MATEMÁTICA PARA COMPUTACIÓN - 2026

Trabajo Práctico N°4:
Ecuaciones diferenciales

Consideraciones Generales: Selección de ejercicios de temas de la Unidad 4: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro *"Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera"* de Zill, D.G. y Wright, W.S. (u octava edición, Ed. Cengage Learning) y de Nagle, R.K., Saff, E.B. y Snider, A.D.

Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con el docente y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (*), que cada estudiante puede elegir si los resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

Abreviaturas usadas:

- **EDO:** Ecuación Diferencial Ordinaria.
- **PVI:** Problema de Valor/es Inicial/es.
- **PVF:** Problema de Valor/es en la Frontera.

Objetivos: al finalizar el trabajo práctico, el estudiante será capaz de:

- Clasificar ecuaciones diferenciales ordinarias según su orden, linealidad e identificación de variables dependientes e independientes, determinando la validez de soluciones explícitas e implícitas en sus respectivos intervalos de definición.
- Interpretar cualitativamente el comportamiento de soluciones de EDO de primer orden mediante diagramas direccionales, proyectando límites y dinámicas cualitativas.
- Formular y resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (separables y lineales) analizando la presencia de soluciones singulares y aplicando estos métodos a modelos de dinámica poblacional, leyes de enfriamiento/calentamiento y trayectorias.
- Analizar la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valores iniciales (PVI) y problemas de valores en la frontera (PVF) en ecuaciones lineales de orden superior, evaluando la independencia lineal de funciones mediante el Wronskiano y el conjunto fundamental de soluciones.
- Resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes utilizando los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros.
- Modelar e interpretar sistemas sistemas masa-resorte identificando estados de amortiguamiento (subamortiguado, críticamente amortiguado, sobreamortiguado), regímenes transitorios/estables y fenómenos de respuesta forzada.
- Comunicar procedimientos y fundamentaciones matemáticas con rigor técnico y lenguaje formal explícito, demostrando autonomía y compromiso ético en la resolución individual o colaborativa.

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Introducción: soluciones, PVI, PVF y diagramas de direcciones

1. (o) Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden; distinga variable dependiente y variable independiente.
   a) $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x$.
   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$.
   c) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$.
   d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$.
   e) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$.
   f) $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$.
   g) $(2x+y+1)y' = 1$.
   h) $(2x + \ln x + 1)y' = 1$.
   i) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$.
   j) $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$.
   k) $(\operatorname{sen}\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2$.
2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la EDO dada. Indique el intervalo de definición

I apropiado para cada solución.

a) (o) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$.

b) (r) $y' + 20y = 24;\ y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$.

c) (o) $(y - x)y' = y - x + 8;\ y = x + 4\sqrt{x + 2}$.

3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la EDO dada.

a) (o) $y' = (y - 1)(1 - 2y);\ \ln\dfrac{2y - 1}{y - 1} = x$.

b) (r) $2xy + (x^2 - y)y' = 0;\ -2x^2y + y^2 = 1$.

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

a) (o) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

b) (r) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$.

5. (r) Sea la ecuación diferencial $y^2y' = \frac{1}{3}$.

a) Verifique que $y(x) = \sqrt[3]{x}$ es solución de la EDO dada.

b) Para la solución presentada en el ítem a), indique cuál es un intervalo dominio.

6. (r) Determine el o los valores de m para que $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.

7. Determine los valores de los coeficientes que aparecen en la solución dada de la EDO en cada caso, para resolver el PVI o PVF, según corresponda:

a) (o) solución $y = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

b) (r) solución $y = Ae^x + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, con valores iniciales:

i) $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

ii) $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$.

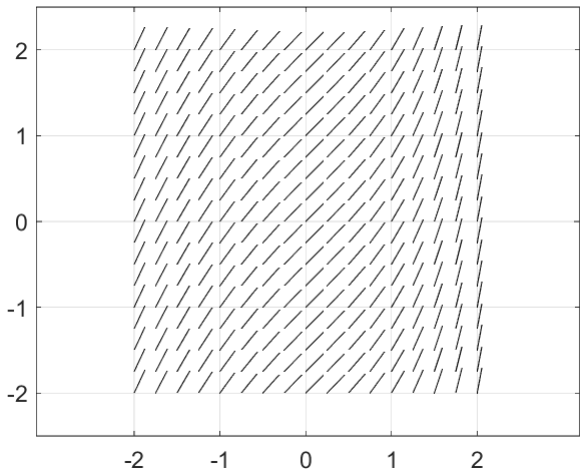
c) (o) solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

d) (r) solución $y = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

8. (o) Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $e^x - x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto $(1, -\frac{1}{2})$.

a) Plantee un PVI que permita hallarla.

b) Observe el diagrama de direcciones asociado a esta EDO y note que la pendiente en cada punto no depende de la ordenada, sino solo de la abscisa del mismo. Trace la solución de este PVI en el gráfico.



9. (o) La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación:

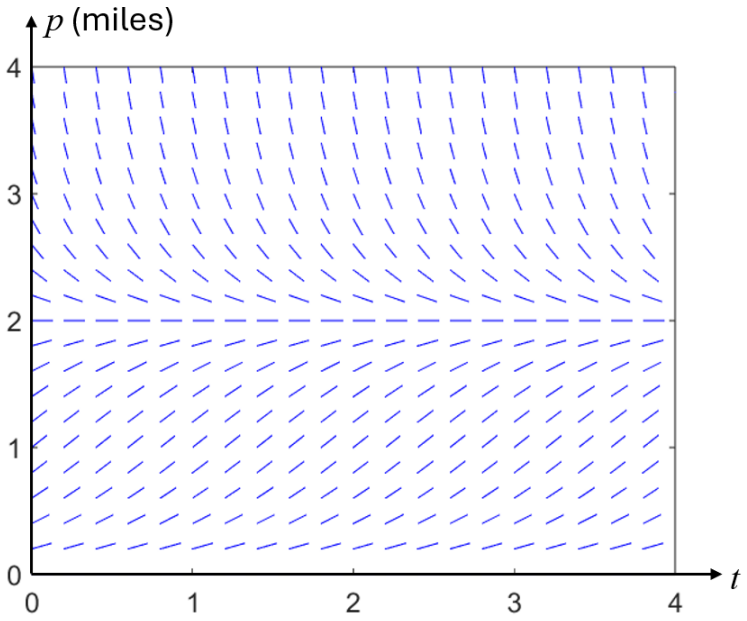
$$\frac{dp}{dt} = p\,(2 - p).$$

En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

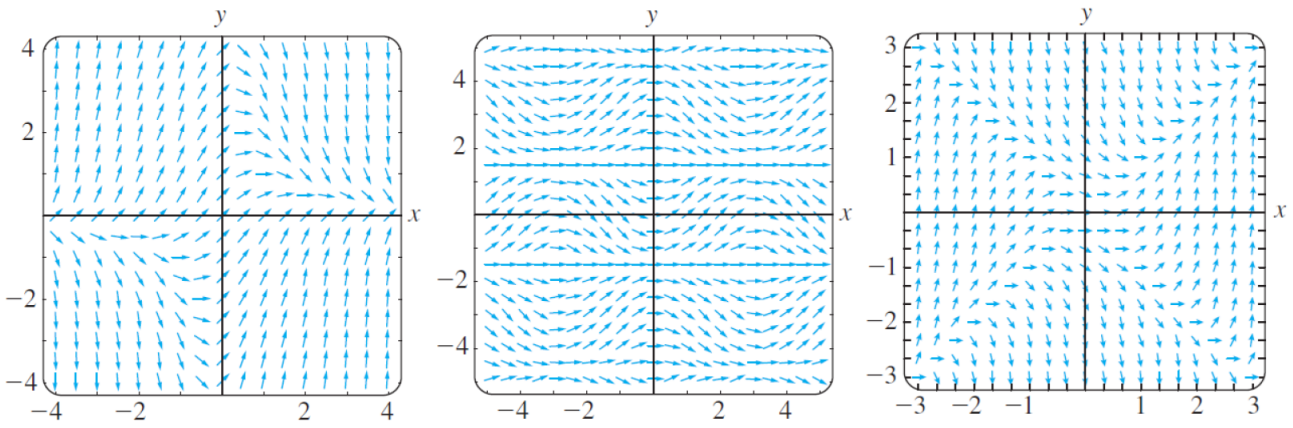
a) Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?

b) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?

c) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?



10. (r) Dados los siguientes campos direccionales:



a) Indique a qué campo direccional corresponde cada ecuación:

$$i)\ y' = x^2 - y^2; \qquad ii)\ y' = 1 - xy; \qquad iii)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x)\cos(y).$$

b) Para la ecuación dada en $ii)$ represente en el gráfico correspondiente las curvas solución correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

i) $y(0) = 0$;

ii) $y(2) = 2$.

1.2. EDO Separables

11. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables, si es posible:

    a) (r) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(5x)$.

    b) (o) $dx + e^{3x}dy = 0$.

    c) (r) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares).

12. (o) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.

13. (o) Resuelva los PVIs que aparecieron en los ejercicios 8 y 9; trace las soluciones en los gráficos correspondientes y constate que coinciden con las halladas anteriormente.

14. (r) Resuelva el siguiente PVI: $\frac{dx}{dt} = 4(x^2+1)$, $x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

15. (r) De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto de temperatura T se introduce en un medio a temperatura M, la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferencia $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial $dT/dt = k(M - T)$.

    a) Resuelva la ecuación diferencial en términos de T.

    b) Una cerveza fría, inicialmente a 2°C, se calienta hasta 5°C en 3 minutos estando en un cuarto a 21°C. Determine la temperatura de la cerveza si uno se demora 30 minutos en tomarla.

1.3. EDO Lineales

16. En cada caso, verifique que la ecuación diferencial dada es lineal; halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.

    a) (r) $\frac{dy}{dx} = 5y$.

    b) (o) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$.

    c) (r) $y' + 3x^2y = x^2$.

17. (o) Resuelva el siguiente PVI: $\frac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

18. (r) Al determinar el factor integrante en la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden no usamos una constante de integración en la integral de $P(x)$, indique por qué.

1.4. Ejercicios integradores (r)

19. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, lineal, ambas o ninguna. No las resuelva.

    a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$.

    b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y-x}$.

    c) $(x+1)\frac{dy}{dx} = -y + 10$.

    d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$.

    e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$.

    f) $t\frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$.

    g) $(2x + y + 1)y' = 1$.

20. Clasifique cada ecuación diferencial y resuelva.

    a) $y' = (xy)^{1/4}$.

    b) $y' + y = xe^{-x} + 1$.

    c) $2ydx - xdy = 0$.

21. Indique si la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es o no separable y si es o no lineal, justificando.

22. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' - 2y = x$.

2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1. Problemas de valores iniciales (PVI) y Problemas de valores en la frontera (PVF)

23. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.

    a) (r) $y = C_1 x + C_2 x \ln x$, $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(0, \infty)$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

    b) (o) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    c) (r) $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

24. (r) En los siguientes problemas encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial dado tiene una solución única.

    a) $(x - 2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    b) $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2.2. Dependencia e independencia lineal de soluciones. Teorema de Solución General caso homogéneo.

25. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

    a) (o) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$.

    b) (r) $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

    c) (r) $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$.

26. (r) ¿Qué deben cumplir las funciones y_1 e y_2 definidas en un mismo intervalo I para que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ sea una solución general de la ecuación diferencial $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$ en I, cualesquiera sean las constantes c_1 y c_2?

2.3. EDO homogéneas con coeficientes constantes

27. (r) Compruebe que las siguientes funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo dado. Forme la solución general.

    a) $y'' - y' - 12y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{4x}$, $(-\infty, \infty)$.

    b) $y^{(4)} + y'' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$.

28. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

    a) (o) $4y'' + y' = 0$.

    b) (o) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

    c) (o) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

    d) (r) $2y'' + 2y' + y = 0$.

    e) (o) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$.

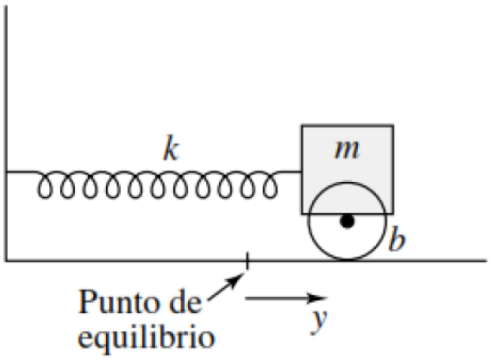
    f) (r) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$.

    g) (o) $y''' + y'' - y' - y = 0$.

    h) (r) $y^{(4)} - y'' = 0$.

29. (r) Un cuerpo de masa $m = 1\,\text{kg}$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 25\,\text{N/m}$. Exprese la ecuación del movimiento para los casos en que el movimiento está amortiguado, considerando que el amortiguamiento se modela a través de un término proporcional a la velocidad (de sentido contrario), cuya constante de proporcionalidad es b. Identifique la frecuencia natural del sistema. Resuelva para los casos en que b vale 0, 6, 10 y $12\,\text{kg/s}$, con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Interprete cada solución en términos de movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

30. (r) Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa m unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la figura. Proponga una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte y la fricción (amortiguamiento). Posteriormente, resuelva la ecuación diferencial suponiendo que el amortiguamiento es cero. Determine la frecuencia de oscilación del sistema.



2.4. EDO no Homogéneas

31. (r) En los siguientes problemas compruebe que la familia dada es solución de la ecuación diferencial no homogénea:

    a) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$.
    b) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$, $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$.

2.5. EDO no Homogéneas con coeficientes constantes

32. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:

    a) (o) $y'' + y' - 6y = 2x$.
    b) (o) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.
    c) (o) $y'' + y' - 6y = 2x - e^{2x}$.
    d) (r) $y'' + 3y' + 2y = 6$.
    e) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$.
    f) (r) $y'' + 3y' + 2y = -6 + e^{-x}$.
    g) (o) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$.
    h) (r) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$.
    i) (r) $y'' + y = \cos x$.
    j) (r) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$.
    k) (o) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.

33. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:

    a) (o) $y'' + y = \sec x$.
    b) (r) $y'' + y = \tan x$.
    c) (r) $y'' + y = 2\sec x - \tan x$.
    d) (o) $y'' + y = \sec^2 x$.
    e) (r) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
    f) (r) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$.
    g) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2\operatorname{sen}(e^x) + \frac{5}{1+e^x}$.

34. Obtenga la solución para los siguientes problemas de valor inicial:

    a) (r) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    b) (r) $y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    c) (o) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
    d) (r) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$.

35. (r) Un cuerpo de masa $m = 1\,\text{kg}$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 2\,\text{N/m}$. Suponga que el amortiguamiento depende de $b = 2\,\text{kg/s}$ y se imprime una fuerza que mueve el extremo superior del resorte según $f(t) = 4\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)$. Halle la ecuación del movimiento. Distinga los términos transitorio y de estado estable de la solución.

3. Ejercicios integradores (r)

36. Halle la solución general de $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$, para $x > 0$.

37. Resuelva: $4y'' + 36y = \csc(3x)$.

38. a) Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 0.$$

b) Halle una solución (general) para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 25\cos(4t). \tag{1}$$

c) ¿Es verdad que toda solución de (1) es de la forma que usted obtuvo en el ítem anterior? Justifique.

39. Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.

40. Dada la ecuación $y'' - y = 2^x$, se sabe que $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada, $y'' - y = 0$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿Es verdad que una solución general de $y'' - y = 2^x$ es $y_G = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{2^x}{\ln^2 2 - 1}$? Justifique su respuesta mediante la aplicación del o de los teoremas correspondientes.

Si le resulta útil, recuerde que $2^x = e^{x \ln 2}$.

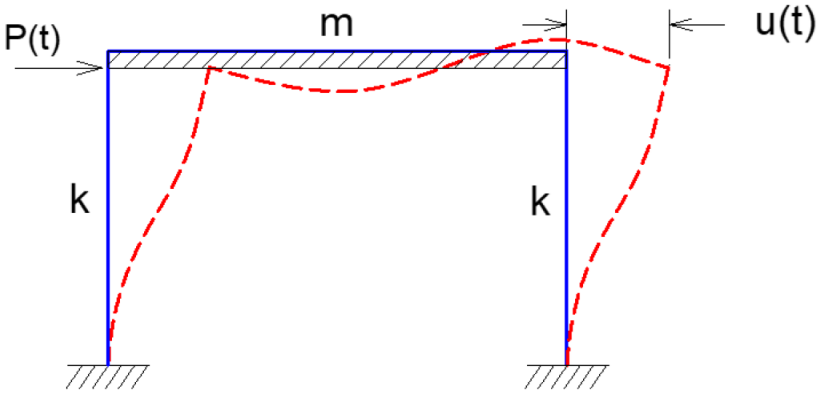
41. Encuentre una solución general de cada ecuación diferencial:

a) $y'' + y' - 2y = x^2 - x + 2$.

b) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

4. Aplicación: estructura de pórtico (r)

La figura muestra el esquema de una estructura de pórtico (formada por dos columnas y una viga). Sobre esta estructura actúa una fuerza $P(t)$ variable en el tiempo, por lo cual la estructura vibra y se deforma lateralmente. En un instante dado, el desplazamiento lateral, en correspondencia con el nivel donde se aplica la fuerza $P(t)$, es $u(t)$.



Para obtener un modelo simplificado, apreciamos la semejanza que presenta esta estructura a un sistema masa-resorte, tal como los planteados en los ejercicios de la sección 2.3. En este caso se deben tener en cuenta la rigidez k de las columnas (propiedad que cuantifica el desplazamiento que experimenta la estructura cuando se aplica una fuerza unitaria) y la masa m, que se supone concentrada en el nivel de la viga (k y m son positivos). Se puede demostrar, mediante principios de dinámica structural, que la ecuación que representa el fenómeno es:

$$m\ddot{u} + ku = P(t), \qquad \text{donde } \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

42. Sabiendo que la fuerza que actúa sobre esta estructura es una carga armónica $P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\omega t)$:

a) Responda: ¿Qué tipo de EDO es? Clasifíquela. ¿Qué tipo de movimiento armónico representa? (Libre o forzado, amortiguado o no amortiguado).

b) Asumiendo que, en el instante inicial $t = 0$, el desplazamiento y la velocidad son nulos (es decir que la estructura está en reposo), justifique que la solución de la ecuación diferencial es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\operatorname{sen}(\omega t) - \beta \operatorname{sen}(\omega_n t)\right),$$

explicando qué representan β y ω_n.