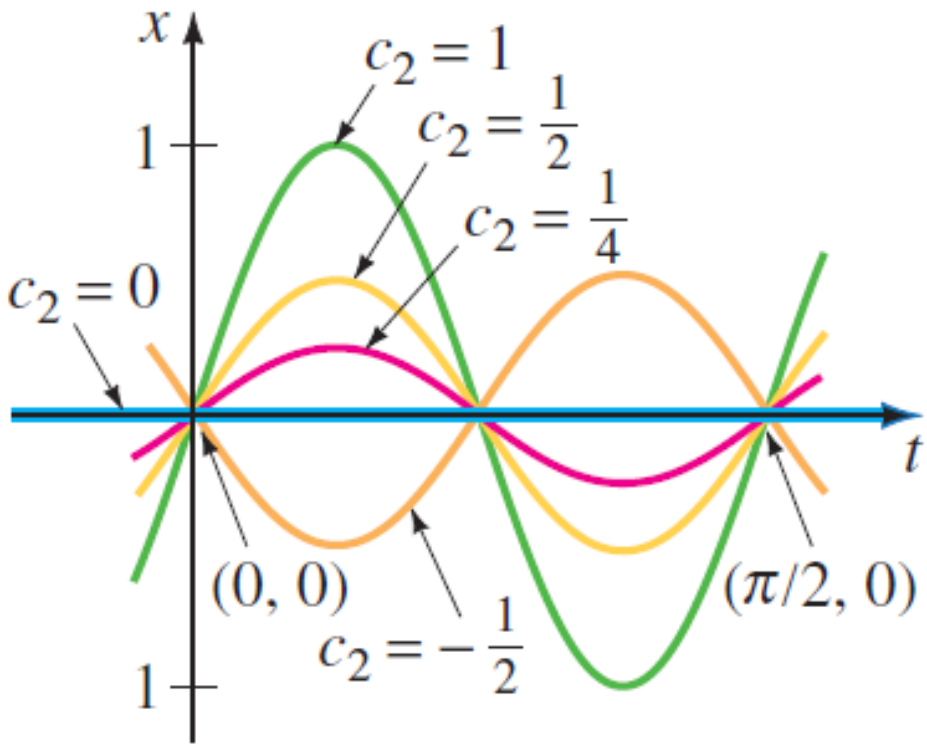
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

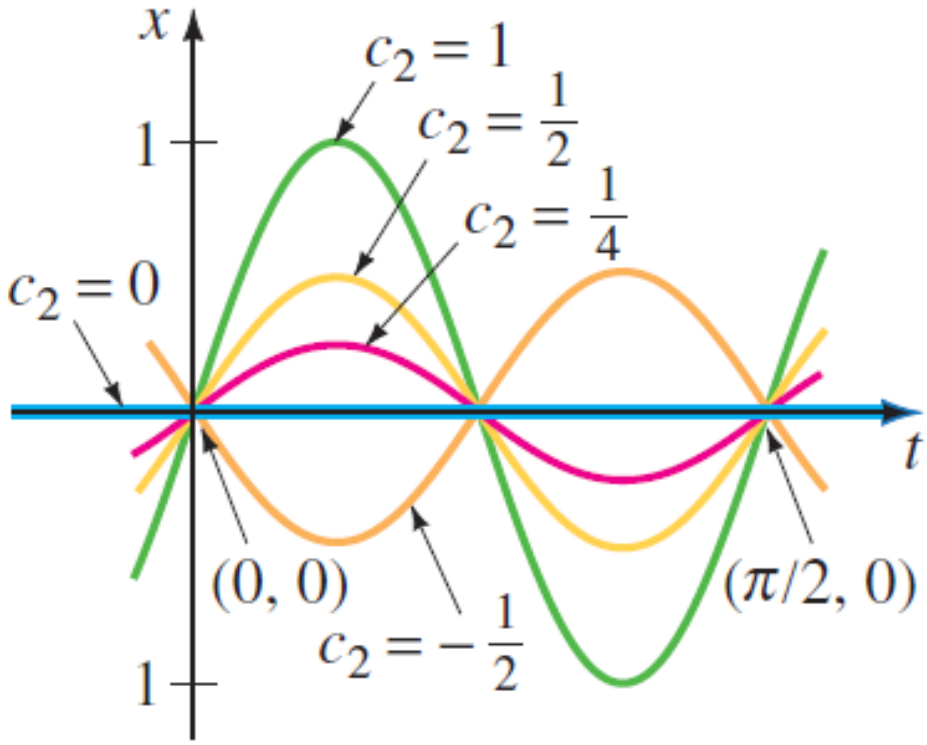
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

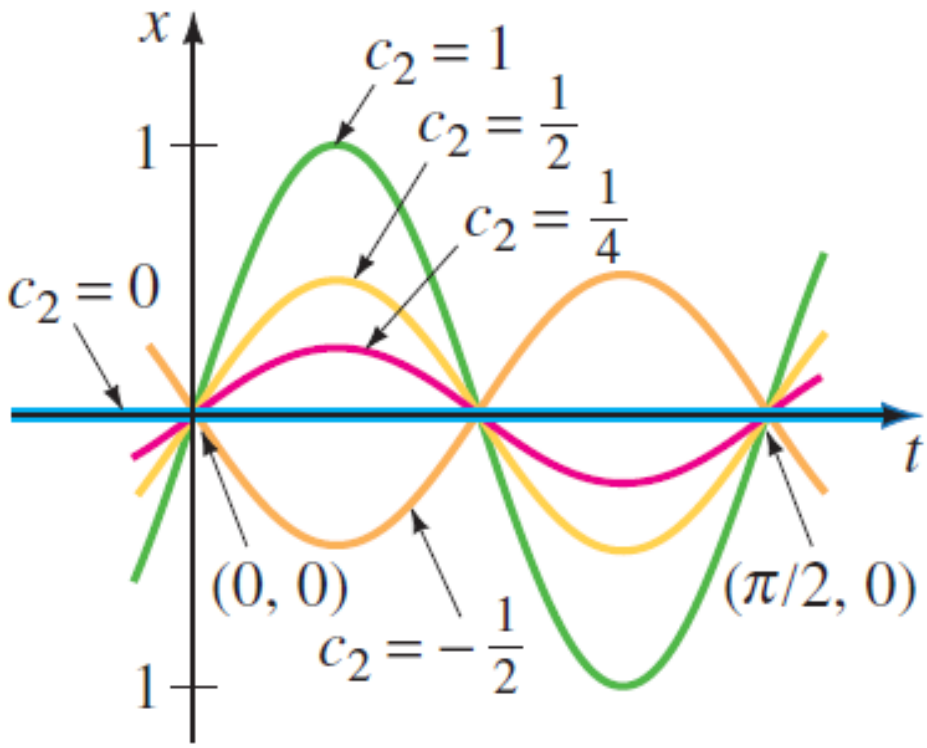


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

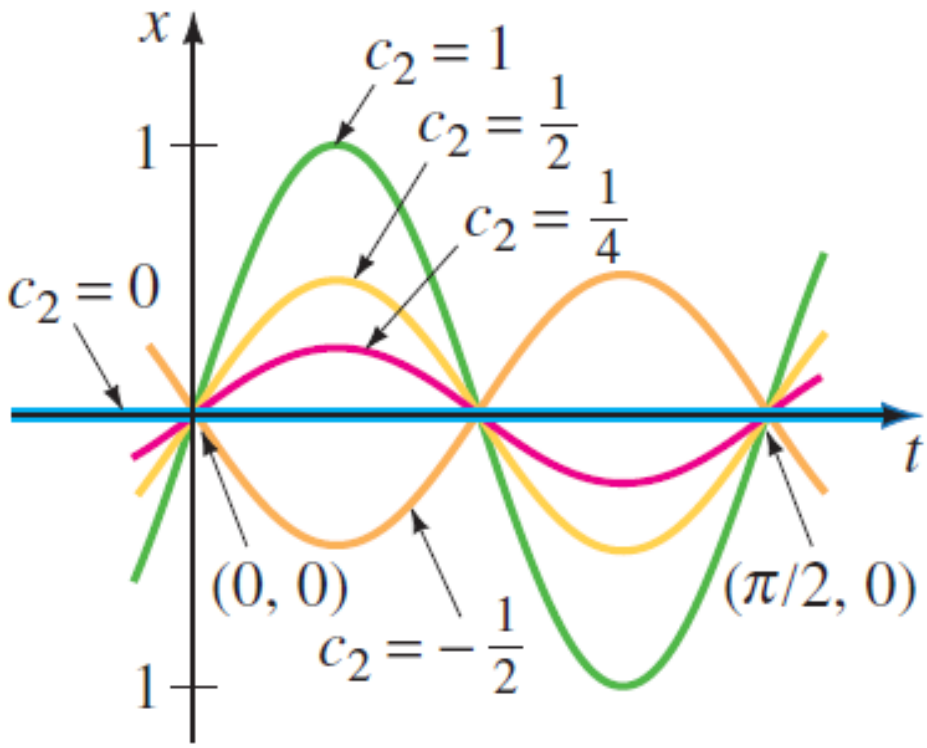


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

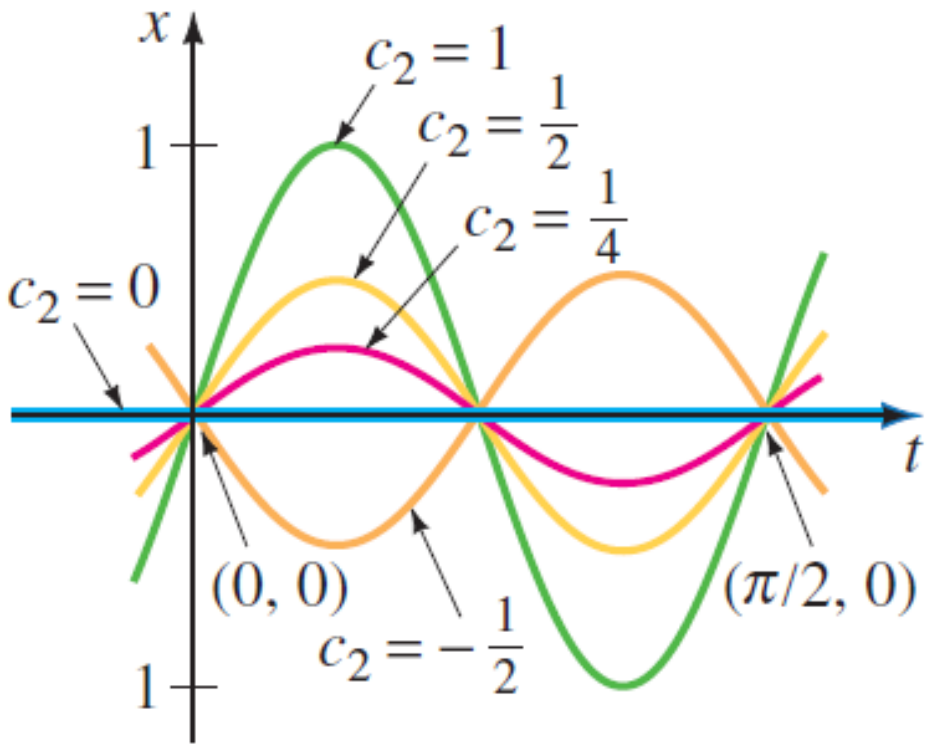


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

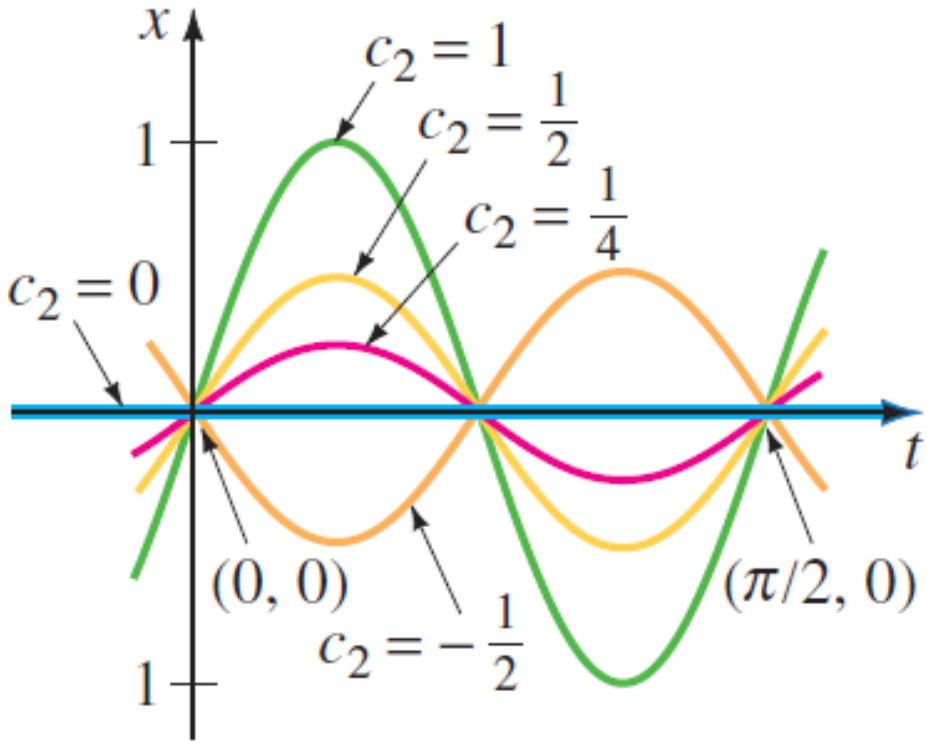


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

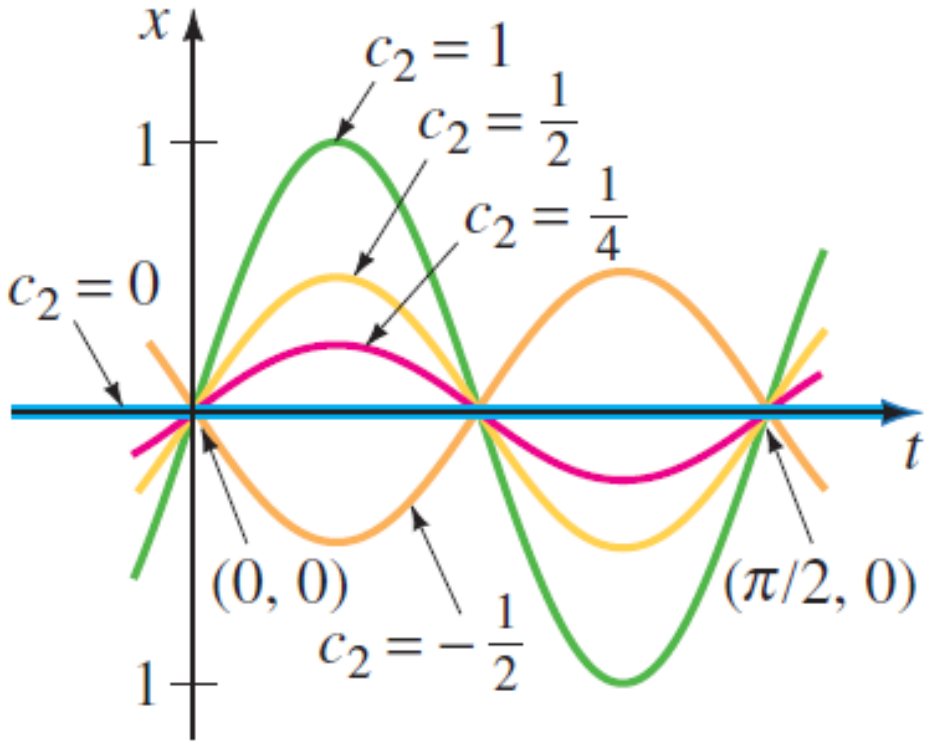
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Tiene infinitas soluciones.

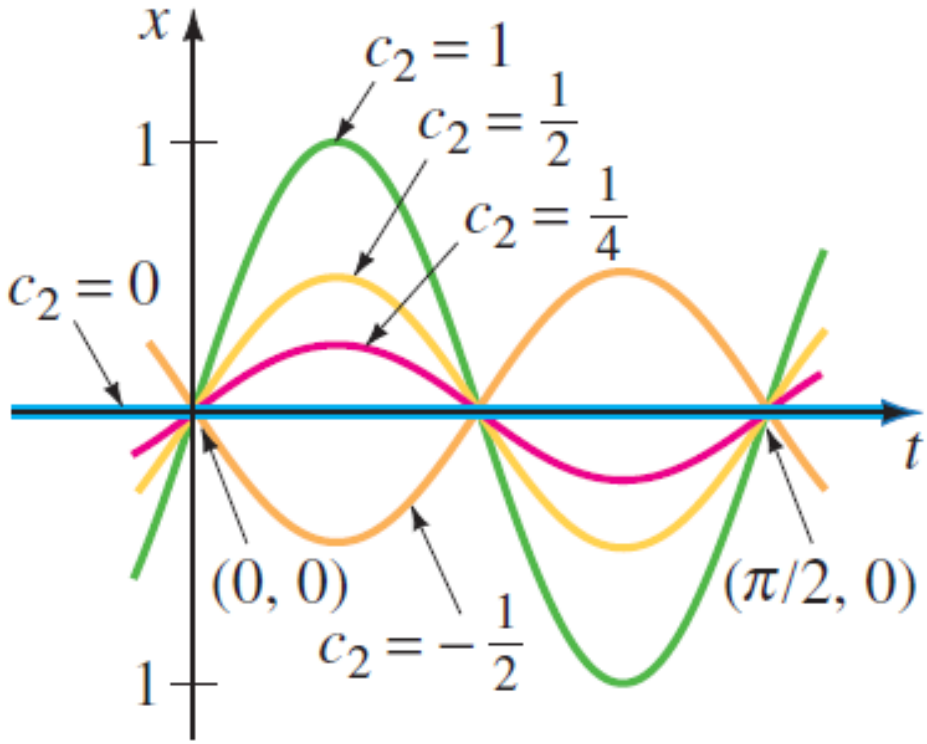
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

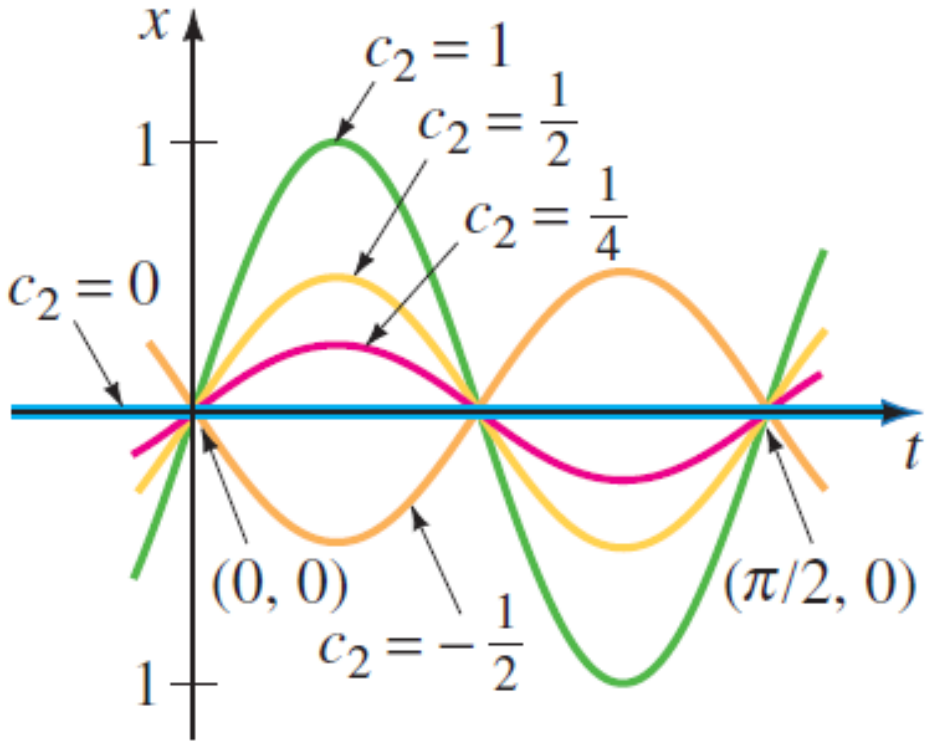
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



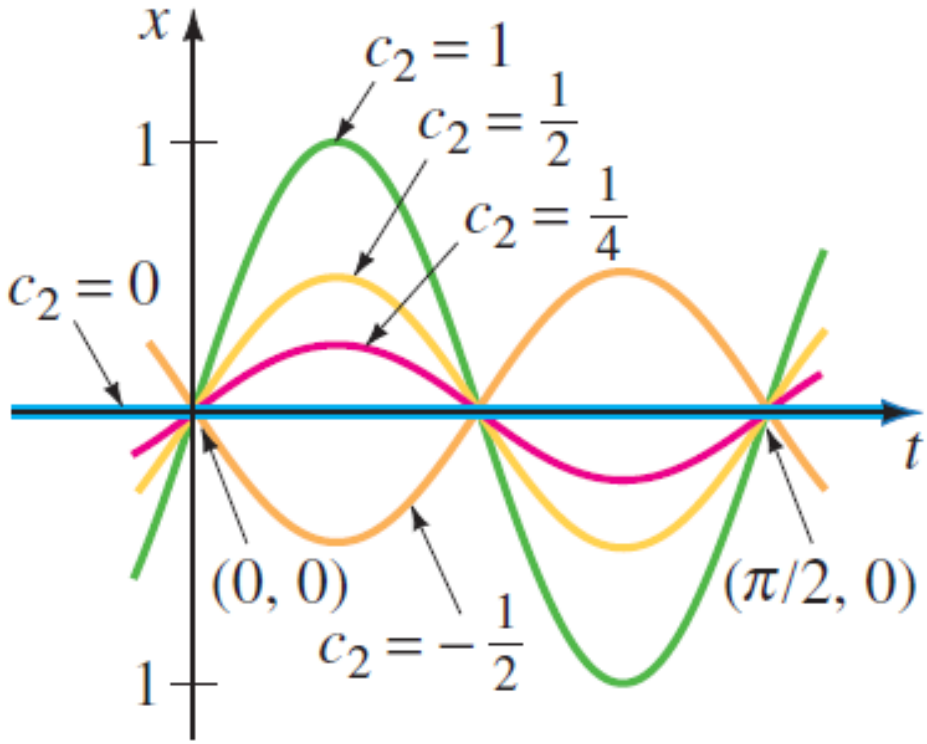
a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$.
Tiene solución única $x \equiv 0$.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

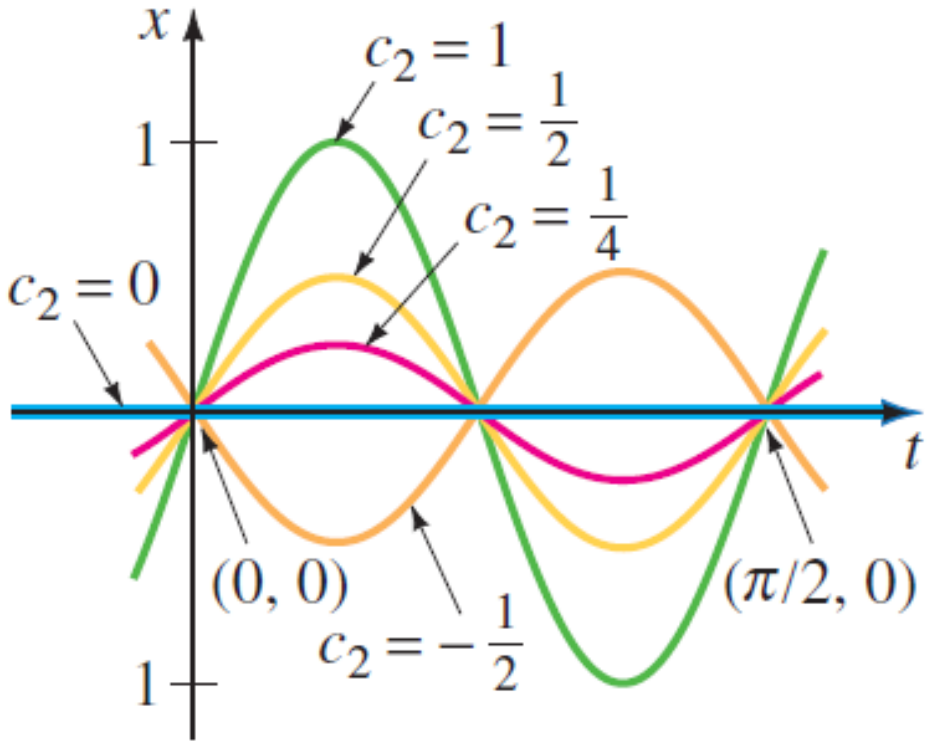
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

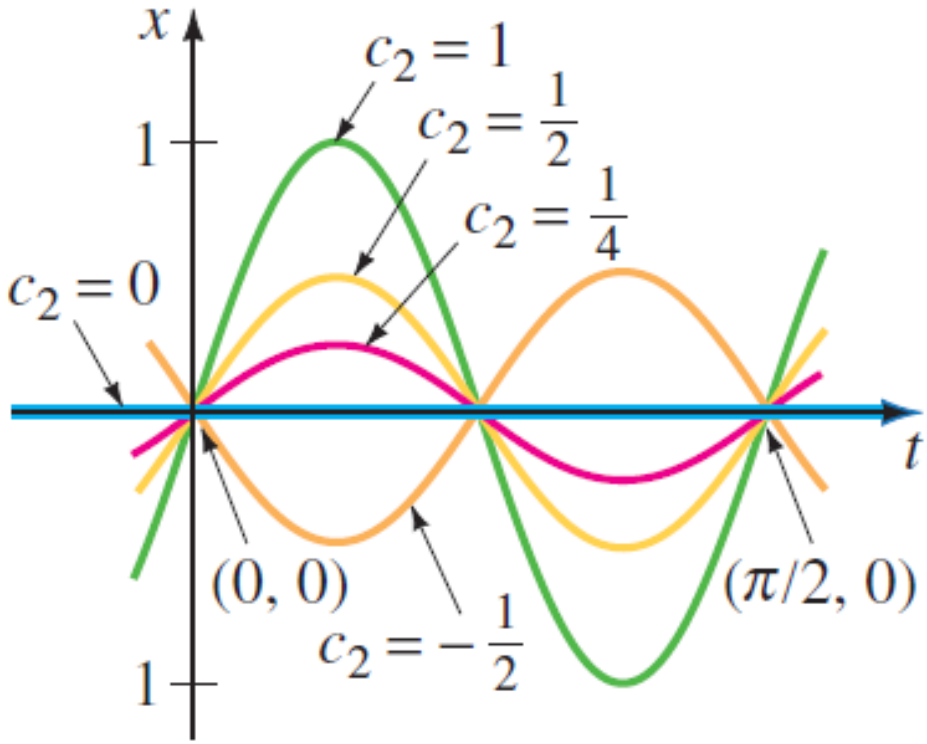
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

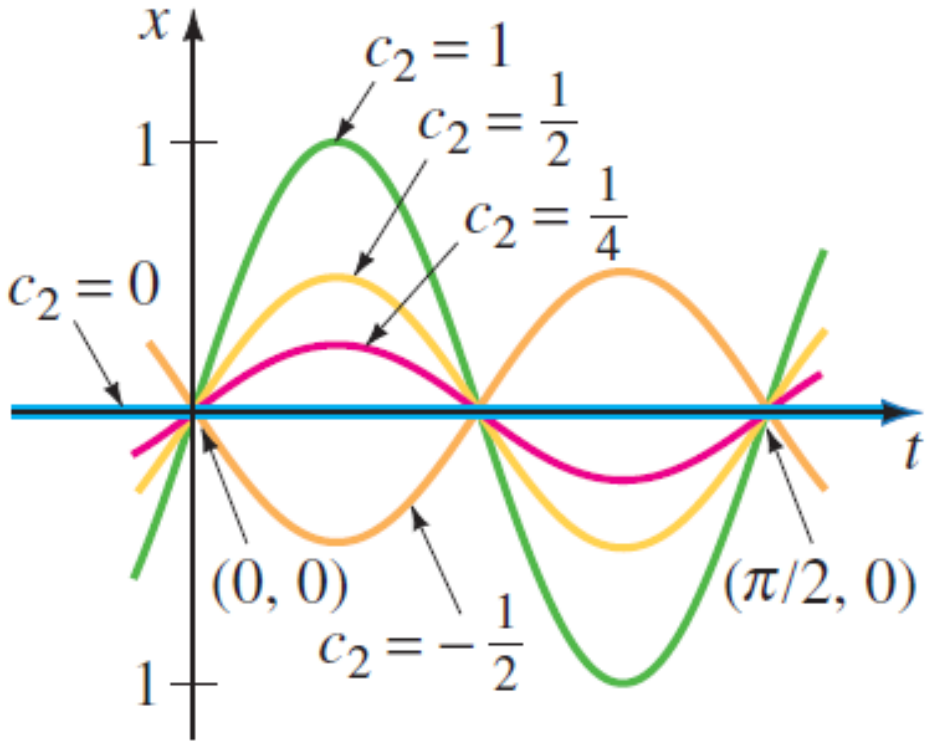
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

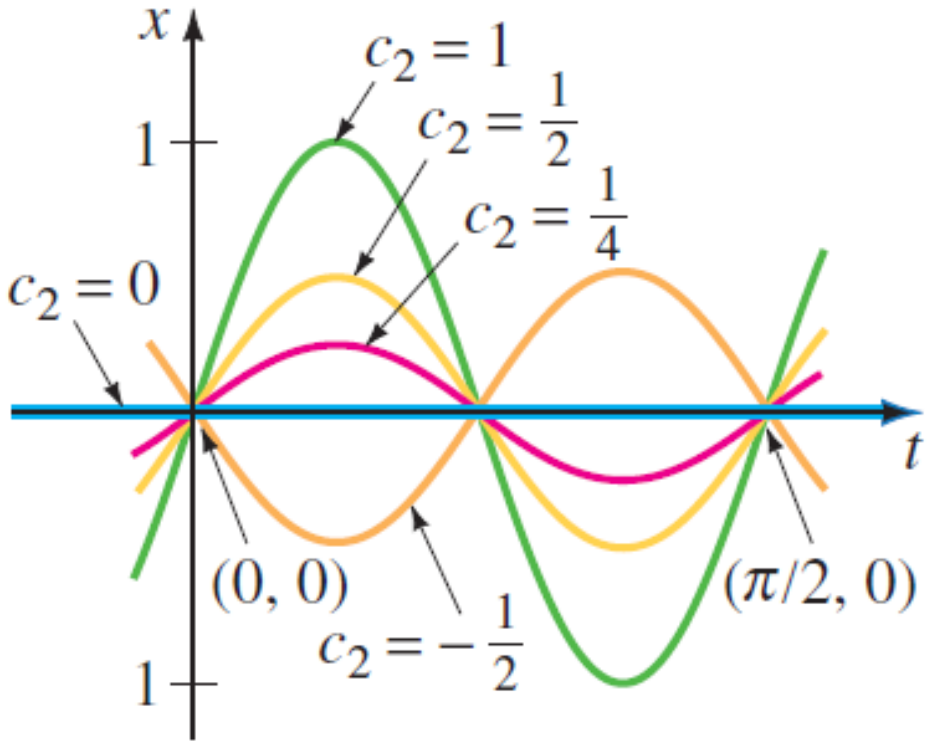
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

¿CONCLUSIÓN?

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales
2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \text{sen}(x + y)$

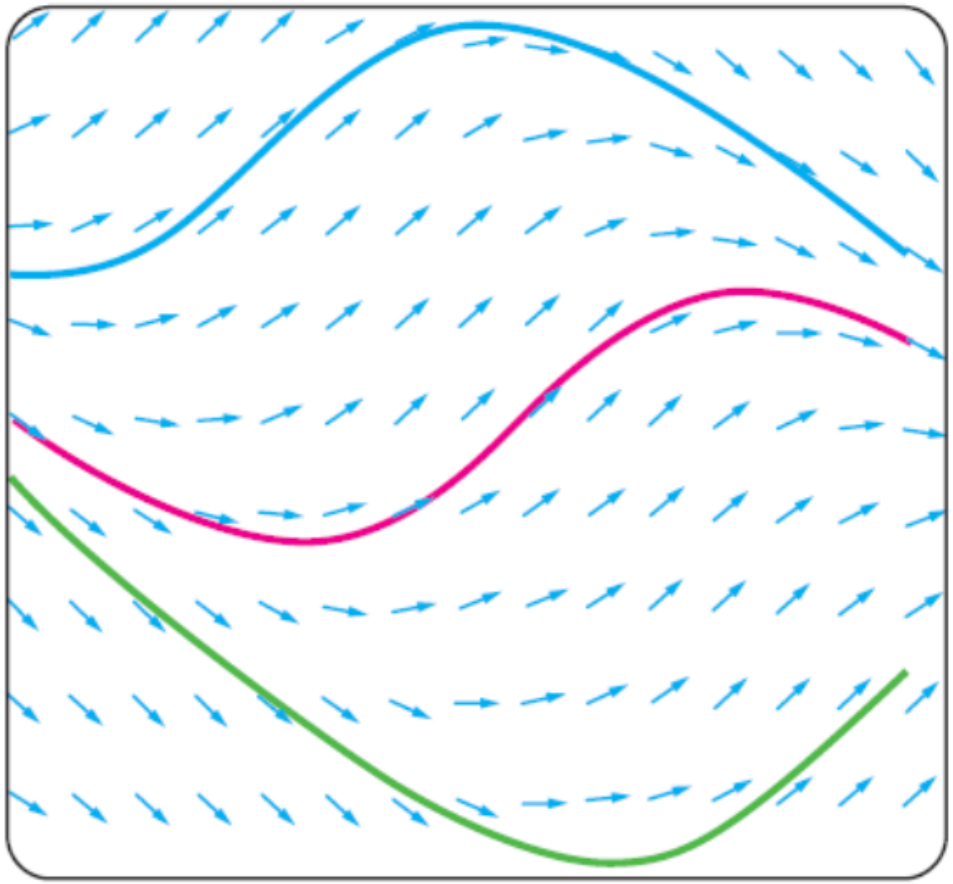
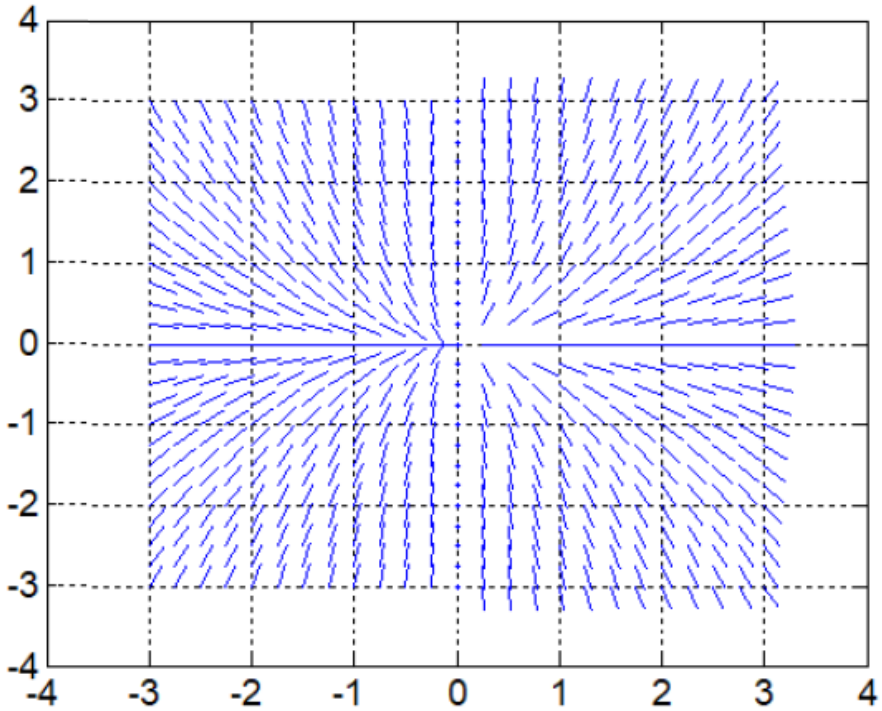


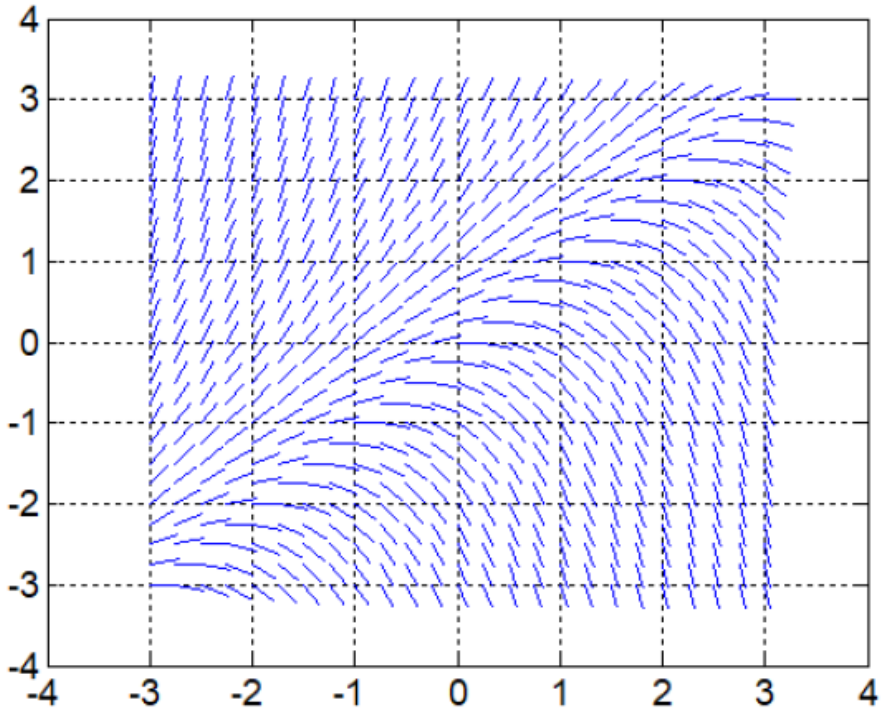
FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

Ejercicio: campos direccionales

Dadas las EDOs: $y'(t) = y(t) - t$ y $y'(t) = 2\dfrac{y(t)}{t}$,

1. Trace los diagramas de direcciones en $[-2; 2] \times [-2; 2]$.
2. Indique a cuál corresponde cada una:



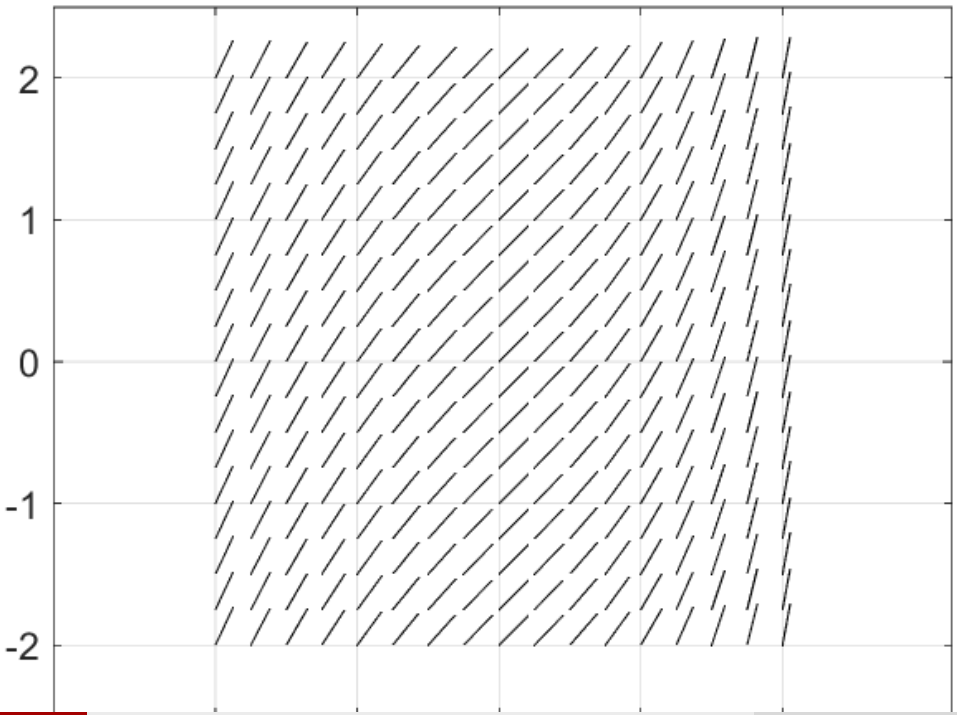


Ejercicios del TP4

8. (o) Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $e^x - x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto $(1, -\frac{1}{2})$.

a) Plantee un PVI que permita hallarla.

b) Observe el diagrama de direcciones asociado a esta EDO y note que la pendiente en cada punto no depende de la ordenada, sino solo de la abscisa del mismo. Trace la solución de este PVI en el gráfico.



Ejercicios del TP4

9. (o) La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación:

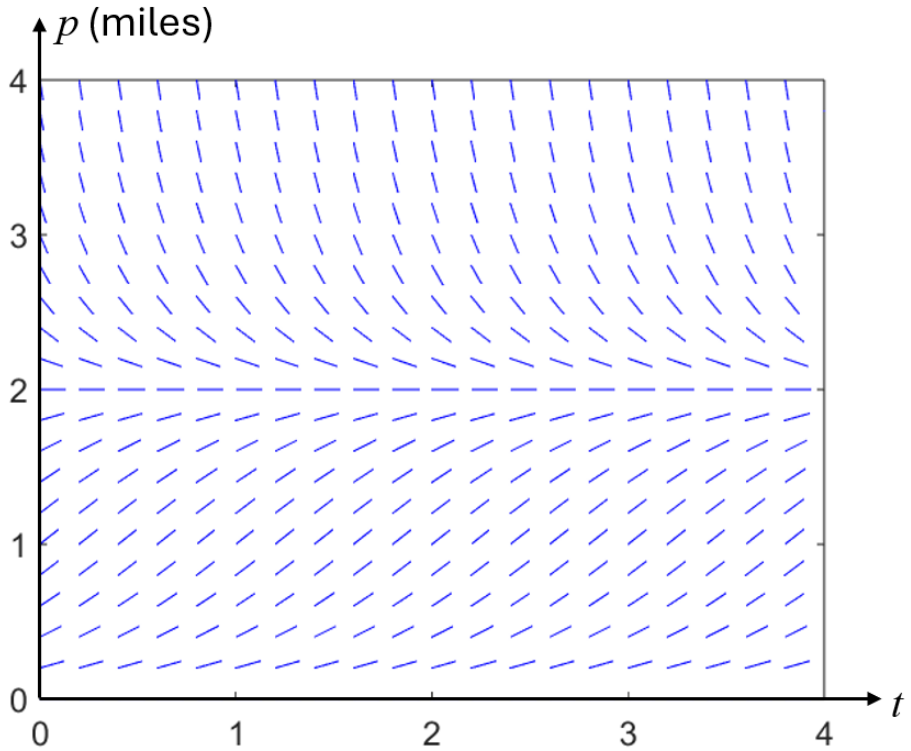
$$\frac{dp}{dt} = p\,(2 - p).$$

En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

Ejercicios del TP4

9. (o) La población p (en miles) de determinada especie en el instante t.

1. Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?
2. ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?
3. ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?



Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales

2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales

2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R};$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}; \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R};$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}.$$

Luego, la solución general de la EDO dada es:

$$y = K(x+1),\ K \in \mathbb{R}, \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\quad \text{si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\quad \text{si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

$$c = 0 \implies y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\ \text{ si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

$$c = 0 \implies y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$

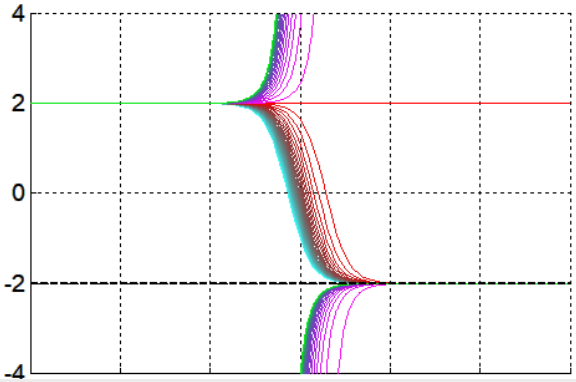
Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \implies \frac{1}{y^2-4}dy = dx \implies \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx$$

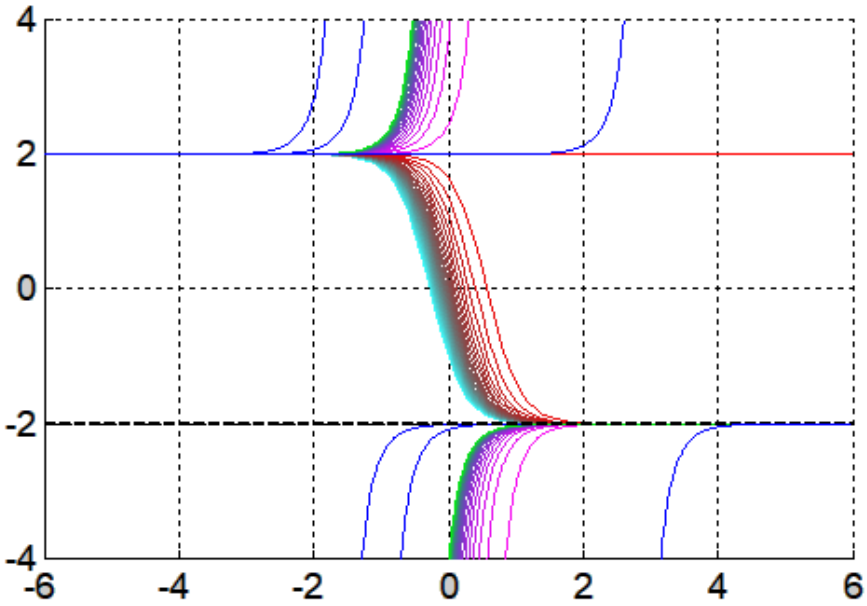
$$\frac{1}{4}\left(\ln|2-y| - \ln|2+y|\right) = x + k \implies \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+4k}$$

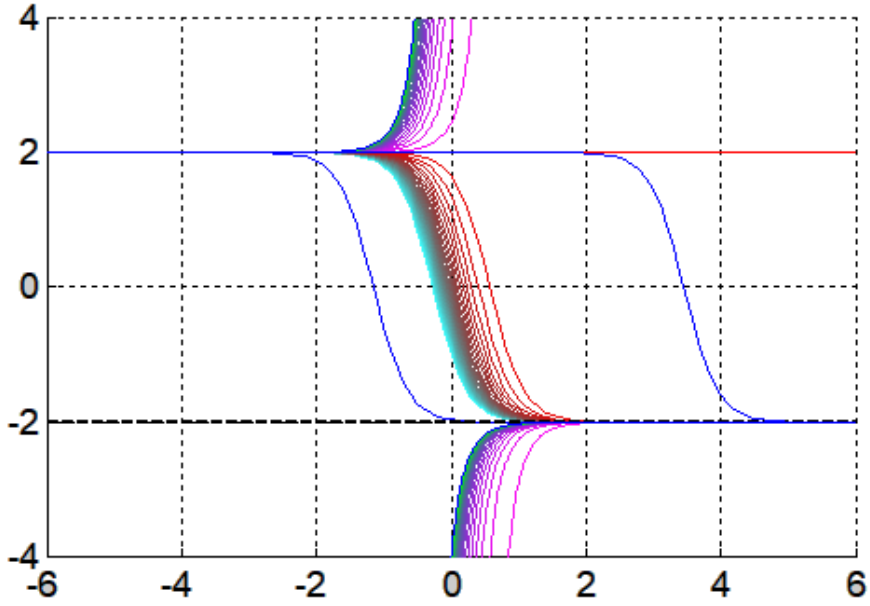
$$y = 2\,\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}},\ c \in \mathbb{R};\quad \text{si } c > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{c};$$

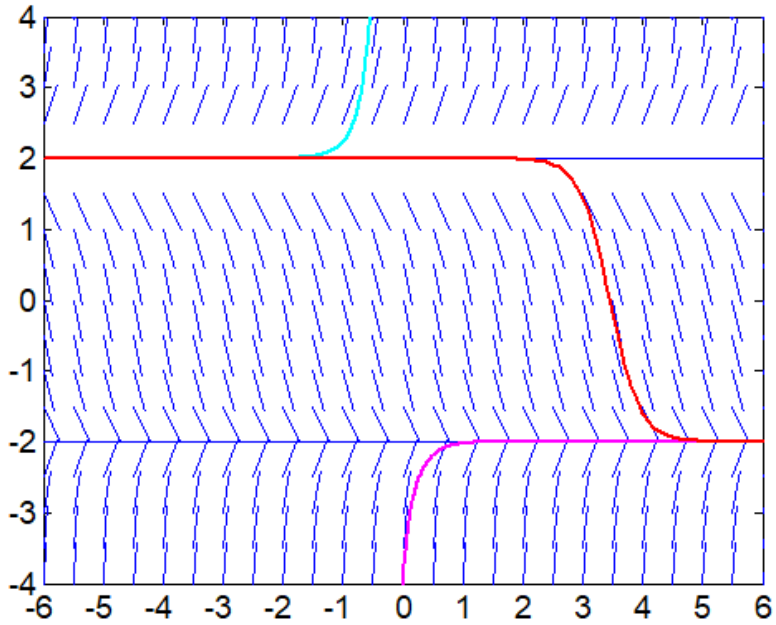
$$c = 0 \implies y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$



Pérdida de una solución







Ejercicios del TP4

11. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables, si es posible:
    b) (o) $dx + e^{3x}dy = 0$.
12. (o) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.
13. (o) Resuelva los PVIs que aparecieron en los ejercicios 8 y 9; trace las soluciones en los gráficos correspondientes y constate que coinciden con las halladas anteriormente.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Modelos matemáticos
   - Clasificación
   - Definiciones
   - PVI y PVF
   - Campos direccionales

2. Resolución de EDOs de primer orden
   - Variables separables
   - Ecuaciones lineales de primer orden

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) =$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \frac{d\mu}{dx}.$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \frac{d\mu}{dx}.$$

Obtenemos una EDO que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \frac{d\mu}{dx}.$$

Obtenemos una EDO que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \left(\mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ejemplo

Resolver:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^3 \ln(x)$$

Ejemplo

Resolver:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^3 \ln(x)$$

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)\frac{y(x)}{x} = \mu(x)x^3 \ln(x)$$

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}(xy(x)) = x^4 \ln(x)$$

$$xy(x) = \int x^4 \ln(x)\, dx$$

$$xy(x) = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

$$y(x) = \frac{x^4 \ln x}{5} - \frac{x^4}{25} + \frac{C}{x}$$

$$\mu'(x) = \mu(x)\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = x$$

Ejercicios del TP4

16. En cada caso, verifique que la ecuación diferencial dada es lineal; halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.
    - *a)* (r) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$.
    - *b)* (o) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$.
    - *c)* (r) $y' + 3x^2 y = x^2$.
17. (o) Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y,\ y(0) = 3$.