UNIDAD 3: Integrales múltiples e integrales sobre curvas

MATEMÁTICA PARA COMPUTACIÓN

2026

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable

2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles

3. Integrales triples

4. Cambio de variables en integrales dobles

5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral (de Riemann) de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

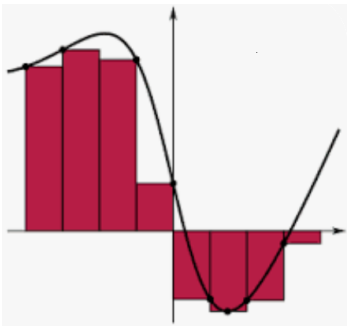
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral (de Riemann) de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:



Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

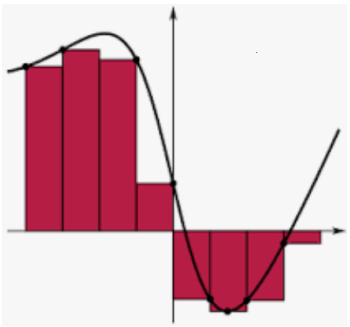
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

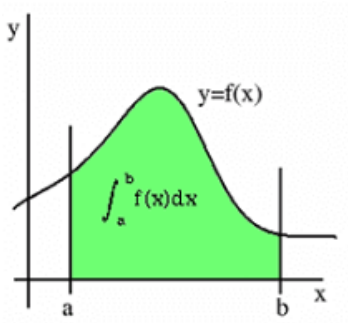
$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral (de Riemann) de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:





Integral de una función de una variable

Dadas f definida y acotada en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

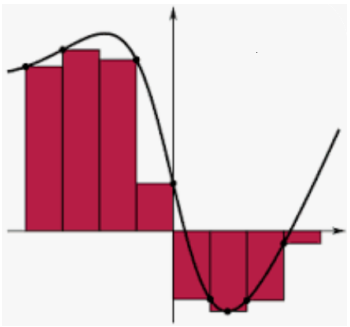
a partir de una colección de puntos muestra asociada a $\mathcal{P}$:

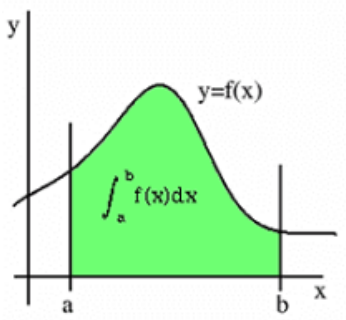
$$x_1^* \in [x_0, x_1], \cdots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n],$$

se define la integral (de Riemann) de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \text{ si el límite existe.}$$

Aplicaciones:





$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*)\Delta x_k$$



Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares.

Sea R un rectángulo con los lados paralelos a los ejes, que se expresa como $[a, b] \times [c, d]$.

Definición

El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función continua no negativa f se llama integral doble de f sobre R y se anota

$$\iint_R (f(x, y)\, dA \text{ o } \iint_R (f(x, y)\, dx\, dy.$$

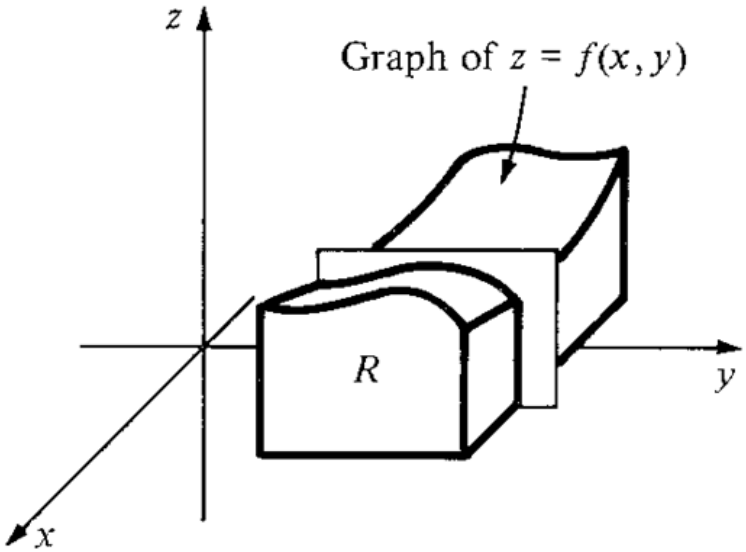
Dar ejemplos (prismas, semiesfera).

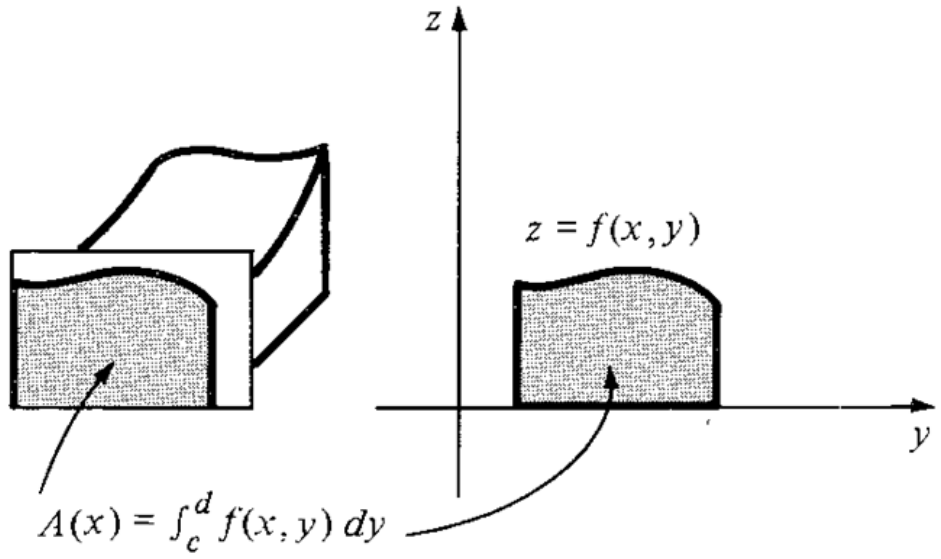
Principio de Cavalieri



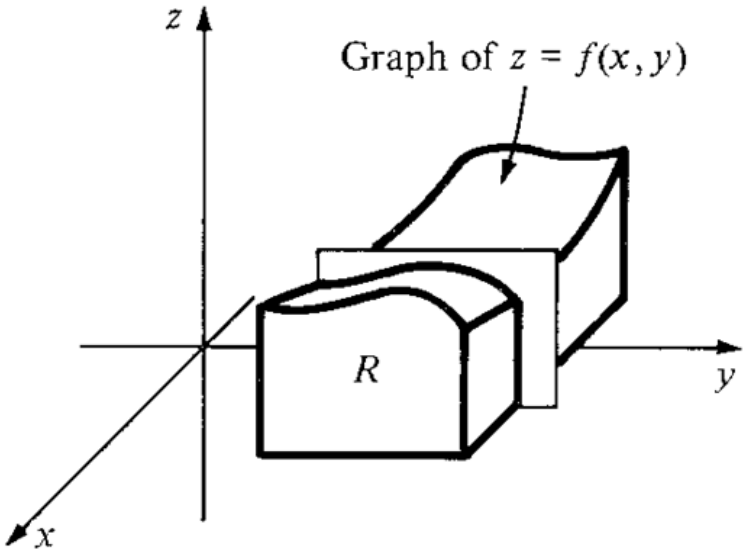
¿Cambia el volumen?

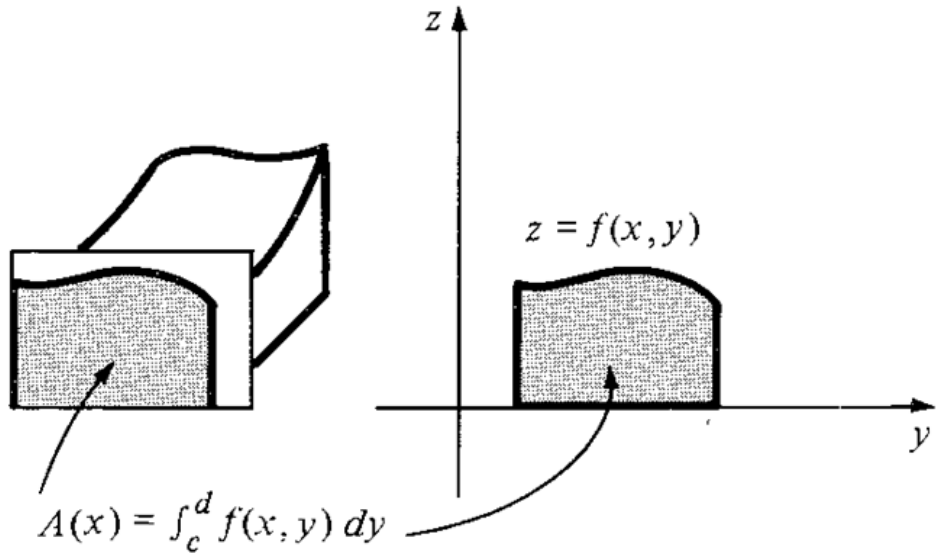
Principio de Cavalieri e integrales iteradas

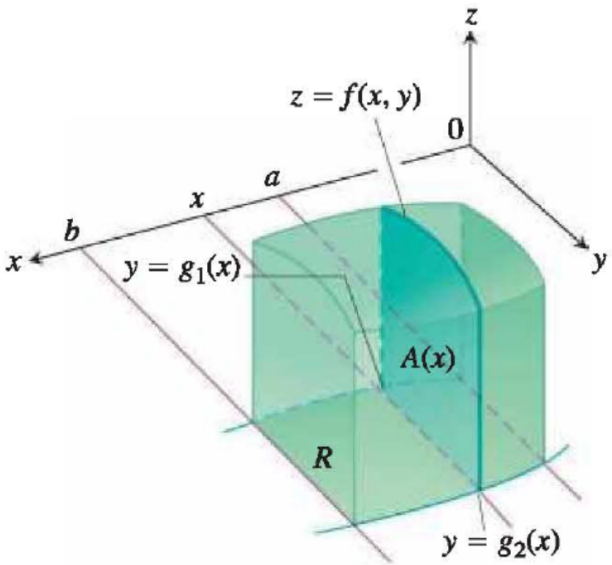


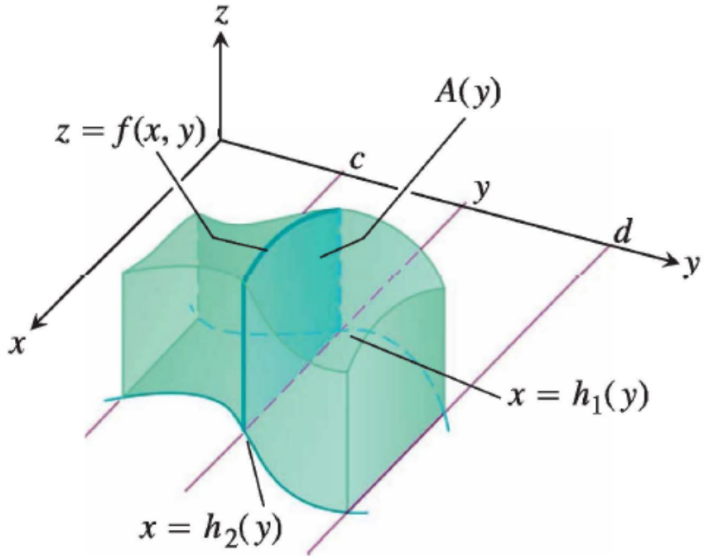


Principio de Cavalieri e integrales iteradas









$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b A(x)\, dx$$

Definición de función acotada en una región D

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada en D si existen números reales m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$.

Similarmente se define función acotada en una región $D \subset \mathbb{R}^n$.

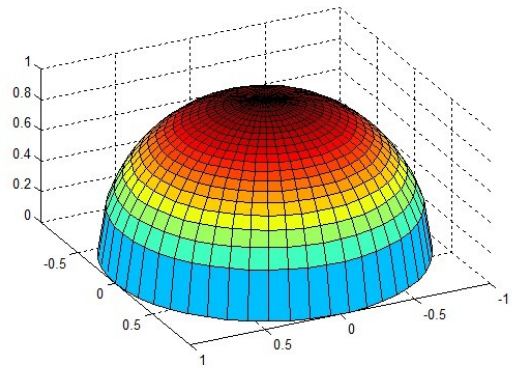
Observación: no debe confundirse el concepto de función acotada en una región con el de región acotada.

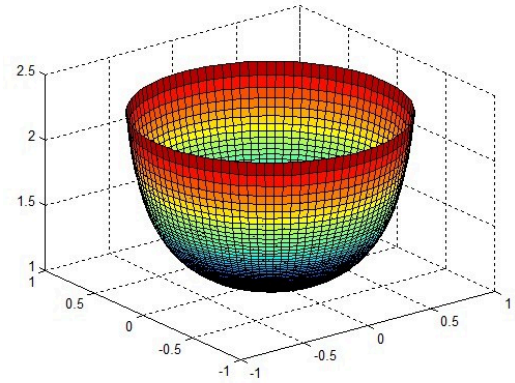
Veamos un par de ejemplos.

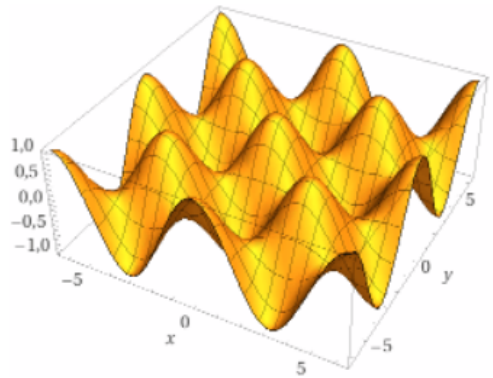
Definición de función acotada en una región D

Ejemplo

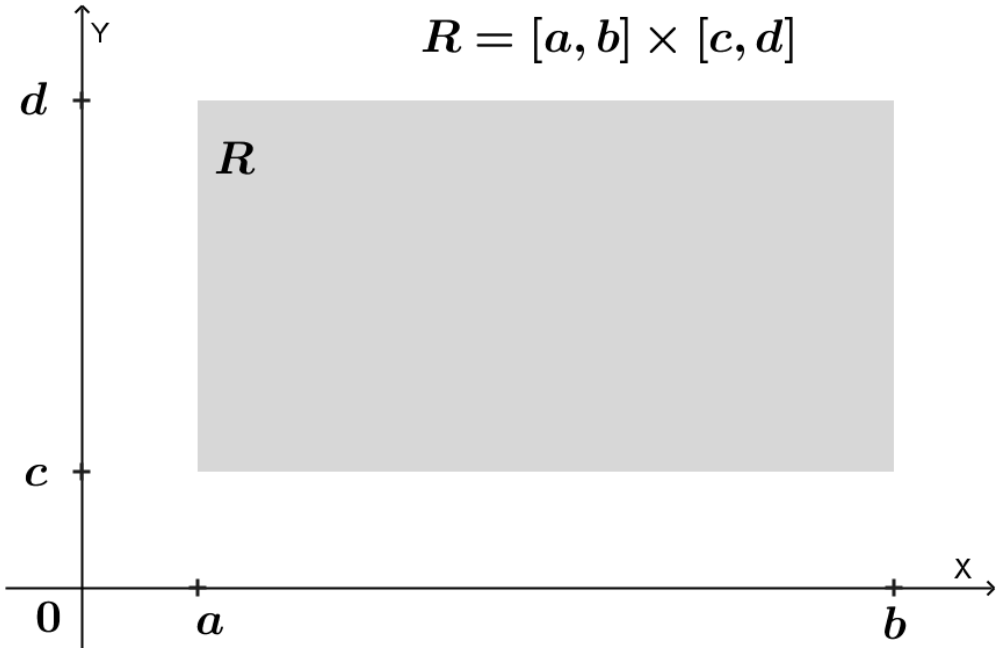
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ es una función acotada y su dominio es un conjunto acotado (y cerrado).
- $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ es una función no acotada y su dominio es un conjunto acotado (no cerrado).
- $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ es una función acotada y su dominio es $\mathbb{R}^2$, que es no acotado (y cerrado).



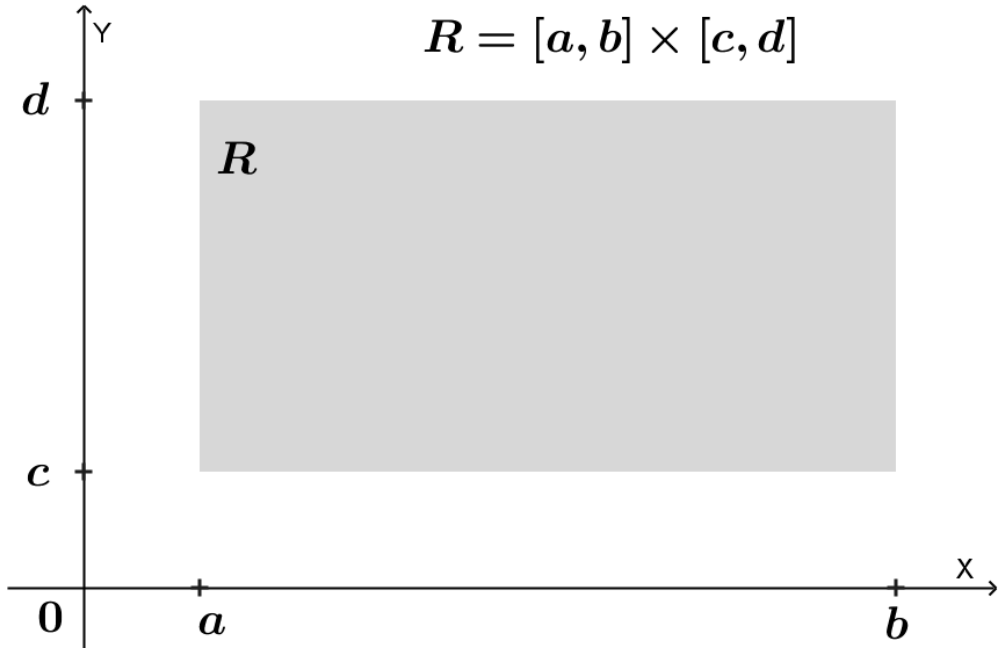




Definición de partición



Definición de partición

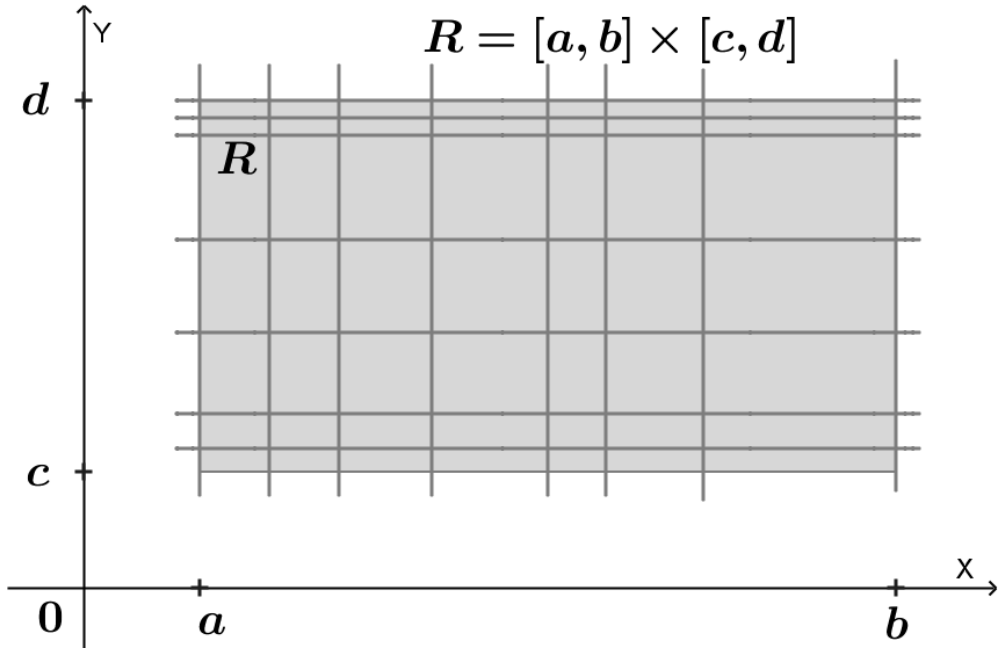


Una **partición** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$.

Definición de partición

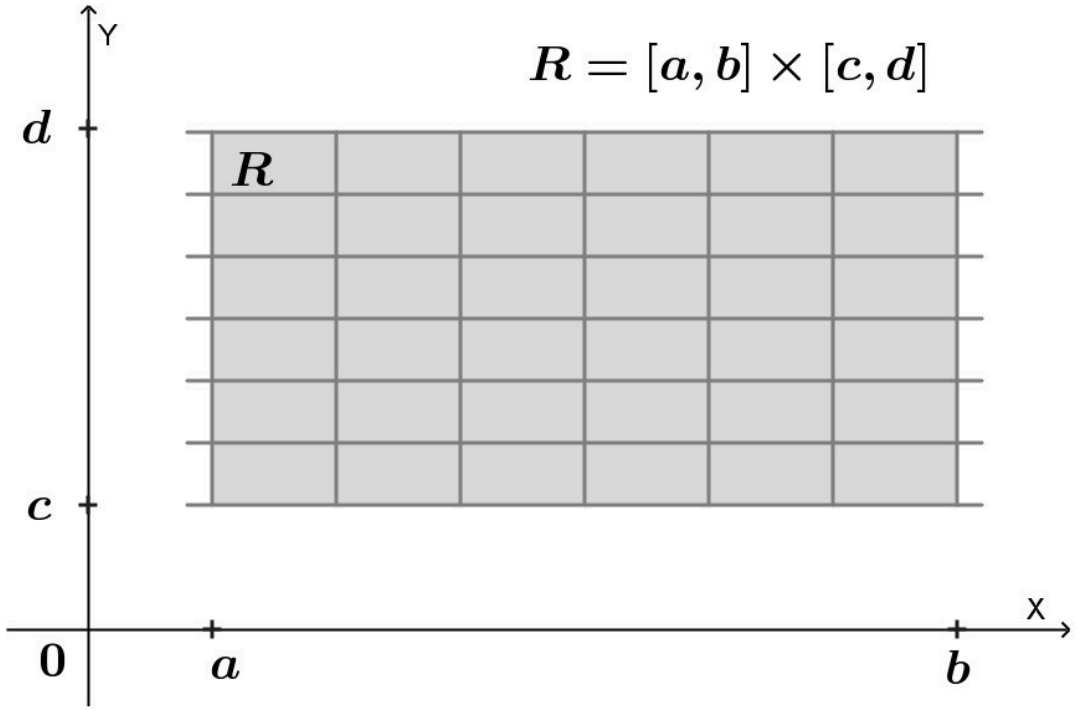


Una **partición** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$.

Definición de partición regular

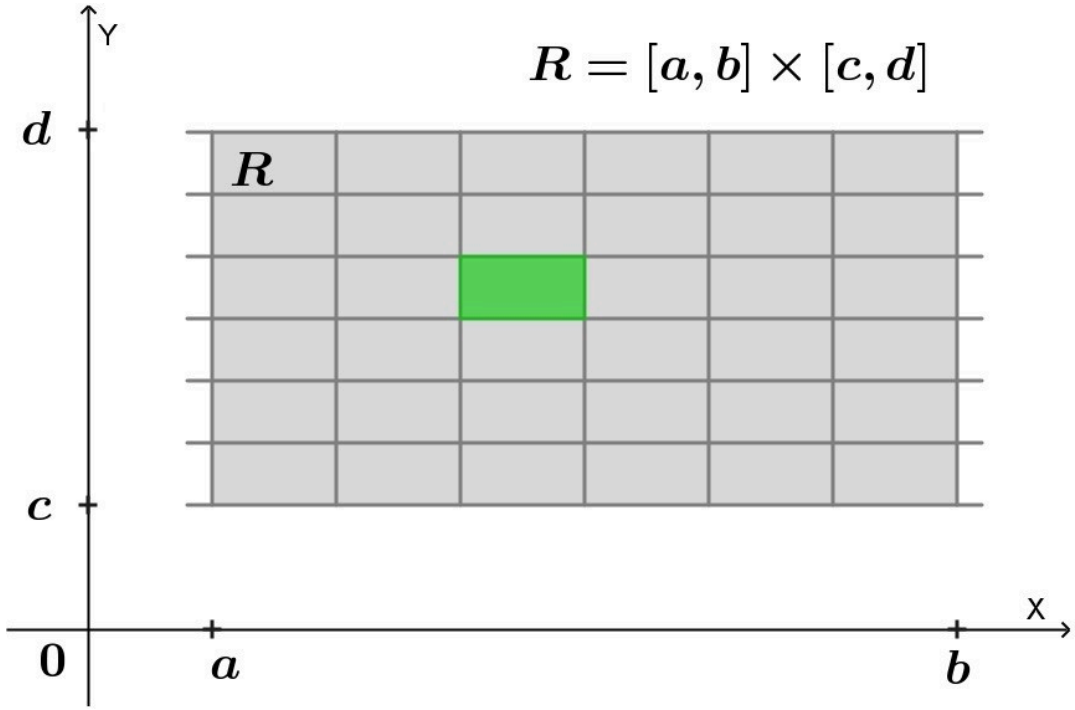


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición de partición regular

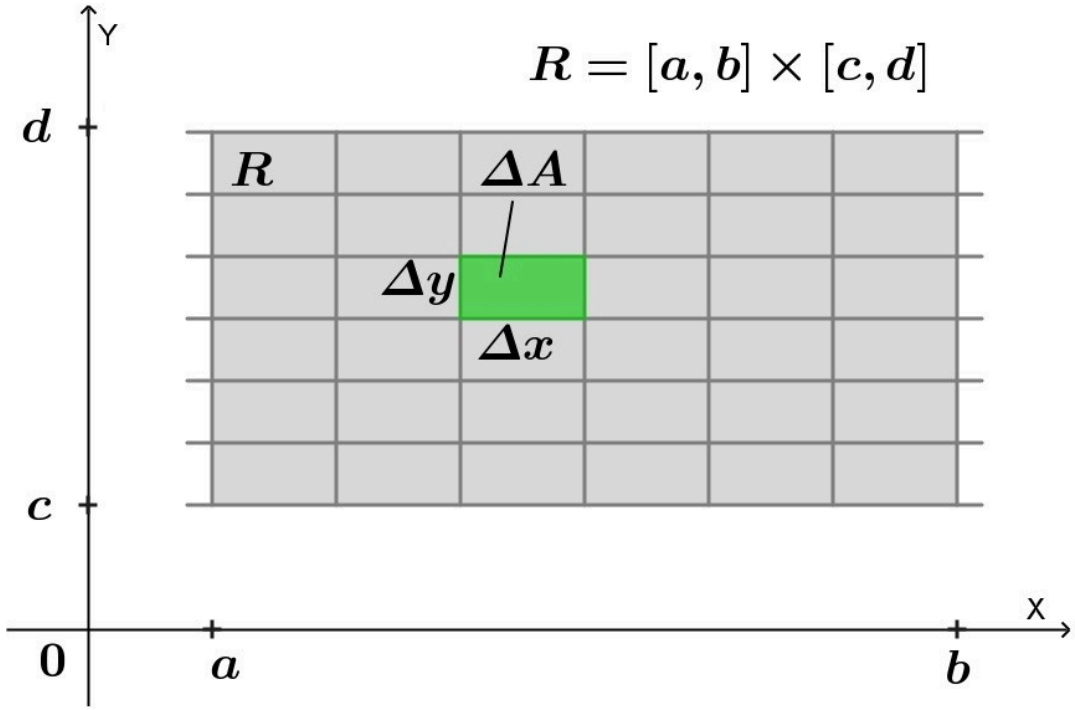


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición de partición regular

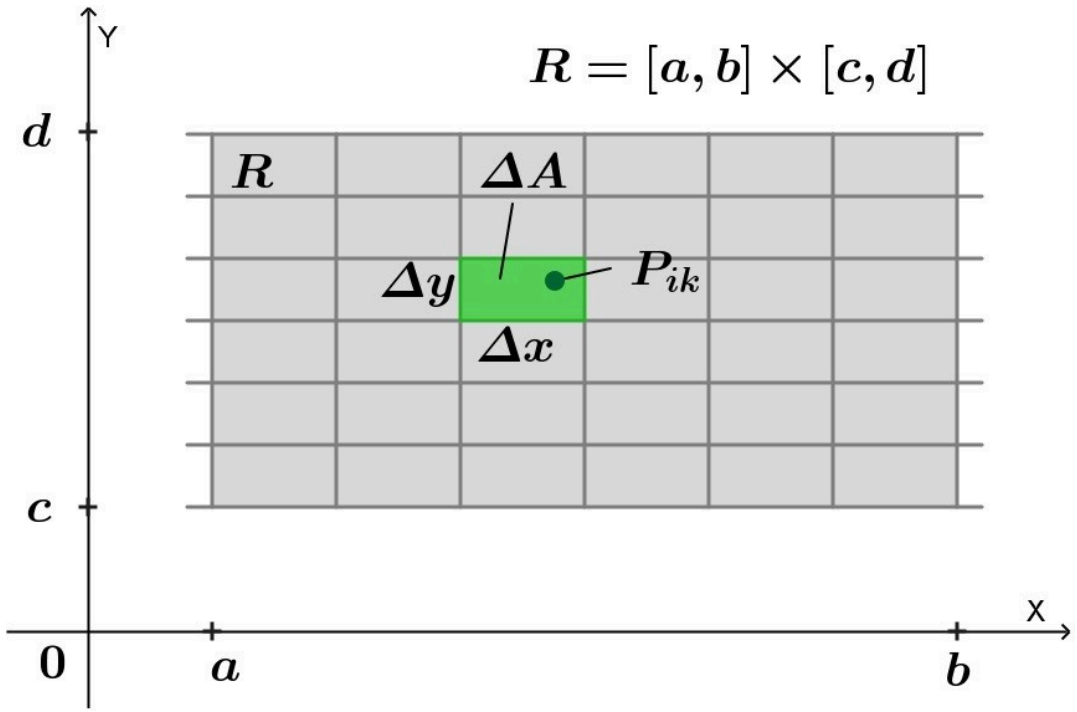


Una **partición regular** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición de partición regular

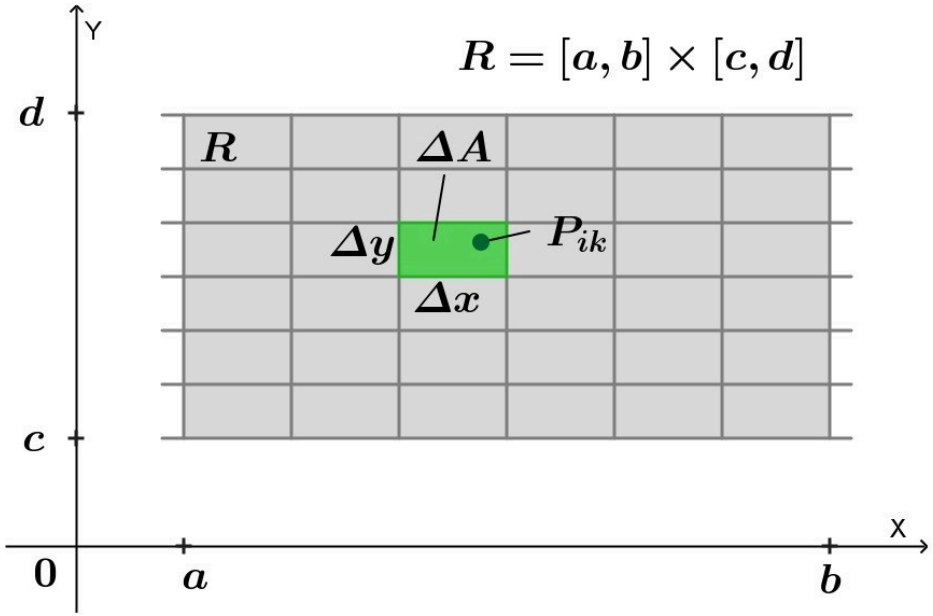


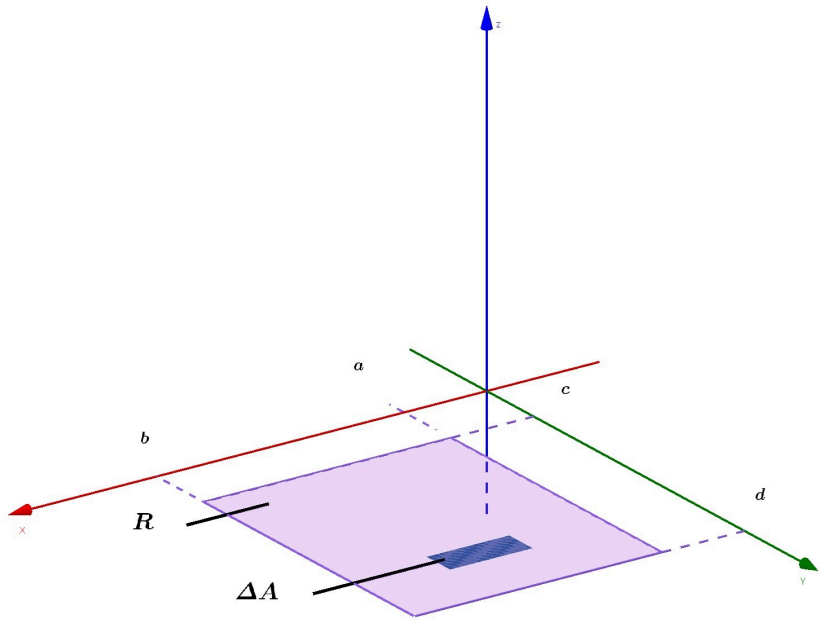
Una **partición regular** $\mathcal{P}$ **de** $R = [a, b] \times [c, d]$ está formada por dos colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ y } \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

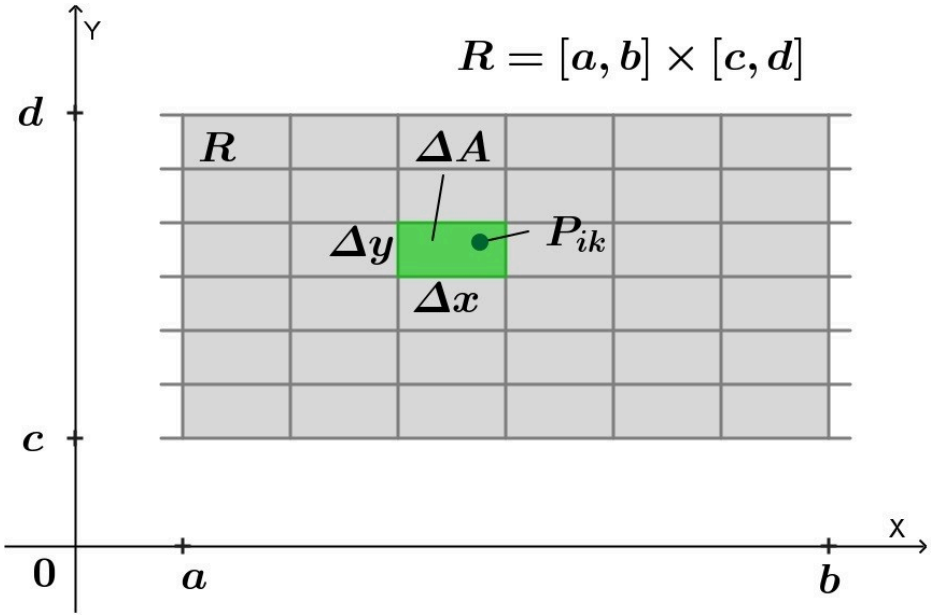
tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

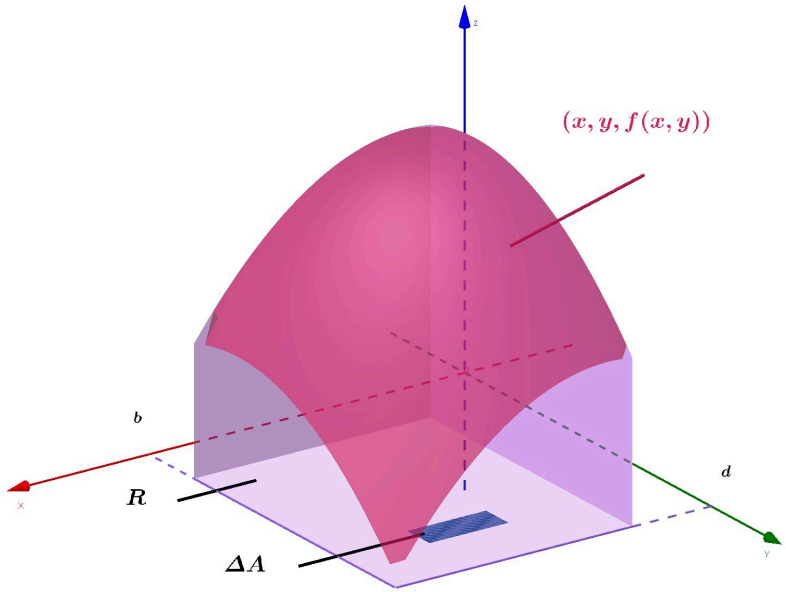
Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado



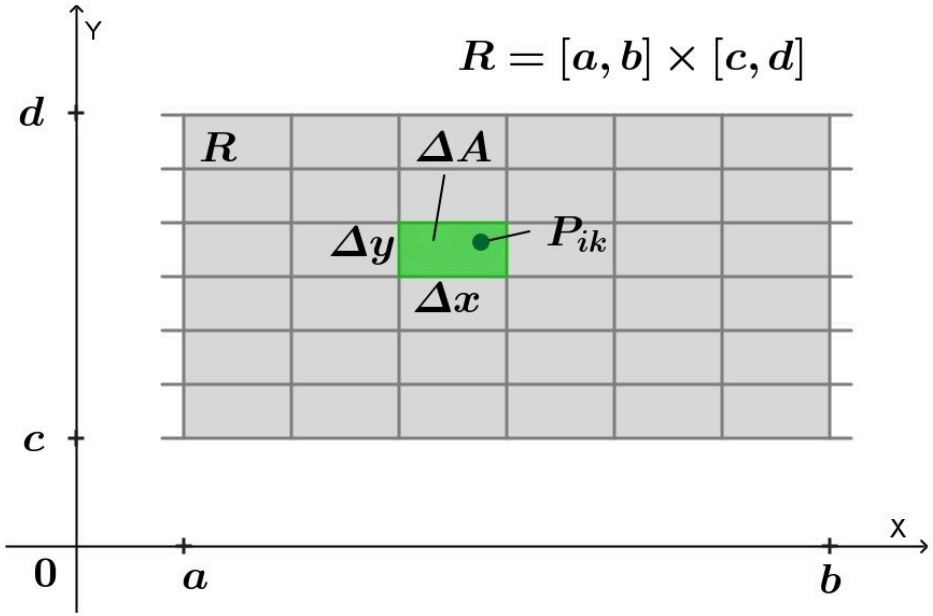


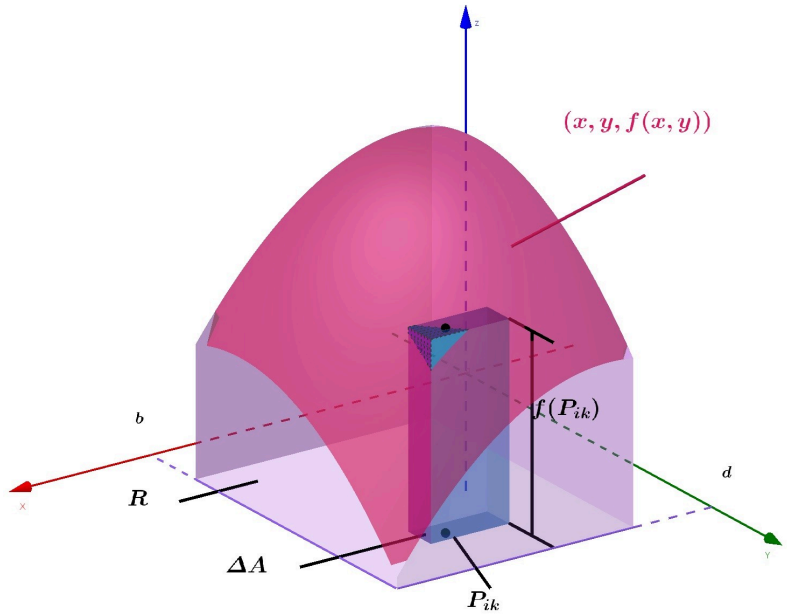
Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado





Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado





Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

Definición (de integral doble sobre rectángulos)

Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R, la **suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$** es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A.$$

Definición de integral doble sobre un rectángulo cerrado

Definición (de integral doble sobre rectángulos)

Dadas una función f definida y acotada en un rectángulo R y una partición $\mathcal{P}$ de R, la **suma de Riemann de f asociada a $\mathcal{P}$** es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_{ik})\Delta A.$$

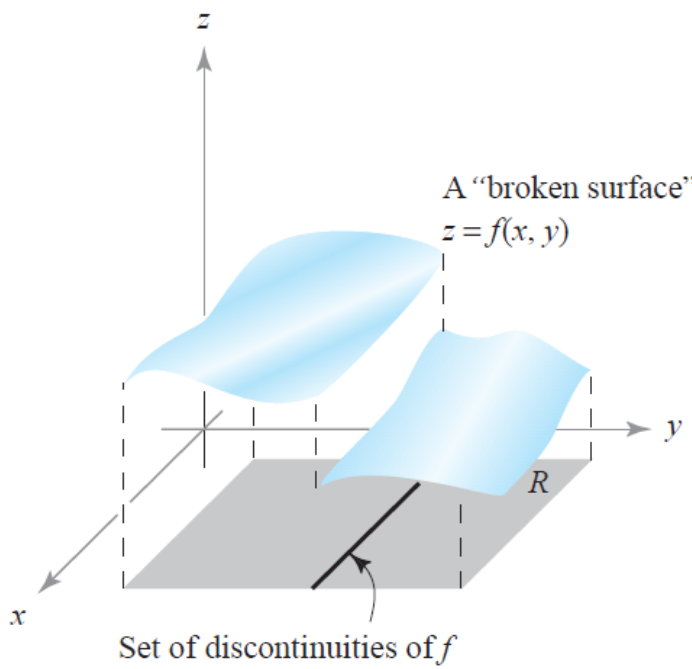
Si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe para cualquier elección de puntos P_{ik} en los rectángulos R_{ik}, se dice que f es **integrable** sobre R. En este caso, la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n y se puede representar por

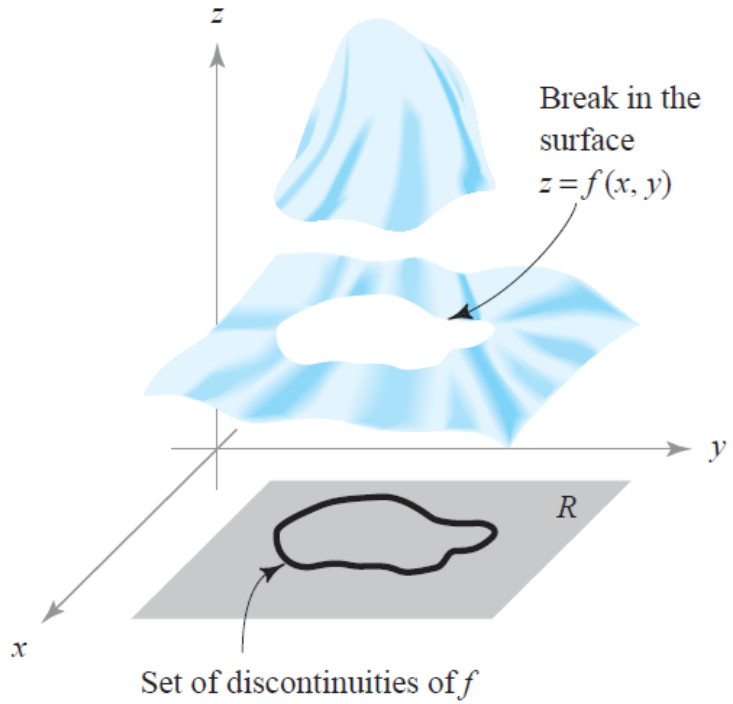
$$\iint_R f(x,y)dA, \quad \iint_R f(x,y)dx\,dy \quad \text{o} \quad \iint_R f\,dx\,dy.$$

Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

1. *Si f es continua en un rectángulo R cerrado, es integrable en R.*
2. *Si f es acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R.*





Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles)

Si f y g son funciones integrables sobre el rectángulo R, y c es una constante, entonces:

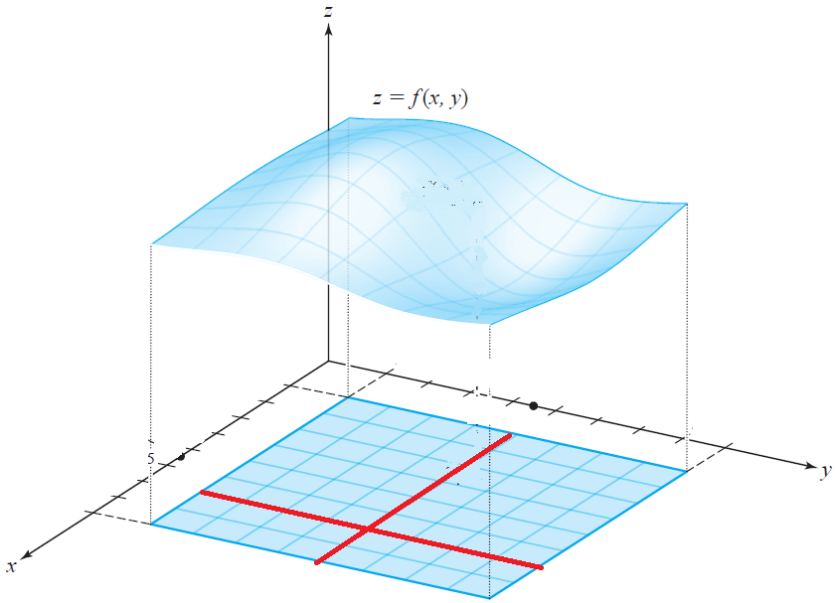
1. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$
2. $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$
3. *Si* $f(x,y) \leq g(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in R$,
   $$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$
4. $$\left|\iint_R f(x,y)dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Teorema (Propiedades de las integrales dobles, Cont.)

5. *Si R_1, R_2,...,R_m son rectángulos con interiores disjuntos dos a dos, f es acotada e integrable sobre cada R_i y $Q = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces f es integrable en Q y*

$$\iint_Q f(x,y)dA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f(x,y)dA.$$



Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Teorema de Fubini

Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua en la región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx\, dy = \iint_R f(x, y)dA.$$

Recorrido

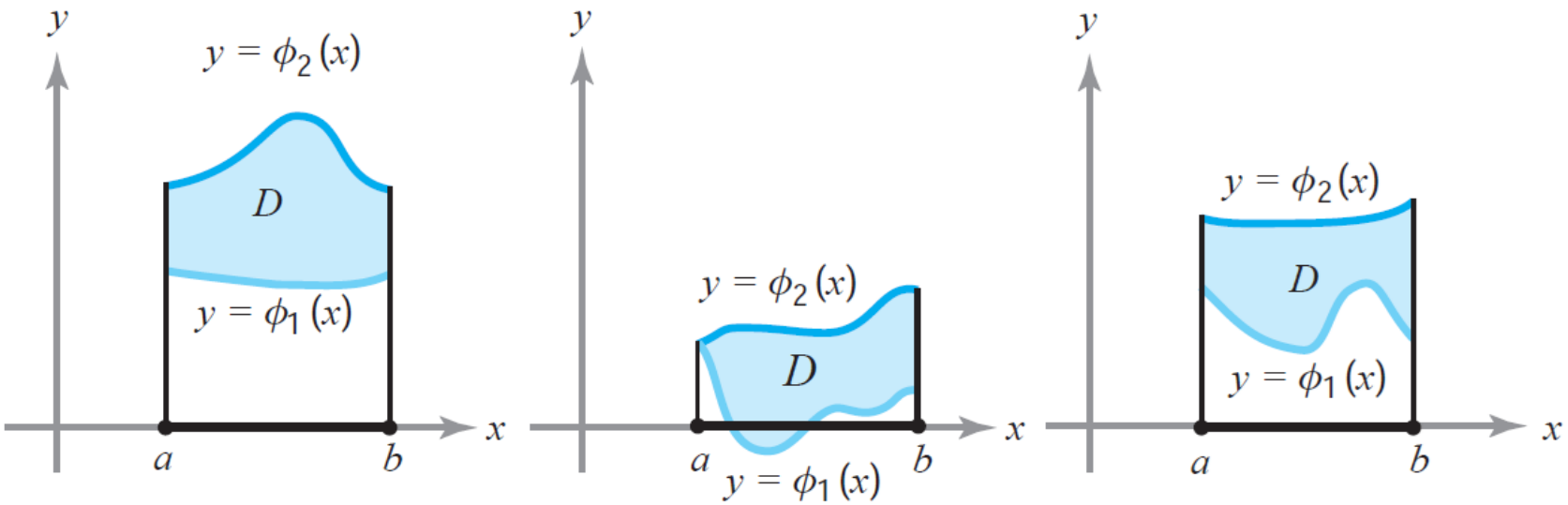
1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Regiones y-simples

Dadas $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\}$$

se llama y-simple. La frontera de D está formada por segmentos verticales y las gráficas de funciones continuas de x definidas en $[a, b]$.

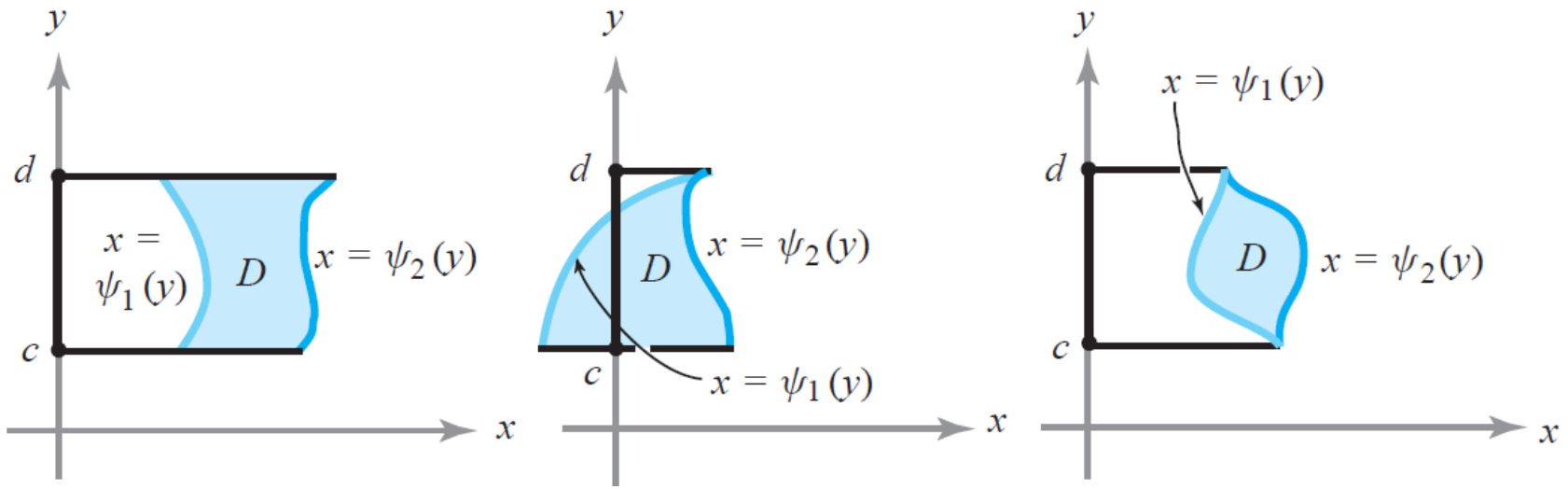


Regiones x-simples

Dadas $\psi_1 : [c, d] \to \mathbb{R}$ y $\psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$, el conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d],\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\}$$

se llama x-simple. La frontera de D está formada por segmentos horizontales y las gráficas de funciones continuas de y definidas en $[c, d]$.

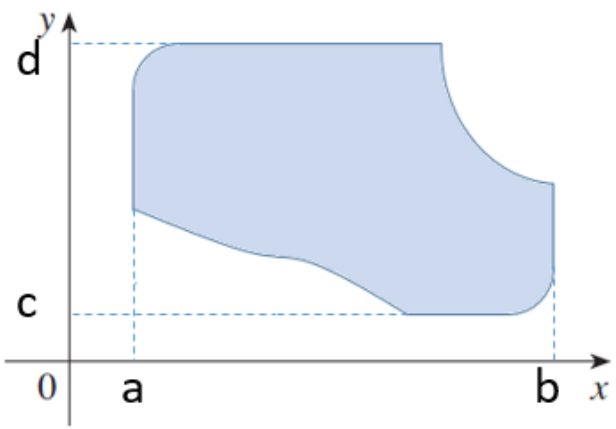


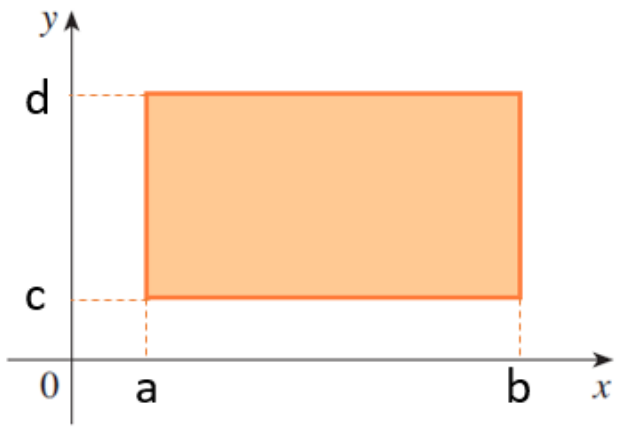
Regiones simples o elementales

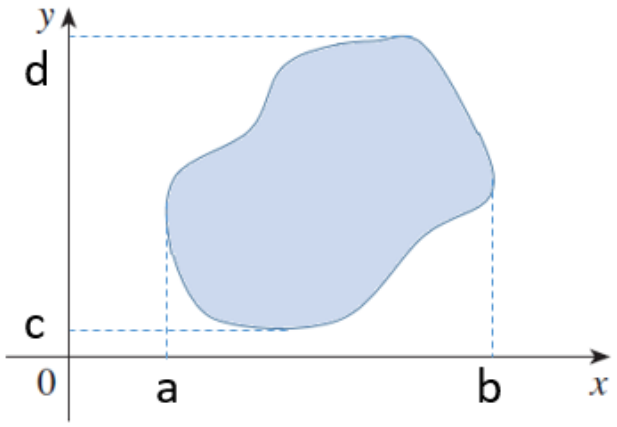
Son aquellas regiones que son y-simples y x-simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.

Regiones simples o elementales

Son aquellas regiones que son y-simples y x-simples a la vez.
Analizar y dibujar ejemplos.







La integral sobre una región elemental

Definición

Si D es una región elemental, R es un rectángulo tal que $D \subset R$ y f es una función continua (y por lo tanto acotada) $f : D \to \mathbb{R}$, entonces se define la función $f^* : R \to \mathbb{R}$ por

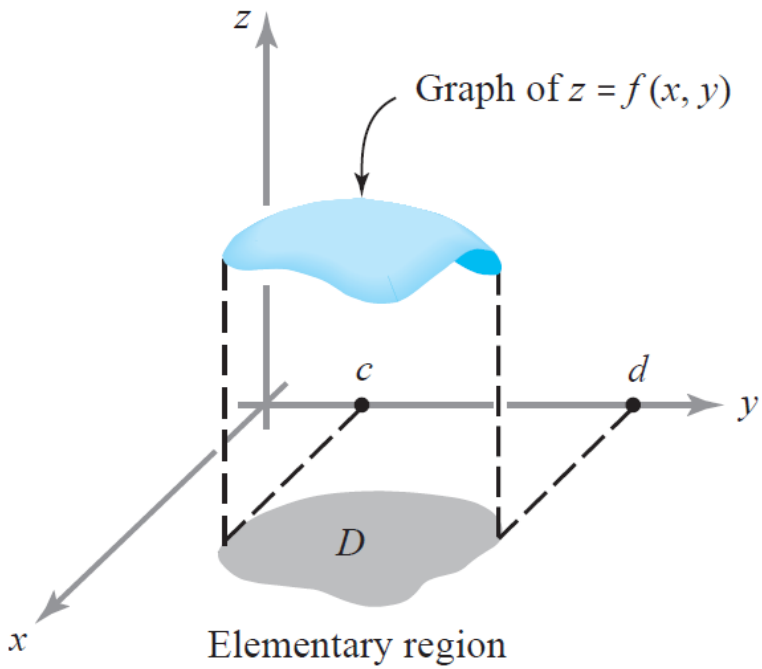
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin D,\ (x,y) \in R. \end{cases}$$

Entonces, podemos definir

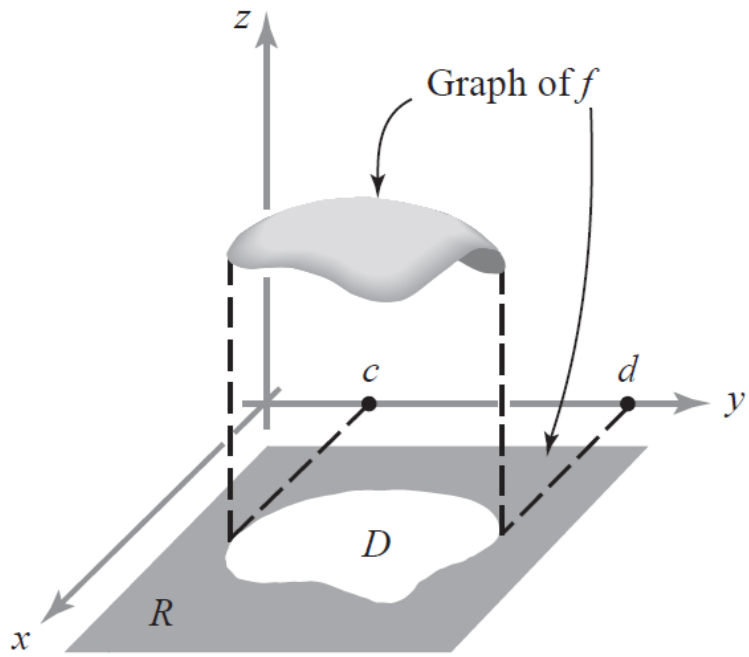
$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_R f^*(x,y)\,dA.$$

Observación: f^* es acotada (ya que f lo es) y es continua excepto posiblemente en ∂D. Como ∂D está formada por gráficas de funciones continuas, f^* es integrable sobre R.

Integral doble sobre regiones elementales



Elementary region



$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_R f^*(x,y)\,dA$$

$$= \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f^*(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema

- *Si D es una región y-simple, entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

- *Si D es una región x-simple, entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Caso especial: área de D

Si $f(x,y) = 1$ para todo $(x,y) \in D$, $\iint_D f(x,y)\,dA$ es el área de D (vol. sólido altura 1). Además

$$\iint_D 1\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1\,dy\,dx = \int_a^b \left(\phi_2(x) - \phi_1(x)\right)\,dx,$$

que coincide con la fórmula vista en AMI.

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Definición (Valor medio de una función en una región)

Si f es una función integrable en una *región acotada* $D \subset \mathbb{R}^2$ cuya área cumple $0 < A(D) < \infty$, el valor medio de f sobre D se define por

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)\, dA.$$

Definición (Valor medio de una función en una región)

Si f es una función integrable en una *región acotada* $D \subset \mathbb{R}^2$ cuya área cumple $0 < A(D) < \infty$, el valor medio de f sobre D se define por

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dA.$$

Proposición (Desigualdad del valor medio)

Si f es acotada en D, existen m y M tales que $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq M \cdot A(D).$$

Definición (Valor medio de una función en una región)

Si f es una función integrable en una *región acotada* $D \subset \mathbb{R}^2$ cuya área cumple $0 < A(D) < \infty$, el valor medio de f sobre D se define por

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dA.$$

Proposición (Desigualdad del valor medio)

Si f es acotada en D, existen m y M tales que $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$. Luego

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq M \cdot A(D).$$

Ejemplo de aplicación de esta desigualdad: probar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + (xy)^4} dx\, dy \leq 1.$$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1$, $1 \leq 1+(xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \frac{1}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{sen} x \geq 0$; luego $\frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$.
- $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1\,dx\,dy = 1.$

Ejemplo

Probar que: $\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$

Sean $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- $0 \leq (xy)^4 \leq 1$, $1 \leq 1+(xy)^4 \leq 2$ y $1 \geq \frac{1}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2}$.
- $\operatorname{sen} x \geq 0$; luego $\frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \geq \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$.
- $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq \iint_{[0,1]^2} 1\,dx\,dy = 1.$

Como

$$\iint_{[0,1]^2} \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) = \tfrac{1}{2}(1-\cos 1),$$

se concluye que

$$\frac{1}{2}(1-\cos 1) \leq \iint_{[0,1]^2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1.$$

Igualdad del valor medio

Teorema (Teorema del valor medio para integrales dobles)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y D es elemental, entonces para algún punto $(x_0, y_0) \in D$ se cumple

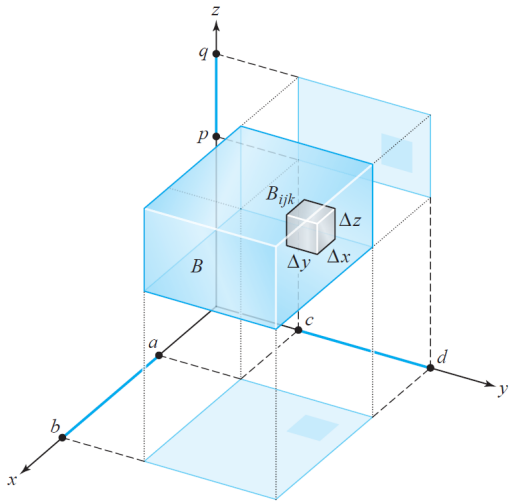
$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)\, A(D),$$

donde $A(D)$ es el área de D.

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Definición de partición regular



Una **partición regular $\mathcal{P}$ de** $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ está formada por tres colecciones ordenadas:

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ y } \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$$

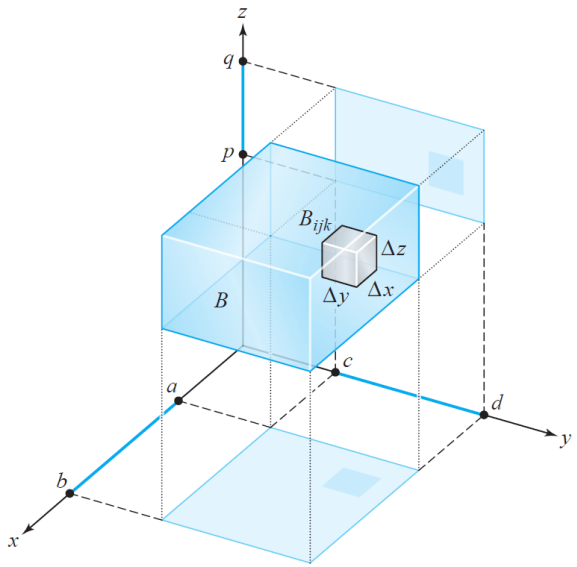
tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $p = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = q$, y además $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y = \frac{d-c}{n}$ y $z_i - z_{i-1} = \Delta z = \frac{q-p}{n}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición

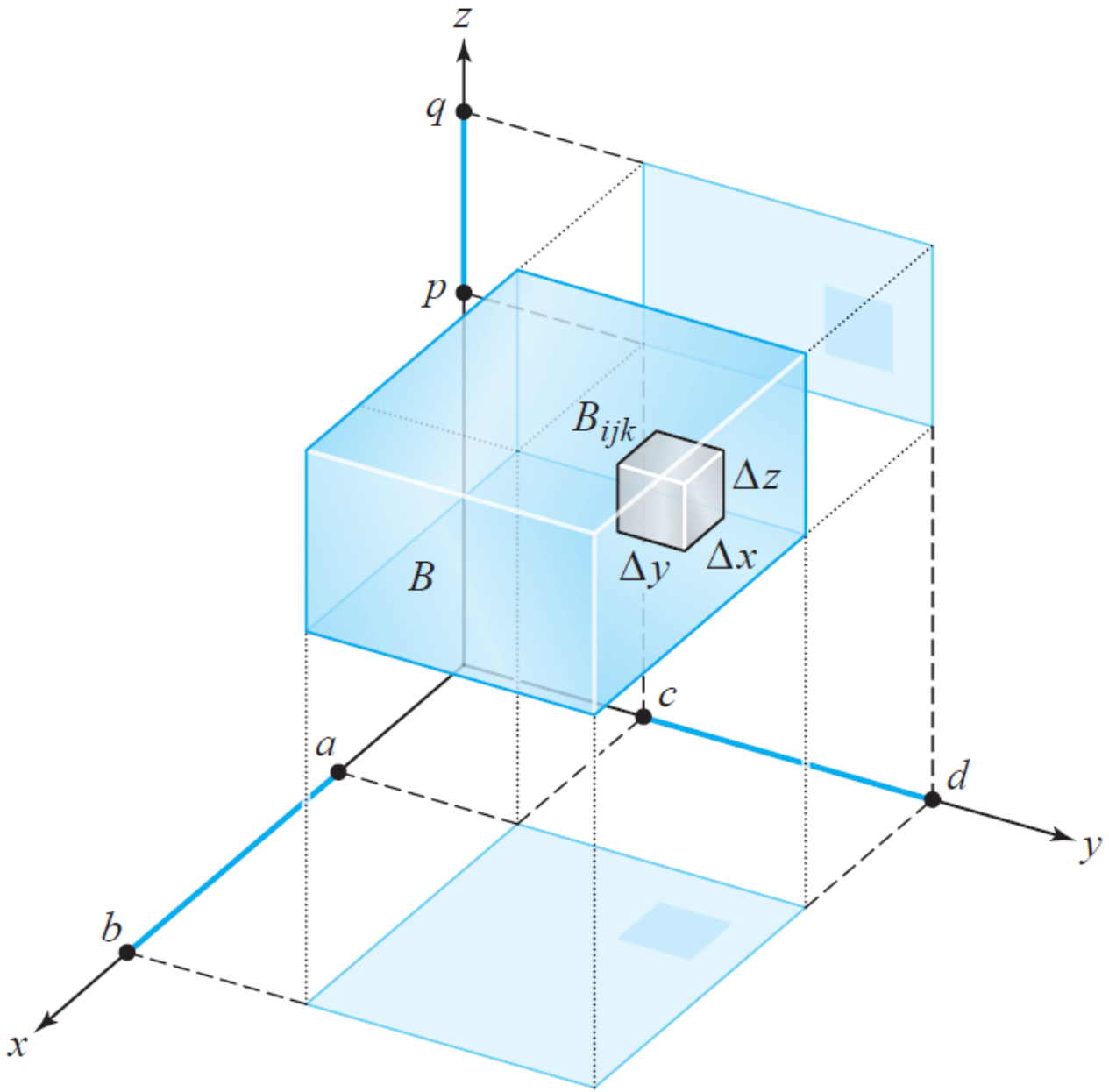
Sean $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un paralelepípedo (una caja o rectángulo generalizado) y f, una función definida en B. Definimos una partición $\mathcal{P}$ de B dividiendo los tres lados de B en n partes iguales, y formamos la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de B_{ijk}, el ijk-ésimo paralelepípedo en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk}.



Definición



Definición

Definición

Sea $f(x, y, z)$ acotada, definida en B. Si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

existe y es independiente de la elección de $\mathbf{c}_{ijk}$, decimos que f es integrable en B y llamamos a S **integral triple** de f en B y la denotamos por

$$\iiint_B f\,dV, \quad \iiint_B f(x, y, z)\,dV, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Propiedades

Las funciones continuas definidas en un paralelepípedo B (box) son integrables, igual que las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (como $z = g(x, y)$). Las demás propiedades que valen para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. En particular, vale el Teorema de Fubini:

Teorema (Teorema de Fubini: Reducción a integrales iteradas.)

Sea $f(x, y, z)$ una función integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Cualquier integral iterada, si existe, es igual a la integral triple; esto es,

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \cdots$$

En total, hay seis órdenes de integración posibles.

Ejercicios del TP3

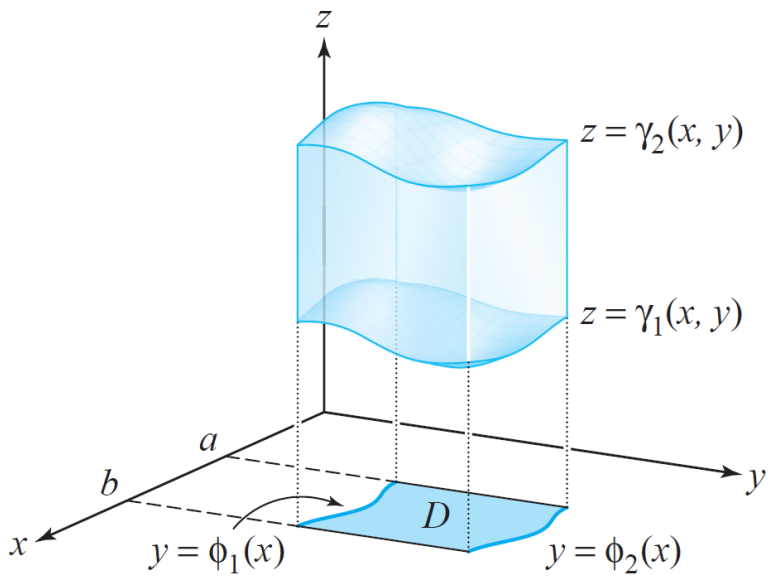
24. Calcular las siguientes integrales sobre las cajas indicadas, eligiendo un orden conveniente:

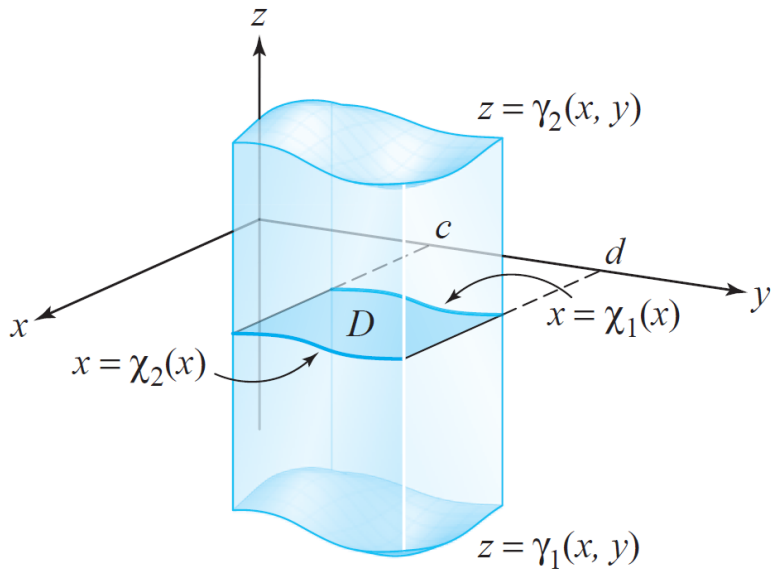
a) $\iiint_B x^2 \, dV, \quad B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1].$

c) $\iiint_B (2x + 3y + z) \, dV, \quad B = [0,2] \times [-1,1] \times [0,1].$

Regiones elementales

Una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (esto es, x-simple o y-simple) en el plano.





Integrales triples sobre regiones elementales

Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,$$

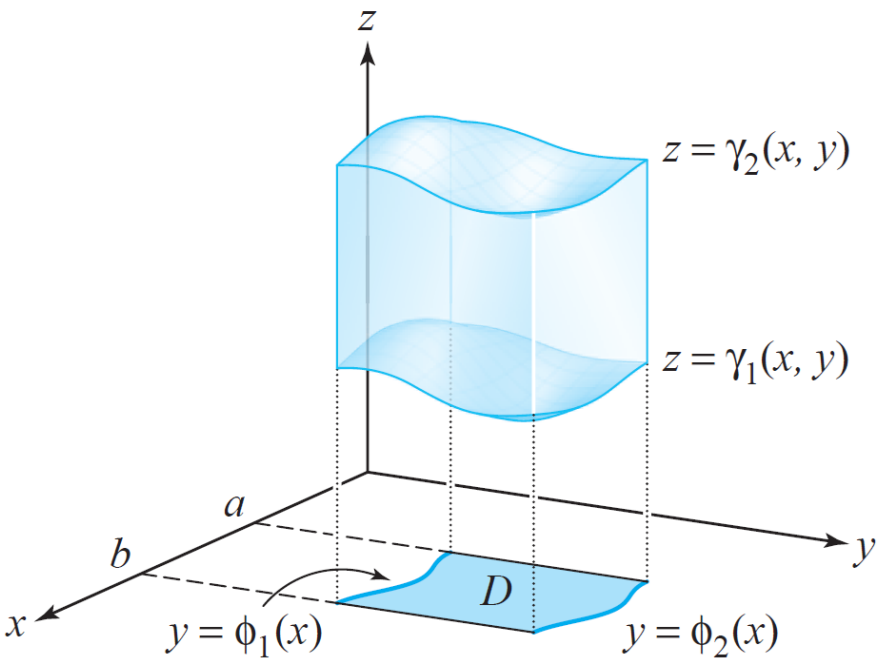
o bien

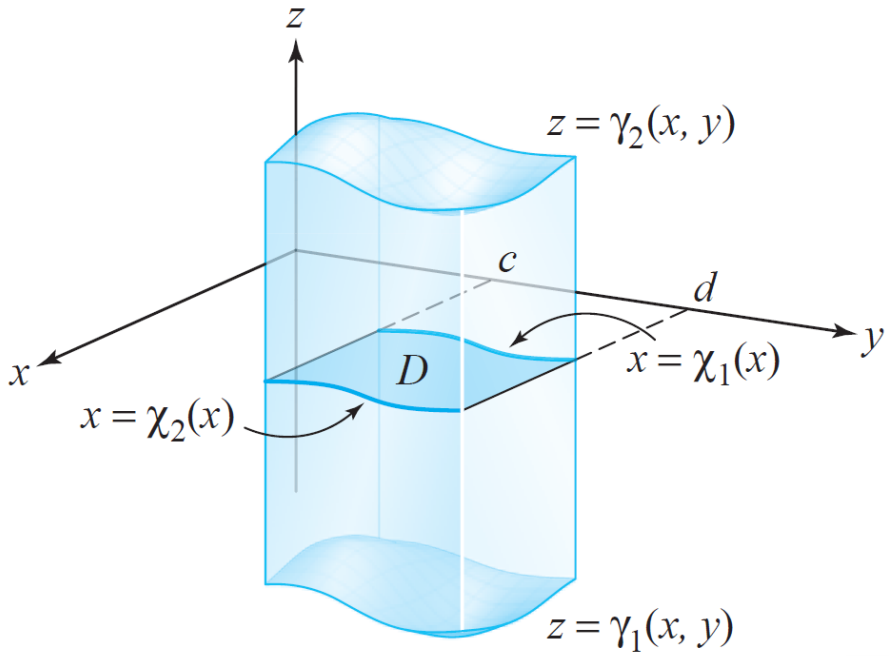
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx\,dy\,dz$, que es el *volumen* de la región W.

Integrales triples sobre regiones elementales

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx; \qquad \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$



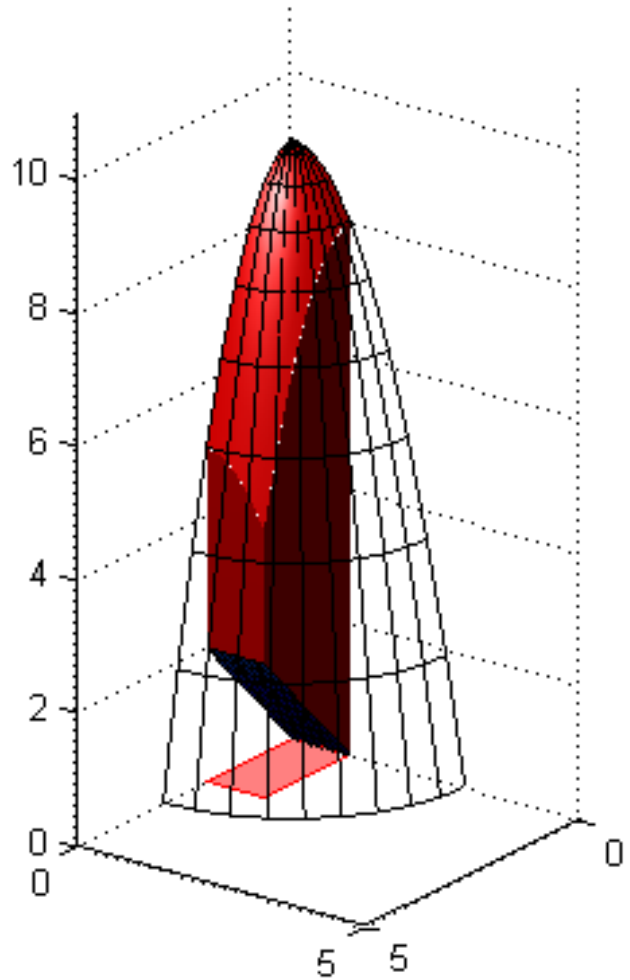


Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.

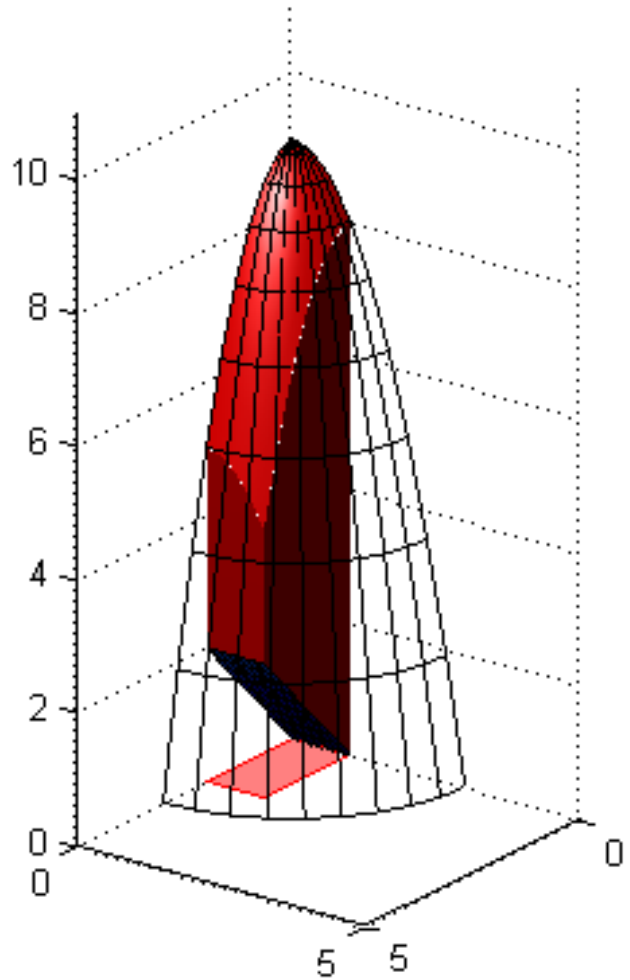
Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



Ejemplo

Haga un planteo para integrar la función continua $f(x, y, z)$ sobre el sólido D, comprendido entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y los planos $z = x$, $x = 2$ y $y = 1$, en el primer octante.



$$\int_0^2 \int_0^1 \int_x^{9-x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

Ejercicio

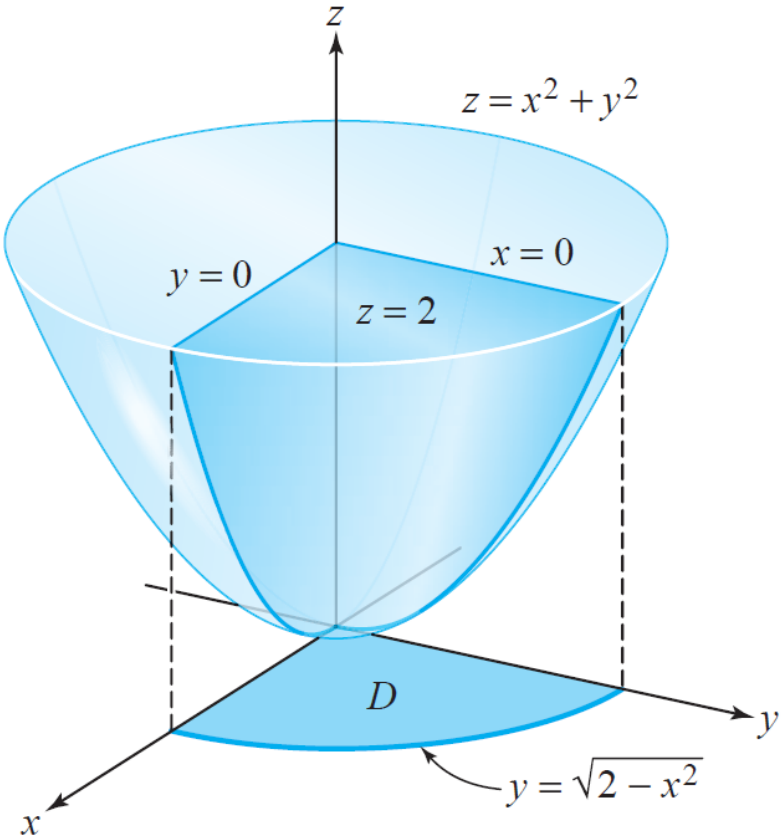
Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

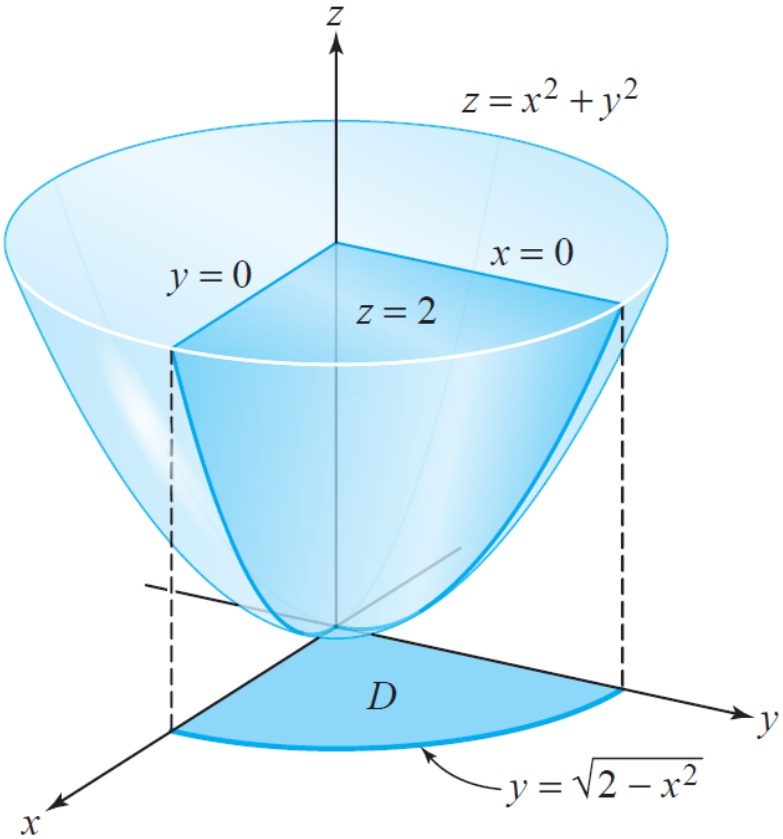
1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



Ejercicio

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x \, dz \, dy \, dx$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Eejercicios del TP3

26. Sea

$$W = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x\}.$$

Describir la proyección de W sobre el plano xy, plantear una integral iterada y calcular

$$\iiint_W \sin x \, dV.$$

Eejercicios del TP3

26. Sea

$$W = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x\}.$$

Describir la proyección de W sobre el plano xy, plantear una integral iterada y calcular

$$\iiint_W \sin x \, dV.$$

27. Sea W el sólido del primer octante limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
   - a) (o) Dibujar W y su proyección sobre el plano xy.
   - b) (o) Plantear una integral triple y calcular el volumen de W.
   - c) (r) Calcular $\iiint_W z \, dV$.

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Fórmula del cambio de variables, relación con la vista en AMI

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles)

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1; supóngase que T es inyectiva y que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Integrales dobles en coordenadas polares

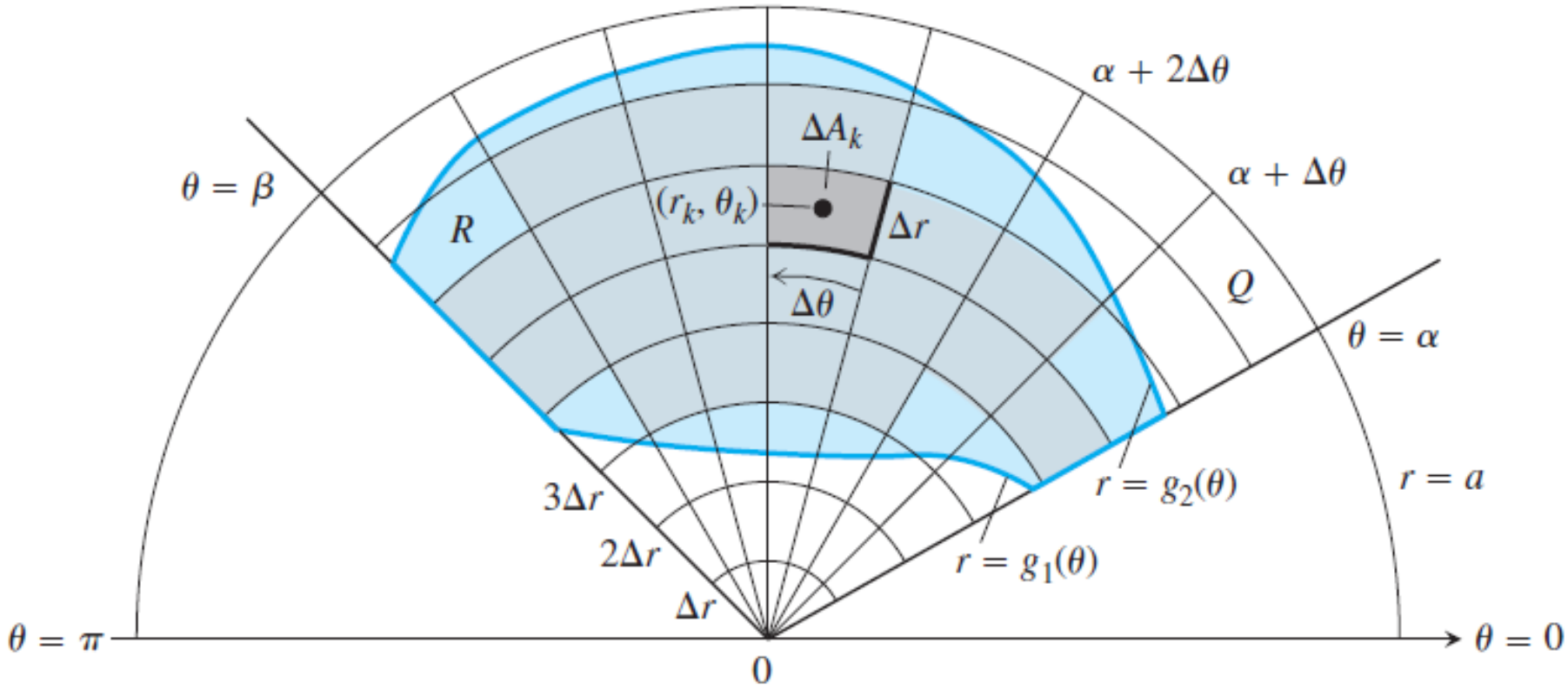
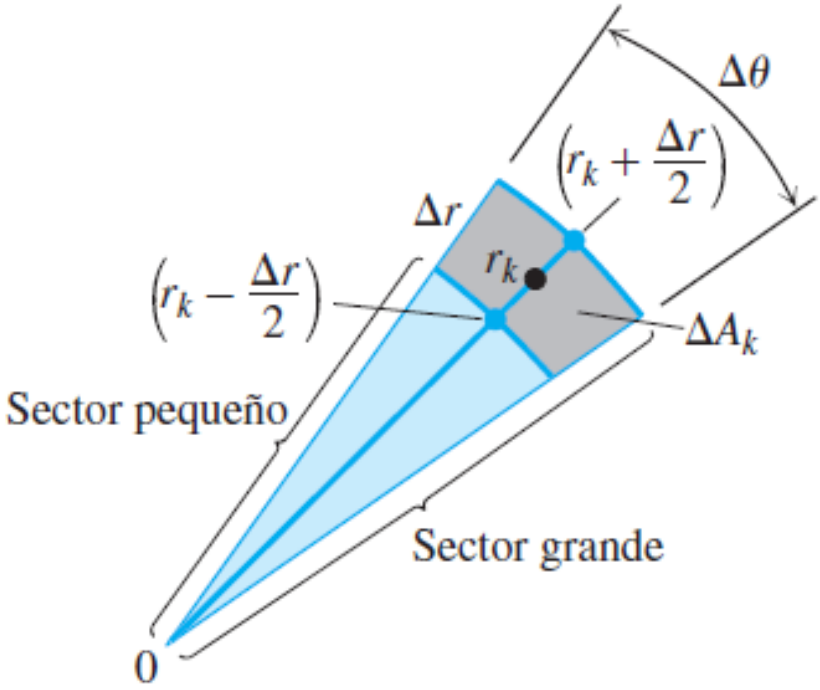


FIGURA 15.21 La región R: $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \le r \le a$, $\alpha \le \theta \le \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

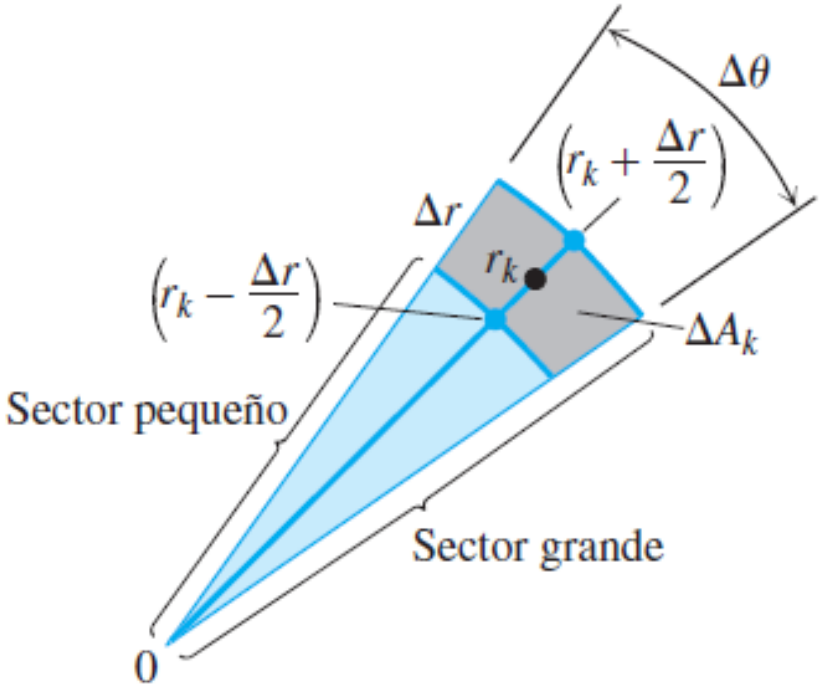
Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta$.



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

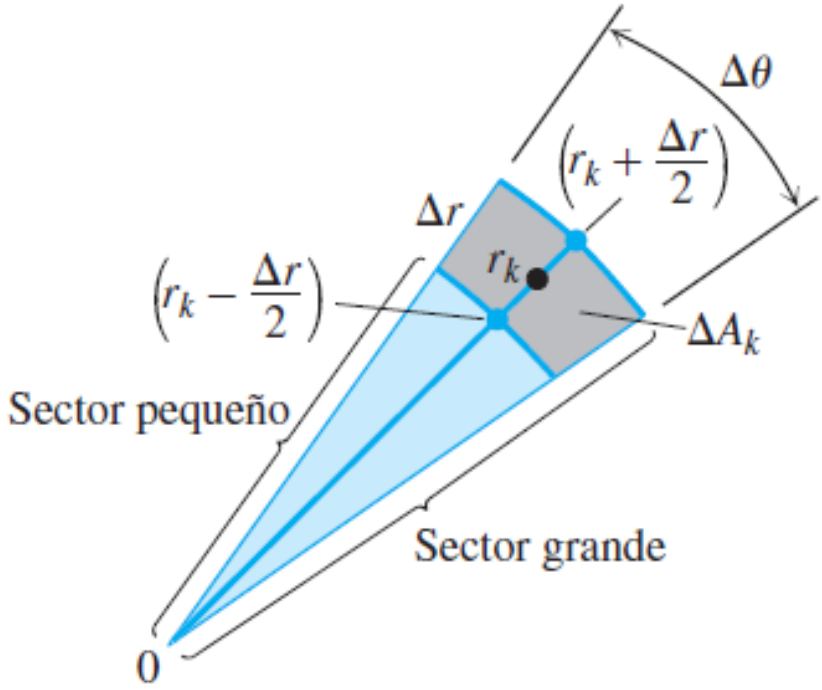
FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

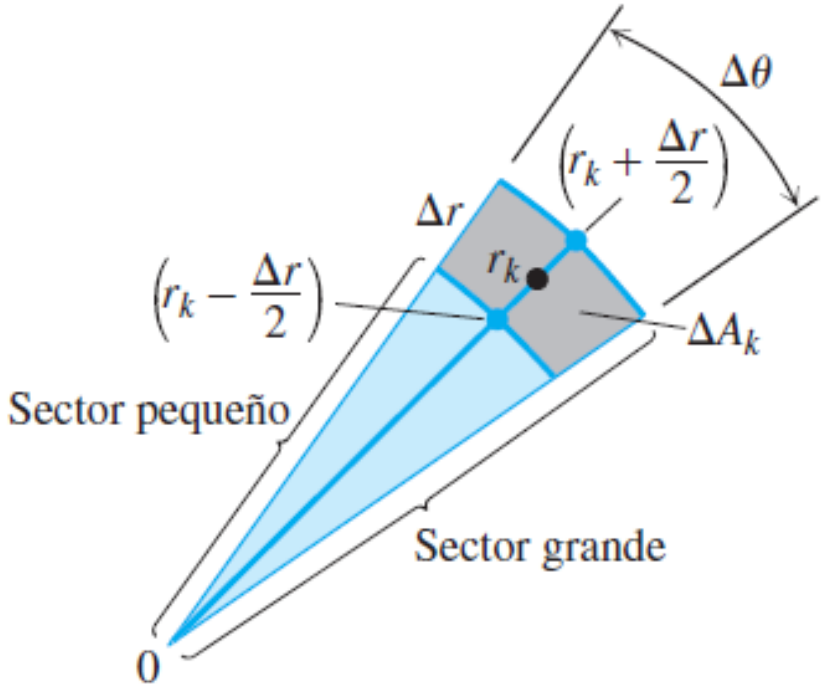
nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

Radio interior: $\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$

FIGURA 15.22 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del sec-}\\ \text{tor más pequeña}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta$.

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

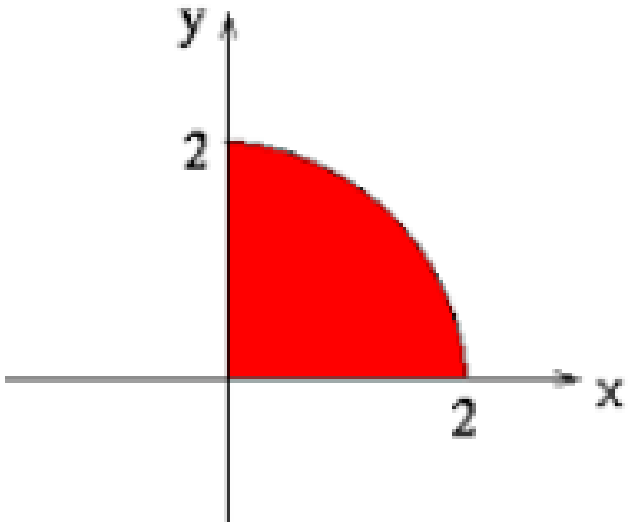
por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

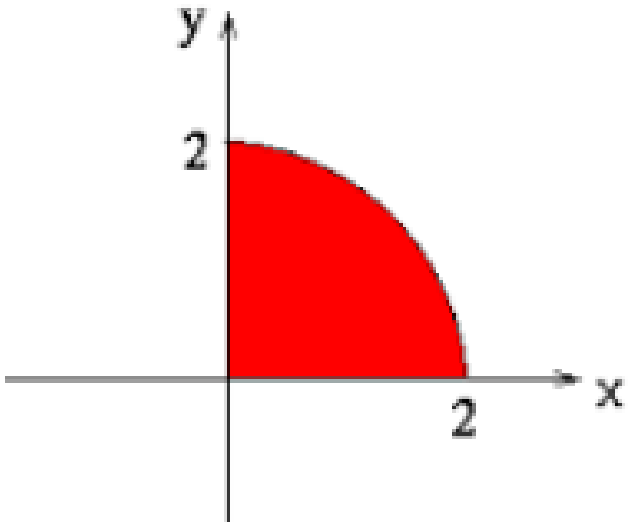


Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.



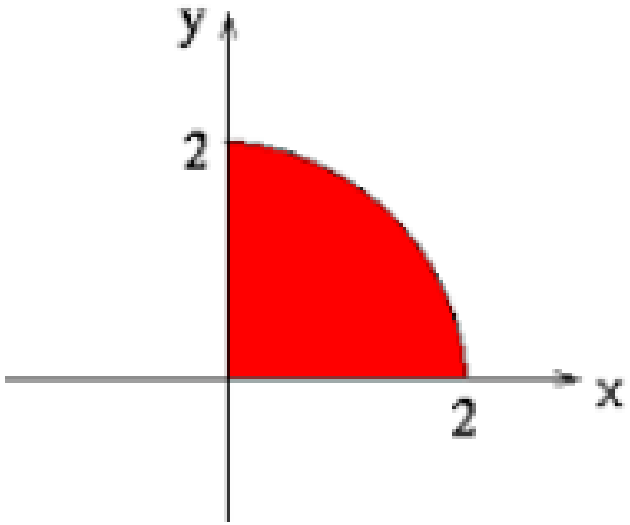
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta$$

Ejercicio

Cambie la integral cartesiana

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.



$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy. Hay más casos pero nos limitaremos a este.

Nota sobre el cambio en integrales triples

Las coordenadas cilíndricas aparecen cuando aplicamos coordenadas polares en el plano xy. Hay más casos pero nos limitaremos a este.
El jacobiano de la transformación es r, igual que antes.

Ejercicio (revisión)

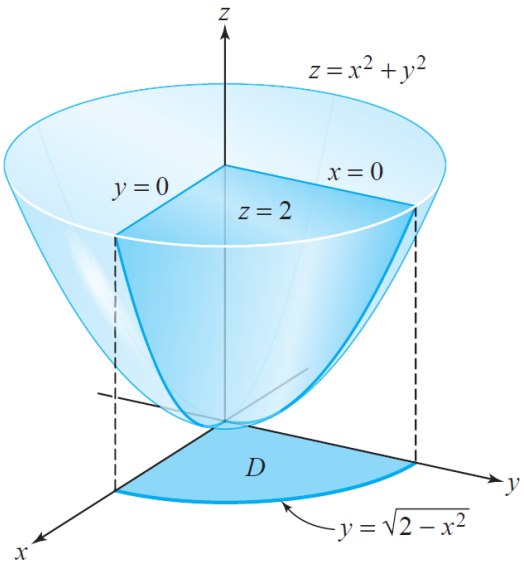
Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

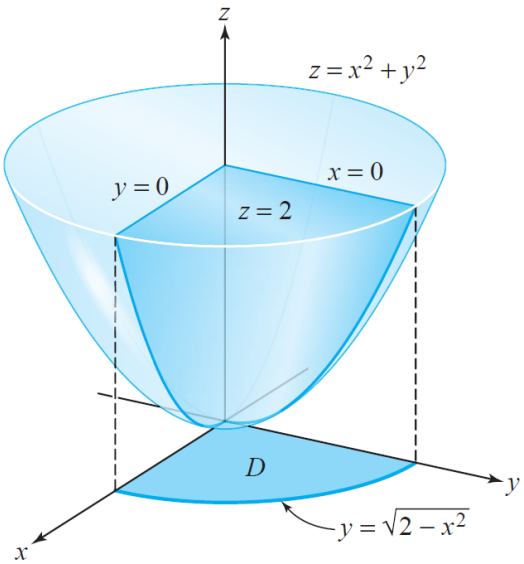
1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.

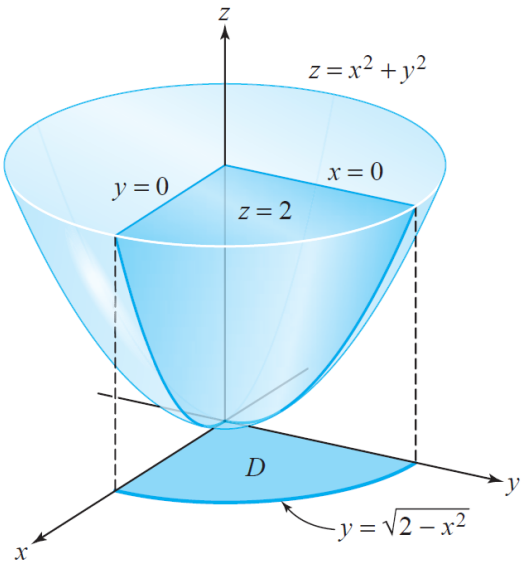


$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$$

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$.



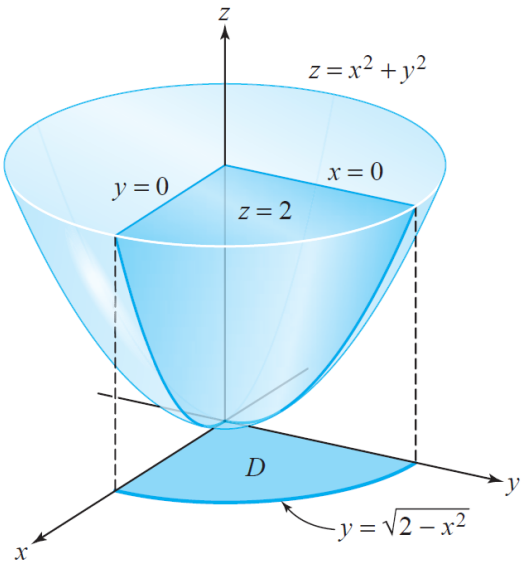
$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{2} r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta =$$

Ejercicio (revisión)

Sea W la región que está en el primer octante, limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$.

1. Realizar un esbozo de la región.
2. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$.



$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{2} r^2 \cos(\theta)\,dz\,dr\,d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Ejercicios del TP3

29. Dibujar las siguientes regiones y describirlas en coordenadas polares, usando $r \geq 0$:

   a) (o) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

   b) (o) $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0\}$.

   c) (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

   d) (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Ejercicios del TP3

29. Dibujar las siguientes regiones y describirlas en coordenadas polares, usando $r \geq 0$:
    - $a)$ (o) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
    - $b)$ (o) $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0\}$.
    - $c)$ (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.
    - $d)$ (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.
30. Resolver mediante integrales dobles en coordenadas polares:
    - $a)$ Calcular el área del disco $D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, donde $R > 0$. Explicitar los límites y el factor que transforma el elemento de área.
    - $b)$ (r) Calcular el área de la corona $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$, donde $0 < R_1 < R_2$, y comprobar el resultado restando las áreas de dos discos.

Ejercicios del TP3

32. Dibujar la región, cambiar cada integral cartesiana por una integral polar equivalente y evaluar la integral polar:

    a) (o) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$

33. Sea $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ y sea $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

    a) Una estudiante propone

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2}\,dr\,d\theta.$$

    Identificar el error, corregir el planteo y calcular la integral.

    b) Calcular el valor medio de f sobre D.

Ejercicios del TP3

35. Para cada sólido B, describir su proyección sobre el plano xy, expresar esa proyección y los límites de z en coordenadas cilíndricas y plantear la integral iterada correspondiente. Utilizar $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ al integrar primero respecto de z.

$a)$ (o) Calcular $\iiint_B z\,dV$, donde B está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano $z = 0$ y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$b)$ (o) Calcular el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

$c)$ (r) Calcular $\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV$, donde B está limitado por debajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por arriba por el cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicios del TP3

34. (*) Dibujar la región, transformar a polares y calcular

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx.$$

Indicación: reconocer la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ y tener en cuenta la condición $x \geq 1$ al determinar los límites radiales.

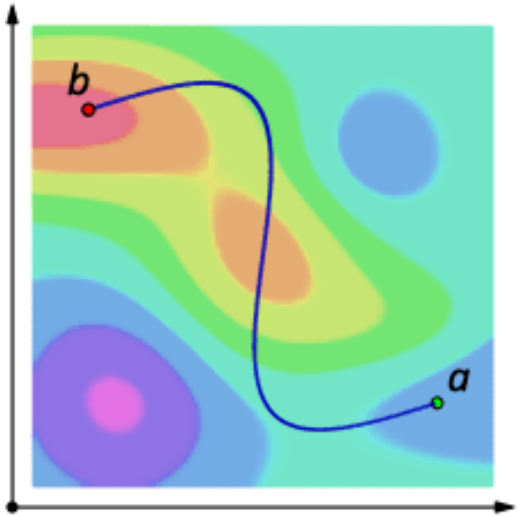
Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

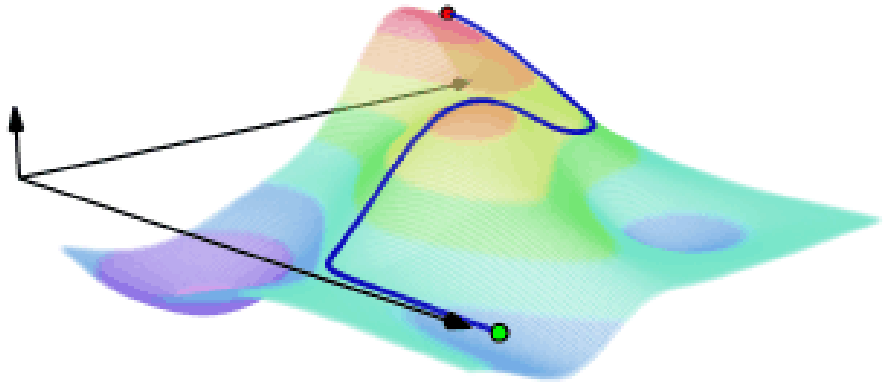
Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

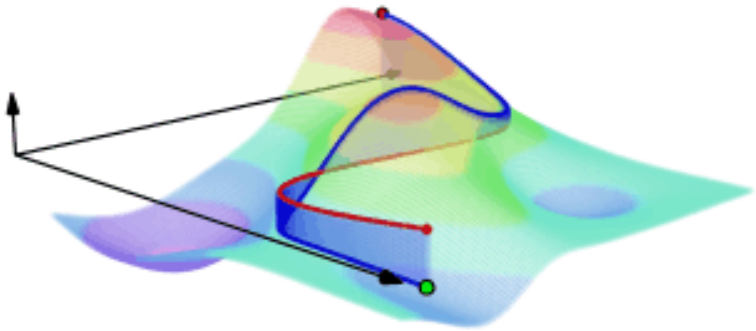
Interpretación

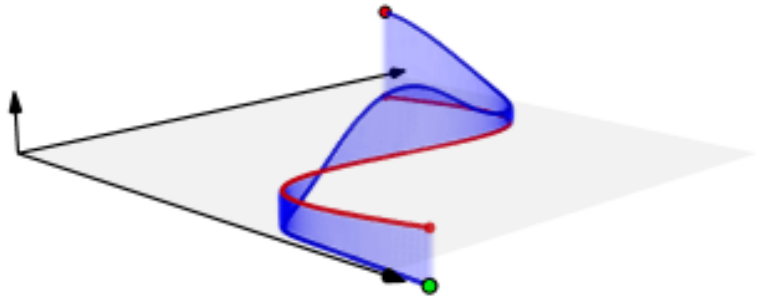


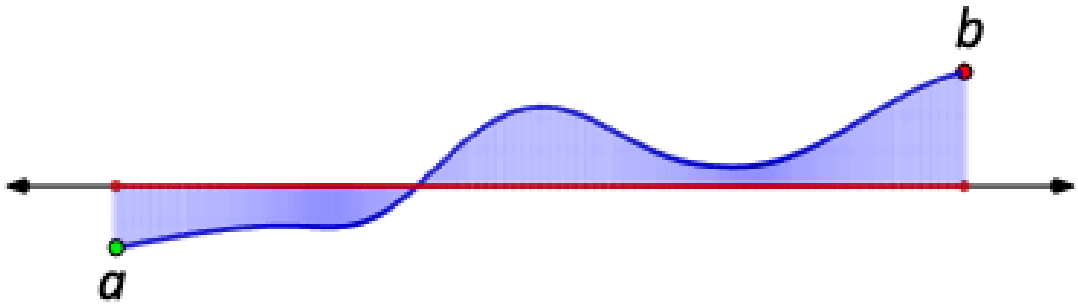
C



Interpretación



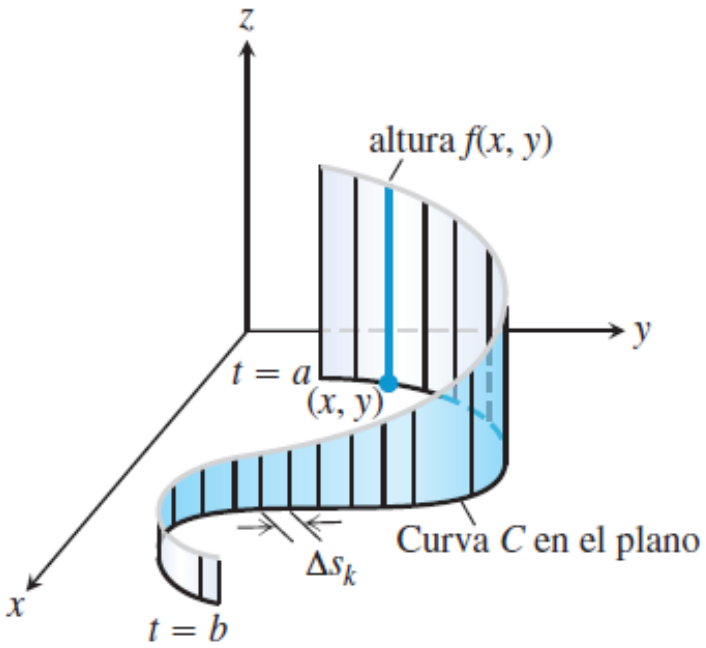


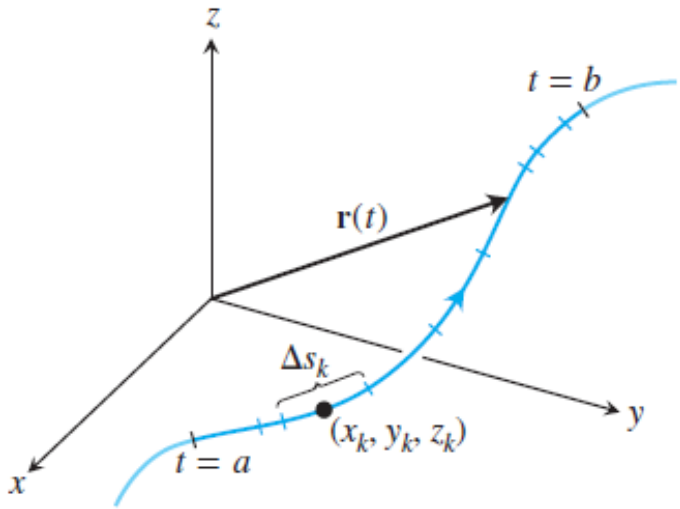


$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Integrales a lo largo de trayectorias





Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el plano)

La integral de $f(x,y)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ es continua en $[a,b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, \big\|\mathbf{c}'(t)\big\|\, dt.$$

A veces, $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ se denota por $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f(x,y)\, ds$.

Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ descomponiendo $[a,b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t))\, \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y sumando las integrales sobre los segmentos.

Definición (Integrales a lo largo de trayectorias en el espacio)

La integral de $f(x,y,z)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ es continua en $[a,b]$. Definimos esta integral por

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,\big\|\mathbf{c}'(t)\big\|\,dt.$$

A veces, $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ se denota por $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\,ds$.

Si $\mathbf{c}$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{c}$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ descomponiendo $[a,b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua, sumando las integrales sobre los segmentos.

Propiedades

La integral de un campo escalar continuo a lo largo de una trayectoria C^1:

- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto se mantenga la propiedad de ser de tipo C^1.
- es independiente del sentido de recorrido de la curva.

Propiedades

La integral de un campo escalar continuo a lo largo de una trayectoria C^1:

- es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto se mantenga la propiedad de ser de tipo C^1.
- es independiente del sentido de recorrido de la curva.

Teorema (Cambio de parametrización para integrales a lo largo de trayectorias)

Sea $\mathbf{c}$ *una trayectoria* C^1 *a trozos,* f *una función continua con valores reales definida sobre la imagen de* $\mathbf{c}$ *y sea* $\mathbf{r}$ *cualquier reparametrización de* $\mathbf{c}$*. Entonces*

$$\int_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\,ds = \int_{\mathbf{r}} f(x,y,z)\,ds.$$

Por ello, si la imagen de $\mathbf{c}$ *es* C*, escribimos*

$$\int_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\,ds = \int_{\mathbf{r}} f(x,y,z)\,ds = \int_{C} f(x,y,z)\,ds.$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

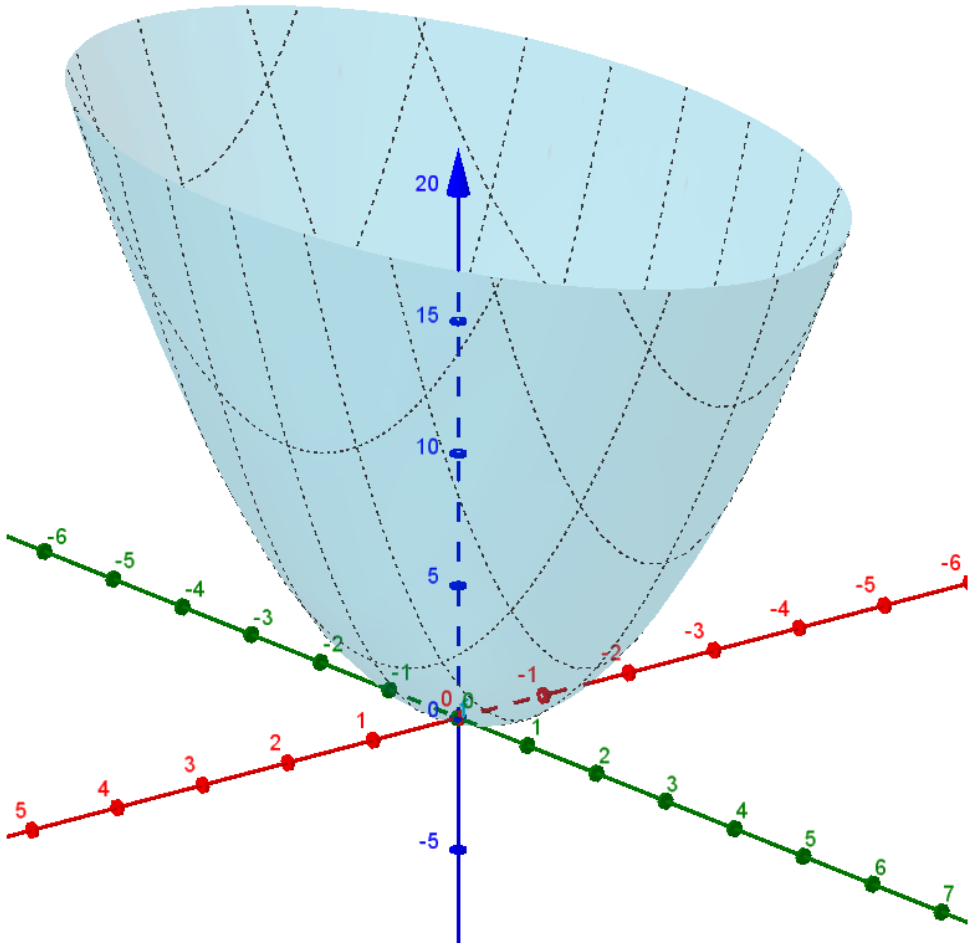
a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

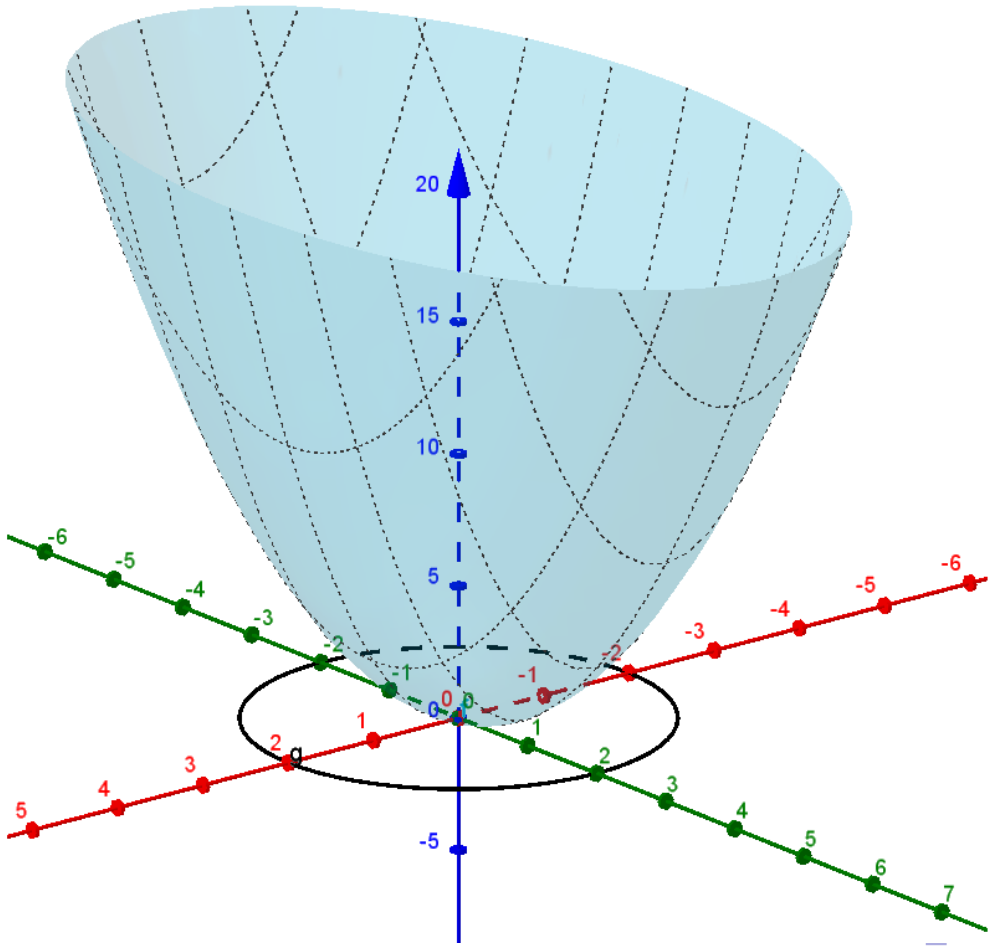


Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

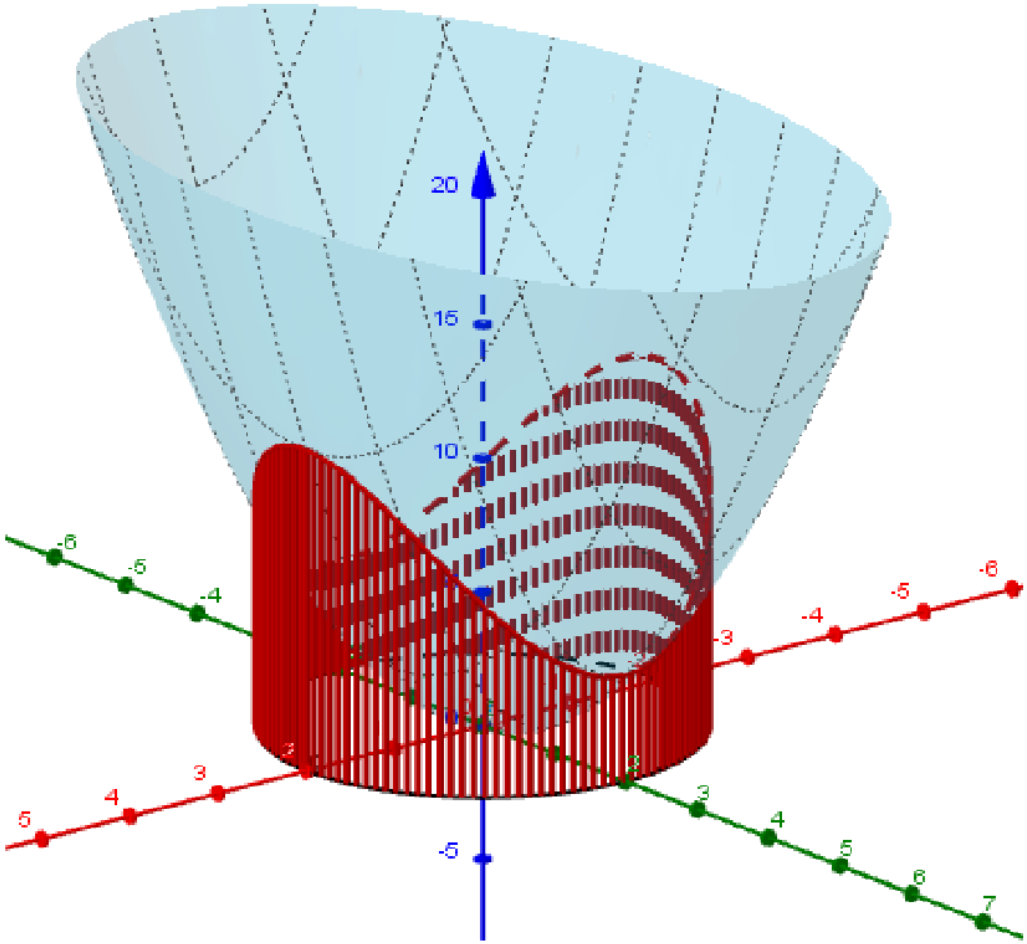


Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

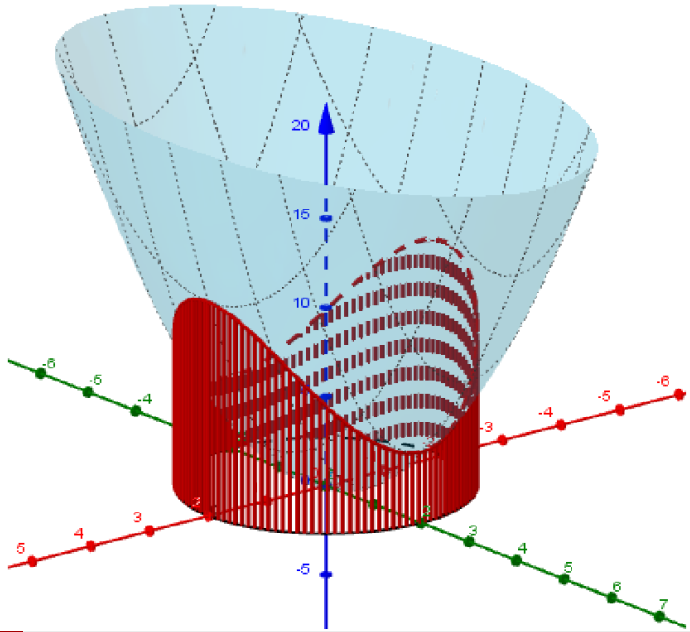
$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt =$$

Ejemplo: integral a lo largo de una trayectoria

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \le t \le 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (3 \cdot 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t))\, 2dt$$

$$= 24\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + 8\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(t)dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi.$$



Ejercicios del TP3

36. Calcular las siguientes integrales a lo largo de las trayectorias indicadas. En cada caso, explicitar $f(\mathbf{r}(t))$ y $\|\mathbf{r}'(t)\|$.

a) (o) $\displaystyle\int_C (x+y)\,ds, \quad \mathbf{r}(t) = (t, 1-t, 0), \quad 0 \le t \le 1.$

b) (r) $\displaystyle\int_C (xy+y+z)\,ds, \quad \mathbf{r}(t) = (2t, t, 2-2t), \quad 0 \le t \le 1.$

c) (r) $\displaystyle\int_C x\,ds, \quad \mathbf{r}(t) = (t, t/2), \quad 0 \le t \le 4.$

d) (r) $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}\,ds, \quad \mathbf{r}(t) = (t, t, t), \quad 1 \le t \le 2.$

Ejercicios del TP3

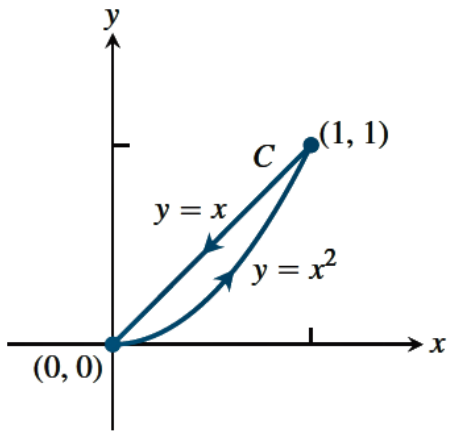
37. Calcular las siguientes integrales:

a) (o) La integral de $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$ sobre la semicircunferencia

$$\mathbf{r}(t) = (0, a\cos t, a\sin t), \qquad 0 \leq t \leq \pi, \qquad a > 0.$$

b) (r) La integral de $f(x, y) = x^2 - y$ sobre el arco de $x^2 + y^2 = 4$ contenido en el primer cuadrante, desde $(0, 2)$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

c) (o) $\displaystyle\int_C (x + \sqrt{y})\, ds$, donde C está formada por el segmento $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, y el arco de parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Ambos tramos se recorren una sola vez.



Ejercicios del TP3

38. Un robot móvil debe trasladarse dentro de un almacén. El costo de energía por unidad de longitud depende de la posición y está dado por

$$f(x, y) = 1 + 0{,}1x + 0{,}05y.$$

a) (o) Parametrizar el segmento desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (4, 3)$ y calcular el costo del recorrido mediante una integral apropiada.

b) (o) Comparar con el recorrido que va primero de $(0, 0)$ a $(4, 0)$ y luego a $(4, 3)$ mediante dos segmentos. ¿Cuál de estos dos recorridos tiene menor costo? Explicar qué papel cumplen la longitud y los valores de f sobre cada camino.

c) (*) Proponer una modificación del modelo que agregue una penalización no negativa cuando el robot se acerque al punto $(4, 2)$. Explicar el significado del término añadido. No se pide evaluar la integral correspondiente al nuevo modelo.

Recorrido

1. Revisión de integrales de funciones de una variable
2. Integrales dobles e iteradas
   - Teorema de Fubini
   - La integral doble sobre regiones más generales
   - Teorema del valor medio para integrales dobles
3. Integrales triples
4. Cambio de variables en integrales dobles
5. Integrales sobre curvas
   - Integrales a lo largo de trayectorias
   - Integrales de línea de campos vectoriales

Definición de la integral de línea

Definición (Integrales de línea)

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, por la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt.$$

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos: integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ con $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Definición de la integral de línea

Definición (Integrales de línea)

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, por la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt.$$

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos: integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ con $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a, b]$.
Si $\mathbf{r}$ da la posición de un móvil, suele escribirse

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Teorema (Propiedades)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una trayectoria de clase C^1:

- *La integral de línea de $\mathbf{F}$ es independiente de la parametrización de la trayectoria, en tanto sea de clase C^1. Por ello se suele escribir:*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- *La integral de línea de $\mathbf{F}$ es dependiente del sentido de recorrido de la curva: si llamamos C^- a la misma curva que C pero con orientación opuesta,*

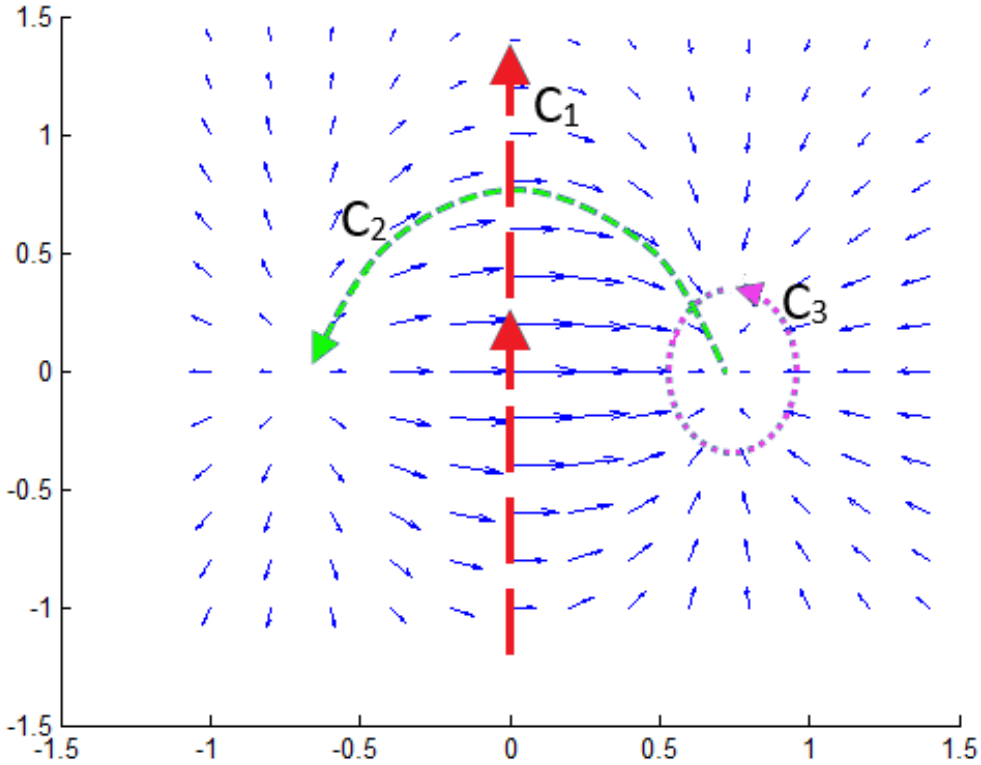
$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- *Si C es la unión por los extremos de C_1, C_2,...,C_k, (orientadas) entonces se escribe $C = C_1 + \cdots + C_k$ y*

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

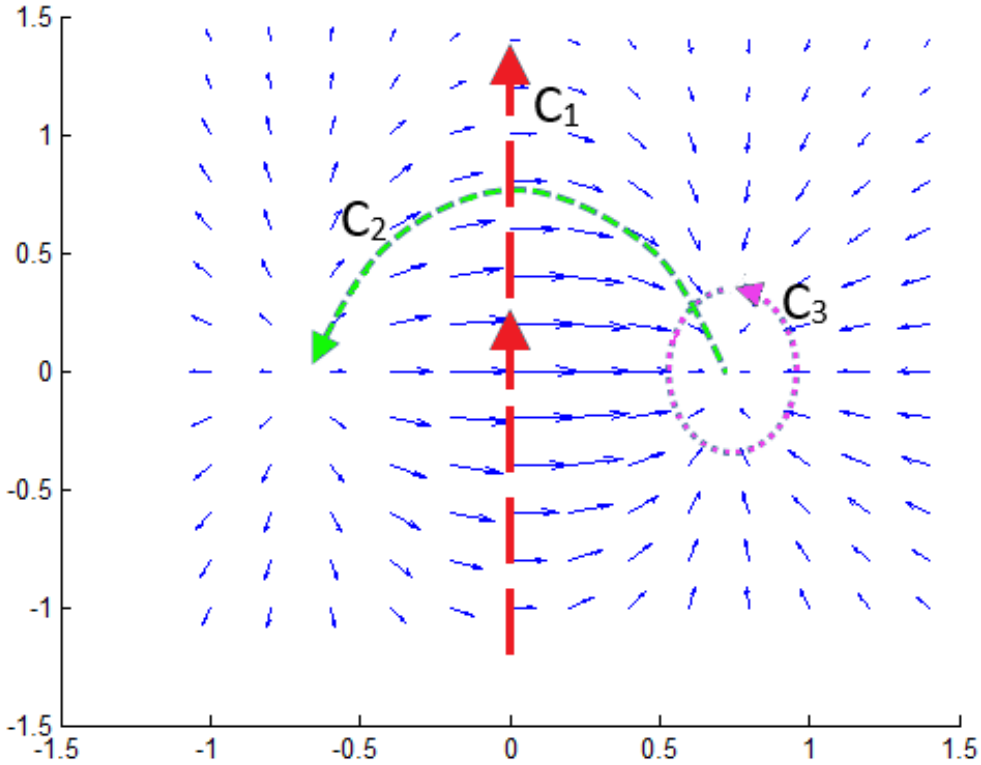
Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



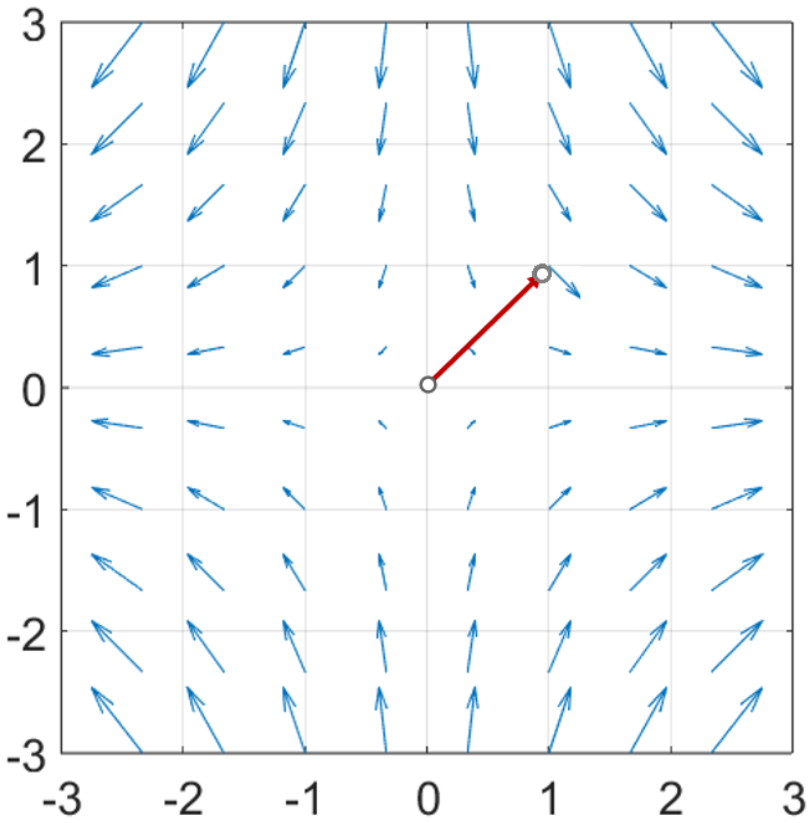
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0; \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0; \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx 0.$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = \binom{x}{-y}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \binom{t}{t}$, $0 \leq t \leq 1$.

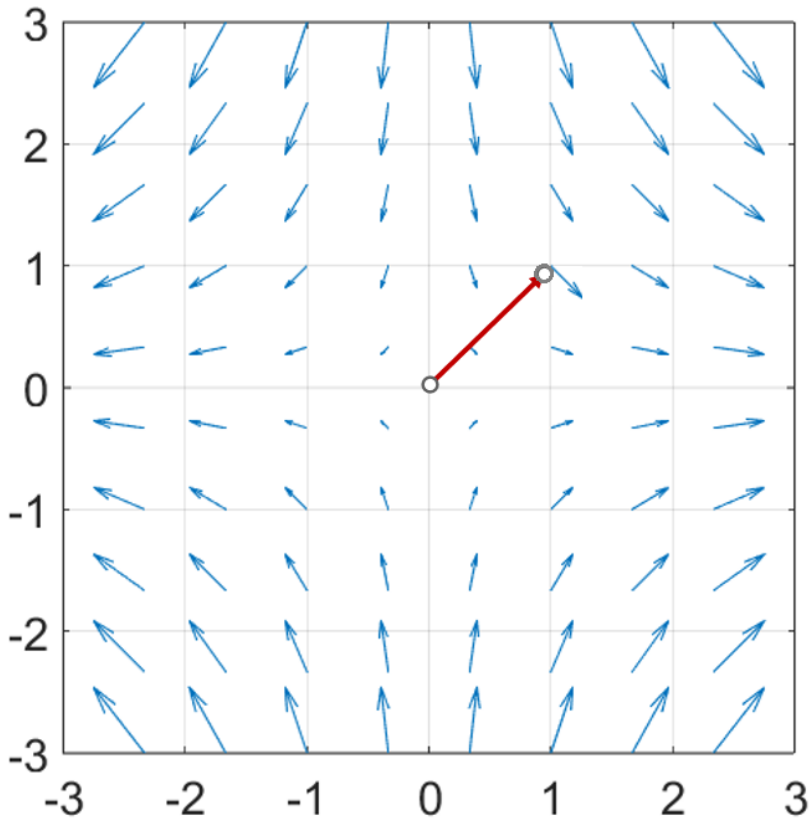
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.



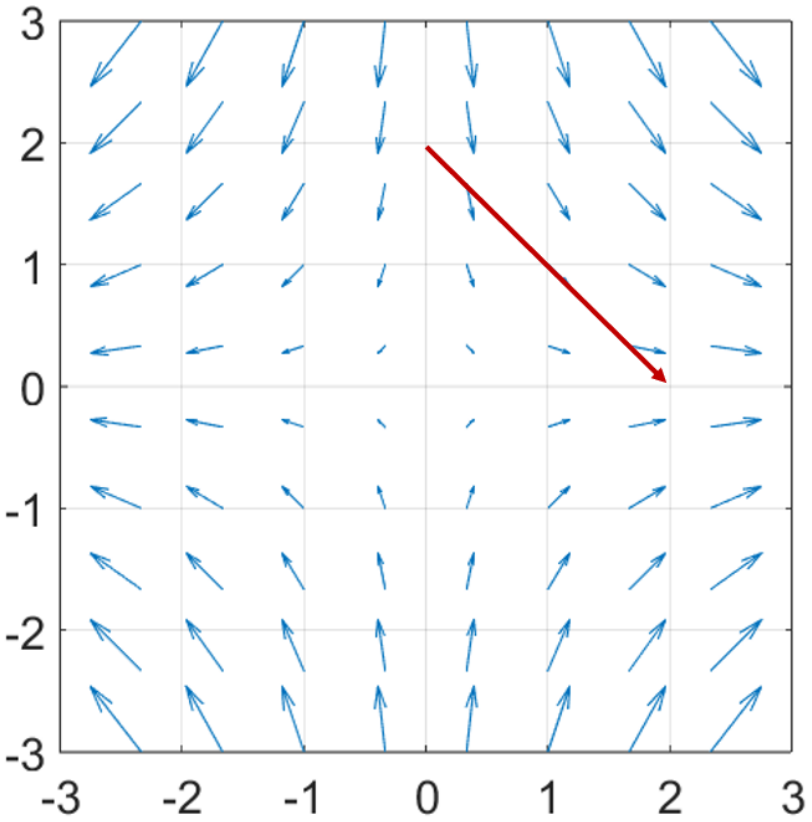
$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 0\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2$.

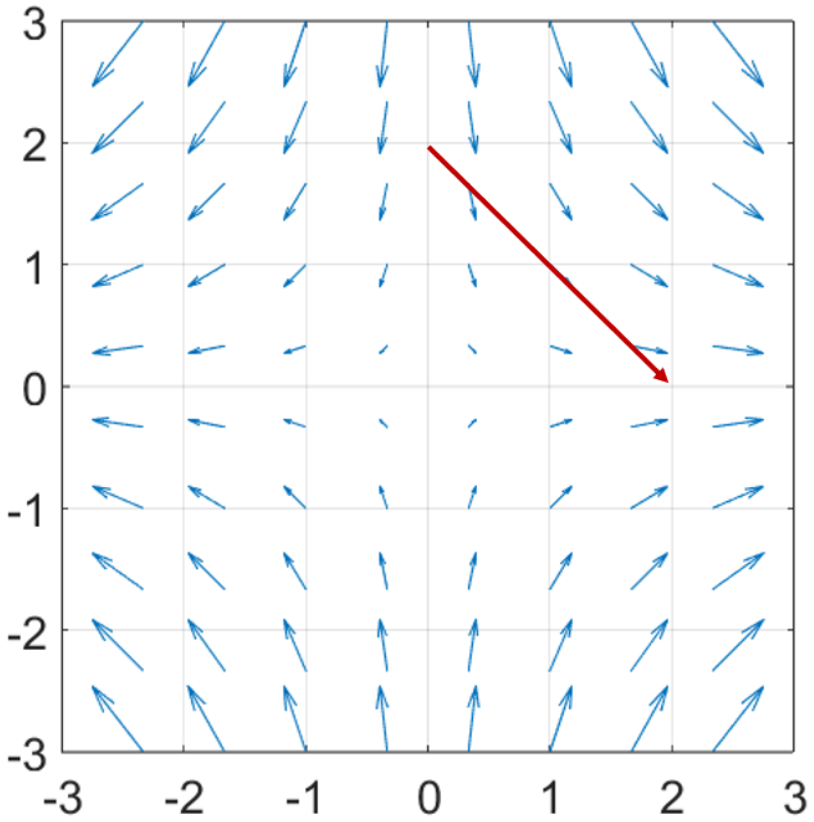
Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2$.



Ejercicio

Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ sobre $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2$.



$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^2 (t - t + 2)\, dt \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Ejercicios del TP3

40. Considerar los campos

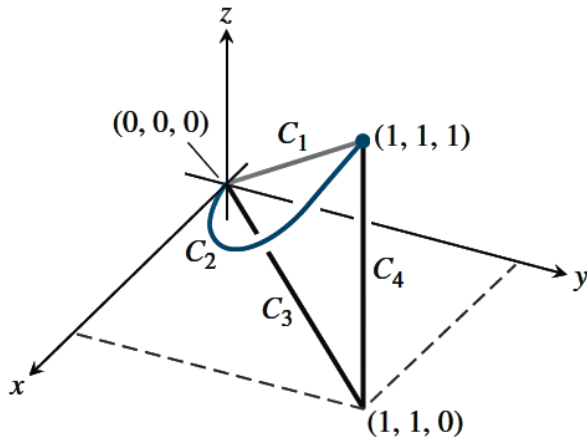
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (xy, yz, xz).$$

Calcular por parametrización las integrales de línea de ambos campos desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$ sobre las trayectorias:

a) El segmento C_1 que une los dos puntos.

b) La curva C_2 parametrizada por $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \leq t \leq 1$.

c) El recorrido $C_3 + C_4$, donde C_3 va de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$ y C_4 va de $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$, en ambos casos mediante segmentos.



Comparar los resultados para cada campo. ¿En cuál de los dos casos los cálculos muestran dependencia del recorrido? ¿Basta obtener el mismo valor sobre estas tres trayectorias para afirmar que ocurre lo mismo sobre todas las trayectorias entre los extremos? Justificar.

Ejercicios del TP3

42. (o) Sean $f(x,y) = x + y$ y $\mathbf{F}(x,y) = (y, 0)$. Considerar las trayectorias

$$\mathbf{r}(t) = (t,t), \quad 0 \leq t \leq 1, \qquad \boldsymbol{\sigma}(u) = (u/2, u/2), \quad 0 \leq u \leq 2,$$

y $\boldsymbol{\eta}(v) = (1-v, 1-v)$, $0 \leq v \leq 1$.

a) Describir la imagen y el sentido de recorrido de cada trayectoria.

b) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbf{r}} f\, ds$ y $\displaystyle\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

c) Sin repetir todas las cuentas, determinar las integrales del campo escalar y del campo vectorial sobre $\boldsymbol{\sigma}$ y sobre $\boldsymbol{\eta}$. Justificar con las propiedades correspondientes.

Ejercicios del TP3

43. Analizar las integrales de línea a partir de los campos representados en las siguientes figuras, sin buscar una expresión algebraica de los campos:

$a)$ Para el campo de la figura 1 y la circunferencia unitaria centrada en el origen, recorrida en sentido antihorario, indicar si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o nula. Justificar geométricamente.

$b)$ Dibujar, para el campo de la figura 1, una curva suave no constante sobre la que la integral de línea sea nula.

$c)$ Para el campo de la figura 2, estimar el signo de la integral sobre C_1 y sobre C_2, con las orientaciones indicadas. Justificar a partir de la dirección del campo respecto de las tangentes a cada curva.

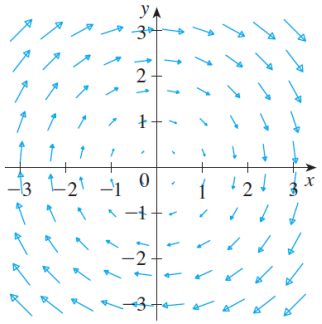


figura 1

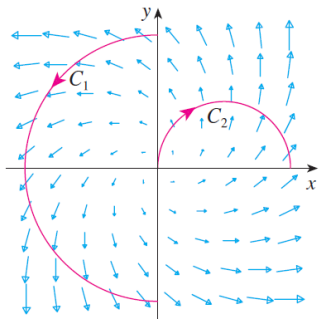


figura 2

Ejercicios del TP3

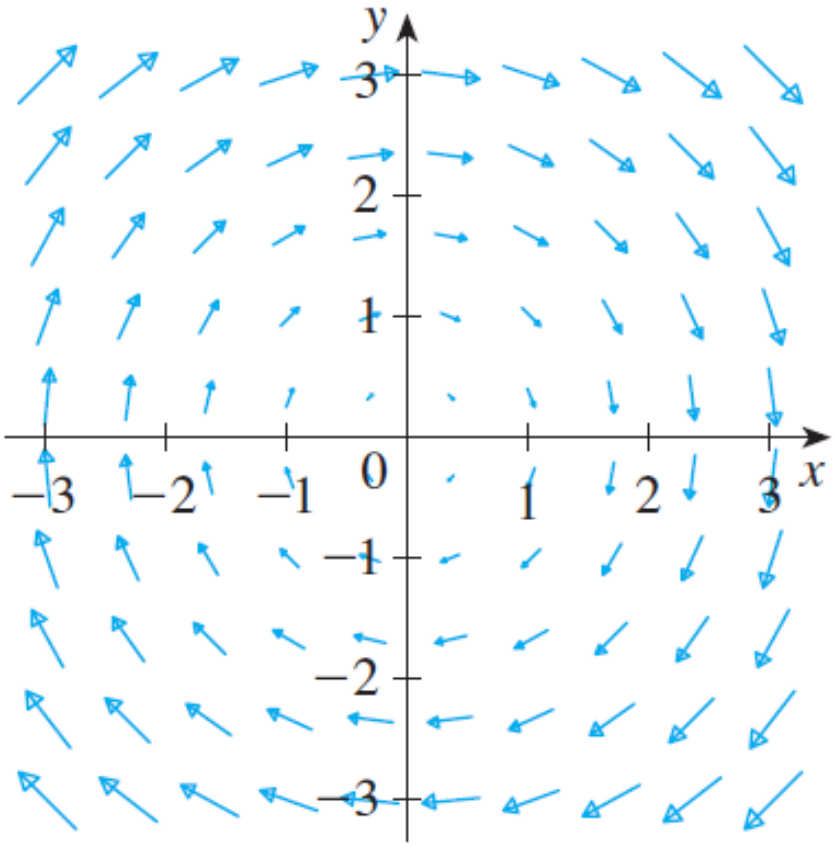


figura 1

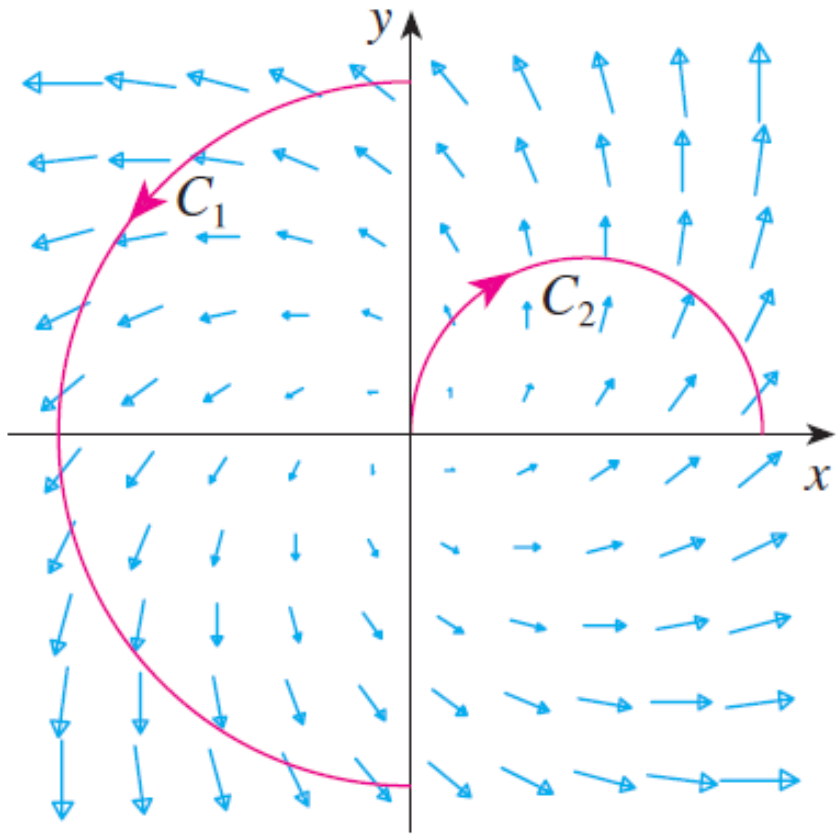


figura 2