MATEMÁTICA PARA COMPUTACIÓN - 2026

Trabajo Práctico N°3:
Integrales múltiples e integrales sobre curvas

Consideraciones Generales: Selección de ejercicios de temas de la Unidad 3, Integrales múltiples e integrales sobre curvas. Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro *"Cálculo vectorial"* de Marsden, J.E. y Tromba, A.J., quinta edición, Ed. Pearson.

Algunos de estos ejercicios deben ser resueltos por los estudiantes en clase con el docente y los restantes, fuera de clase. Para ello, los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), que se resolverán en clase; recomendados no obligatorios (r), que serán resueltos por los estudiantes fuera de clase y opcionales (*), que cada estudiante puede elegir si lo resuelve o no. Pueden resolverse de manera individual o grupal. No serán solicitados por los docentes.

Objetivos: al finalizar el trabajo práctico, el estudiante será capaz de:

- Formular, plantear y evaluar integrales múltiples sobre regiones generales, determinando correctamente los límites de integración iterados y aplicando las propiedades fundamentales del cálculo integral multivariable.
- Evaluar integrales múltiples mediante transformaciones y cambios de variables adecuados (coordenadas polares y cilíndricas), calculando e interpretando el jacobiano de la transformación.
- Determinar áreas, volúmenes, valores medios y otras aplicaciones geométricas de campos escalares y vectoriales mediante la integración múltiple en dos y tres dimensiones.
- Evaluar integrales de línea de campos escalares y vectoriales sobre curvas parametrizadas, analizando el efecto de la orientación de la trayectoria y comprendiendo su interpretación física y geométrica.
- Aplicar el cálculo de integrales múltiples y sobre curvas en el modelado y resolución de problemas aplicados, articulando los métodos analíticos con la intuición geométrica.
- Comunicar procedimientos y fundamentaciones matemáticas con rigor técnico y lenguaje formal explícito, demostrando autonomía y compromiso ético en la resolución individual o colaborativa.

1. Integrales dobles

1.1. Integrales dobles e iteradas

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

   a) (o) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)\,dy\,dx.$

   b) (o) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1}(y\cos x+2y)\,dy\,dx.$

   c) (r) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}xye^{x+y}\,dy\,dx.$

   d) (r) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2}(-x\ln y)\,dy\,dx.$

2. (r) Calcular las integrales de los incisos (a) y (b) del Ejercicio 1 integrando primero respecto de x y después respecto de y. Enunciar el resultado de la teoría que permite comparar los valores obtenidos.

3. (r) Resolver usando el principio de Cavalieri:

   a) Explicar por qué dos cilindros, uno recto y otro oblicuo, tienen el mismo volumen si sus bases tienen la misma área y sus alturas son iguales. Considerar secciones paralelas a las bases.

   b) Un sólido se extiende desde $z=0$ hasta $z=4$. Para cada $z\in[0,4]$, la sección horizontal es un rectángulo de lados 5 y 3, aunque su posición puede variar con z. Calcular el volumen del sólido y justificar por qué no es necesario conocer la posición de cada rectángulo.

1.2. Integrales dobles sobre rectángulos

4. Calcular las siguientes integrales sobre $R = [0, 2] \times [-1, 0]$:

   a) (o) $\iint_R (x^2y^2 + x)\, dA$.

   b) (r) $\iint_R -y \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\, dA$.

   c) (r) $\iint_R -xe^x \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\, dA$.

5. Plantear una integral doble y calcular el volumen del sólido situado sobre la región R del plano xy y bajo la gráfica de $z = f(x, y)$:

   a) (o) $f(x, y) = 1 + 2x + 3y, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$.

   b) (r) $f(x, y) = xy, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$.

   c) (r) $f(x, y) = \sin y, \quad R = [0, 1] \times [0, \pi/2]$.

6. Calcular las siguientes integrales sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$, eligiendo un orden de integración conveniente. No es necesario calcularlas en ambos órdenes.

   a) (o) $\iint_R ye^{xy}\, dA$.

   b) (r) $\iint_R x^m y^n\, dA, \quad m, n > 0$.

   c) (r) $\iint_R \sin(x + y)\, dA$.

7. (r) Sean $a < b$, $c < d$, f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Demostrar que, para $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\iint_R f(x)g(y)\, dA = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

1.3. Integrales dobles sobre regiones más generales

8. Dibujar las regiones determinadas por los límites de las siguientes integrales, indicar si son x-simples, y-simples o simples y calcular las integrales:

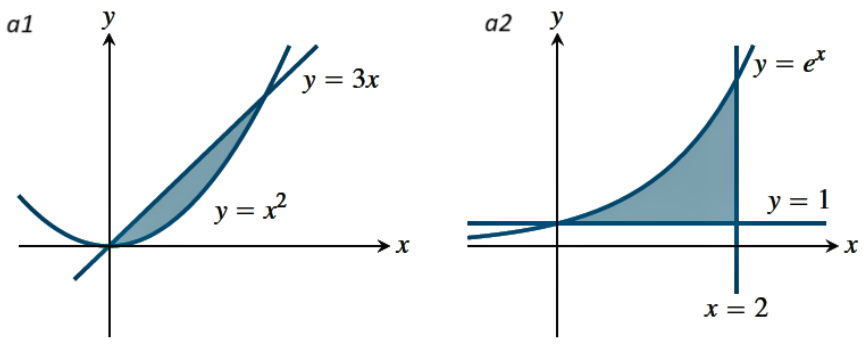
   a) (o) $\int_0^1 \int_0^{x^2} 1\, dy\, dx$.

   b) (r) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} 1\, dy\, dx$.

   c) (r) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y)\, dy\, dx$.

   d) (o) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx$.

9. (o) En cada una de las regiones sombreadas D de la figura, plantear $\iint_D f(x, y)\, dA$ en los órdenes $dy\, dx$ y $dx\, dy$, suponiendo que f es continua. No calcular las integrales.
   La primera región está limitada por $y = x^2$ e $y = 3x$; la segunda, por $y = 1$, $y = e^x$ y $x = 2$.



10. (r) Dibujar las regiones de integración y calcular:

    a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2}(x+y)\,dy\,dx.$

    b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x} y\sin x\,dy\,dx.$

11. (o) Sea D la región limitada por los semiejes positivos de x e y y la recta $2x+y=2$. Dibujar D, elegir un orden de integración y calcular
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA.$$

12. (r) Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x=3-4y^2$. Dibujar D y calcular
$$\iint_D x^3y\,dA.$$
Justificar cómo interviene la simetría de la región en el resultado.

13. (r) Describir y dibujar la región D de integración y calcular
$$\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+xy-y^2)\,dy\,dx.$$

14. (o) Usar una integral doble para calcular el área de la región situada entre la gráfica de $y=\sin x$ y el eje x, para $0\le x\le\pi$. Dibujar la región y escribir sus límites de integración.

15. (r) La identidad del Ejercicio 7 se demostró para un rectángulo. ¿Sigue siendo cierta, para toda región elemental $D\subset[a,b]\times[c,d]$, la igualdad
$$\iint_D f(x)g(y)\,dA=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)?$$
Justificar la respuesta mediante una demostración o un contraejemplo. Puede considerarse una región triangular dentro del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

1.4. Teorema del valor medio y cambio del orden de integración

16. (o) Sea $f(x,y)=x^2+y$ en $R=[0,1]\times[1,3]$.

    a) Calcular $\displaystyle\iint_R f\,dA$ e interpretar el resultado como un volumen.

    b) Calcular el valor medio f_{prom} de f sobre R.

    c) Explicar por qué el teorema del valor medio garantiza un punto $(x_0,y_0)\in R$ con $f(x_0,y_0)=f_{\text{prom}}$ y encontrar uno de esos puntos.

17. (r) En un modelo de temperatura de una placa de CPU se considera
$$f(x,y)=e^{\sin(x+y)},\qquad D=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi].$$
Sin calcular la integral de forma exacta, demostrar que la temperatura promedio satisface
$$\frac{1}{e}\le\frac{1}{4\pi^2}\iint_D f(x,y)\,dA\le e.$$
Indicar qué propiedad de la integral se utiliza.

18. (r) Demostrar, mediante estimaciones del integrando y sin calcular la integral de forma exacta, que
$$\frac{1}{2}(1-\cos 1)\le\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{\sin x}{1+(xy)^4}\,dA\le 1.$$

19. (o) Dibujar la región de integración, invertir el orden y calcular cada integral de las dos maneras:

    a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx.$

    b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} \sin x\,dy\,dx.$

20. (r) Sea D la región descrita por los límites de

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx,$$

    donde f es continua. Dibujar D, describirla como región x-simple y escribir la integral con el orden invertido. No evaluar.

21. (r) Sea D la región descrita por los límites de

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

    donde f es continua. Dibujar D e invertir el orden de integración. Indicar si es necesario dividir la región. No evaluar.

22. Dibujar la región, invertir el orden de integración y calcular por el orden que permita usar una sustitución sencilla. No se pide calcular en el orden original.

    a) (o) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx.$

    b) (r) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{1+y^4}\,dy\,dx.$

23. (*) Sean $a < b$ y f continua en $[a,b]$. Demostrar que

$$2\int_a^b \left(\int_a^x f(x)f(y)\,dy\right) dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.$$

    Indicación: escribir el cuadrado de la integral como una integral doble sobre $[a,b]\times[a,b]$ y dividir ese cuadrado mediante la diagonal $y = x$.

2. Integrales triples

24. Calcular las siguientes integrales sobre las cajas indicadas, eligiendo un orden conveniente:

    a) (o) $\displaystyle\iiint_B x^2\,dV, \quad B = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

    b) (r) $\displaystyle\iiint_B ye^{-xy}\,dV, \quad B = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

    c) (o) $\displaystyle\iiint_B (2x+3y+z)\,dV, \quad B = [0,2]\times[-1,1]\times[0,1].$

    d) (r) $\displaystyle\iiint_B ze^{x+y}\,dV, \quad B = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

25. (r) Sin calcular las integrales, describir mediante desigualdades los sólidos cuyos volúmenes están representados por

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx, \qquad I_2 = \int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz.$$

    Dibujar sus proyecciones sobre el plano xy e indicar la altura de cada sólido. ¿Se trata del mismo sólido? Justificar.

26. (o) Sea
$$W = \{(x, y, z) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x\}.$$
Describir la proyección de W sobre el plano xy, plantear una integral iterada y calcular
$$\iiint_W \sin x \, dV.$$

27. Sea W el sólido del primer octante limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
   a) (o) Dibujar W y su proyección sobre el plano xy.
   b) (o) Plantear una integral triple y calcular el volumen de W.
   c) (r) Calcular $\iiint_W z \, dV$.

28. (*) Sea el prisma
$$P = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 2,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y + z \le 1\}.$$
Dibujarlo y escribir seis integrales iteradas para calcular su volumen, una por cada orden de integración. Elegir una y evaluarla; no es necesario calcular las seis.

3. Cambio de variables a coordenadas polares

29. Dibujar las siguientes regiones y describirlas en coordenadas polares, usando $r \ge 0$:
   a) (o) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.
   b) (o) $D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$.
   c) (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\ y \le 0\}$.
   d) (r) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\}$.

30. Resolver mediante integrales dobles en coordenadas polares:
   a) (o) Calcular el área del disco $D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$, donde $R > 0$. Explicitar los límites y el factor que transforma el elemento de área.
   b) (r) Calcular el área de la corona $R_1^2 \le x^2 + y^2 \le R_2^2$, donde $0 < R_1 < R_2$, y comprobar el resultado restando las áreas de dos discos.

31. **Área encerrada por una elipse, por dos procedimientos.** Sean $a, b > 0$ y
$$E = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$
Determinar el área de E mediante cada uno de los siguientes procedimientos y comparar los resultados.
   a) (*) **Vía 1: transformación dada, caso no clásico.** Se propone la transformación
$$T(u, v) = (au, bv), \qquad G = \{(u, v) : u^2 + v^2 \le 1\}.$$
      i) Verificar que T lleva el disco G sobre E y que es inyectiva.
      ii) Calcular $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ y transformar la integral $\iint_E 1 \, dA$ en una integral sobre G.
      iii) Evaluar la integral obtenida usando el área del disco unitario calculada en el Ejercicio 30.
   b) (r) **Vía 2: comparación guiada con un círculo.**
      i) Describir E como región y-simple, plantear su área en el orden $dy\,dx$ y efectuar solamente la integración respecto de y.
      ii) Para $-a \le x \le a$, verificar que $2b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}$.
      iii) Interpretar geométricamente $\displaystyle\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ y utilizar el Ejercicio 30 para concluir, sin calcular una primitiva de la raíz.

32. Dibujar la región, cambiar cada integral cartesiana por una integral polar equivalente y evaluar la integral polar:

    a) (o) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$

    b) (r) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} 1\,dx\,dy.$

    c) (r) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx.$

33. (o) Sea $D=\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ y sea $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

    a) Una estudiante propone
    $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\,dr\,d\theta.$$
    Identificar el error, corregir el planteo y calcular la integral.

    b) Calcular el valor medio de f sobre D.

34. (*) Dibujar la región, transformar a polares y calcular
    $$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx.$$
    Indicación: reconocer la circunferencia $x^2+y^2=2x$ y tener en cuenta la condición $x \ge 1$ al determinar los límites radiales.

35. Para cada sólido B, describir su proyección sobre el plano xy, expresar esa proyección y los límites de z en coordenadas cilíndricas y plantear la integral iterada correspondiente. Utilizar $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ al integrar primero respecto de z.

    a) (o) Calcular $\displaystyle\iiint_B z\,dV$, donde B está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, sobre el plano $z=0$ y debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

    b) (o) Calcular el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z=4-x^2-y^2$ y el plano $z=0$.

    c) (r) Calcular $\displaystyle\iiint_B (x^2+y^2)\,dV$, donde B está limitado por debajo por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y por arriba por el cono $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Integrales sobre curvas

4.1. Integrales a lo largo de trayectorias (de campos escalares)

36. Calcular las siguientes integrales a lo largo de las trayectorias indicadas. En cada caso, explicitar $f(\mathbf{r}(t))$ y $\|\mathbf{r}'(t)\|$.

    a) (o) $\displaystyle\int_C (x+y)\,ds, \quad \mathbf{r}(t)=(t,1-t,0), \quad 0\le t\le 1.$

    b) (r) $\displaystyle\int_C (xy+y+z)\,ds, \quad \mathbf{r}(t)=(2t,t,2-2t), \quad 0\le t\le 1.$

    c) (r) $\displaystyle\int_C x\,ds, \quad \mathbf{r}(t)=(t,t/2), \quad 0\le t\le 4.$

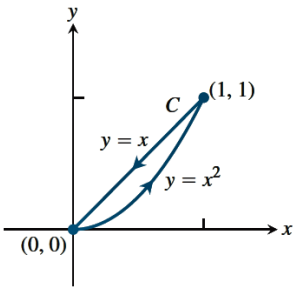
    d) (r) $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}\,ds, \quad \mathbf{r}(t)=(t,t,t), \quad 1\le t\le 2.$

37. Calcular las siguientes integrales:

    a) (o) La integral de $f(x,y,z)=-\sqrt{x^2+z^2}$ sobre la semicircunferencia
    $$\mathbf{r}(t)=(0,a\cos t,a\sin t), \qquad 0\le t\le \pi, \qquad a>0.$$

b) (r) La integral de $f(x,y) = x^2 - y$ sobre el arco de $x^2 + y^2 = 4$ contenido en el primer cuadrante, desde $(0,2)$ hasta $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

c) (o) $\int_C (x + \sqrt{y})\, ds$, donde C está formada por el segmento $y = x$, $0 \le x \le 1$, y el arco de parábola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. Ambos tramos se recorren una sola vez.



38. Un robot móvil debe trasladarse dentro de un almacén. El costo de energía por unidad de longitud depende de la posición y está dado por

$$f(x,y) = 1 + 0{,}1x + 0{,}05y.$$

a) (o) Parametrizar el segmento desde $A = (0,0)$ hasta $B = (4,3)$ y calcular el costo del recorrido mediante una integral apropiada.

b) (o) Comparar con el recorrido que va primero de $(0,0)$ a $(4,0)$ y luego a $(4,3)$ mediante dos segmentos. ¿Cuál de estos dos recorridos tiene menor costo? Explicar qué papel cumplen la longitud y los valores de f sobre cada camino.

c) (*) Proponer una modificación del modelo que agregue una penalización no negativa cuando el robot se acerque al punto $(4,2)$. Explicar el significado del término añadido. No se pide evaluar la integral correspondiente al nuevo modelo.

39. (r) Una pared vertical tiene como base el segmento de la recta $2x + 3y = 6$ con $0 \le x \le 3$, situado en el plano xy. Su borde superior está sobre la superficie $z = 4 + 3x + 2y$. Plantear una integral a lo largo de la base y calcular el área de una de las caras de la pared.

4.2. Integrales de línea (de campos vectoriales)

40. (o) Considerar los campos

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y + z, z + x, x + y), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (xy, yz, xz).$$

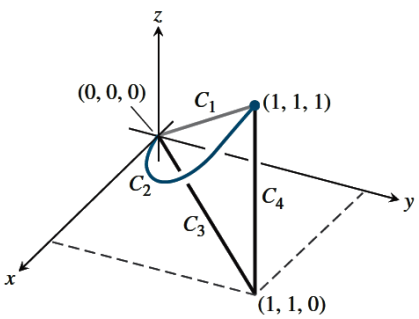
Calcular por parametrización las integrales de línea de ambos campos desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias:

a) El segmento C_1 que une los dos puntos.

b) La curva C_2 parametrizada por $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \le t \le 1$.

c) El recorrido $C_3 + C_4$, donde C_3 va de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$ y C_4 va de $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$, en ambos casos mediante segmentos.

Comparar los resultados para cada campo. ¿En cuál de los dos casos los cálculos muestran dependencia del recorrido? ¿Basta obtener el mismo valor sobre estas tres trayectorias para afirmar que ocurre lo mismo sobre todas las trayectorias entre los extremos? Justificar.



41. (r) Calcular la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \qquad \mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z),$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $x + y + z = 1$. La orientación se elige de modo que la proyección sobre el plano xy se recorra en sentido antihorario, vista desde el semieje positivo de z. Resolver mediante una parametrización de C.

42. (o) Sean $f(x, y) = x + y$ y $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$. Considerar las trayectorias

$$\mathbf{r}(t) = (t, t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \boldsymbol{\sigma}(u) = (u/2, u/2), \quad 0 \le u \le 2,$$

y $\boldsymbol{\eta}(v) = (1 - v, 1 - v)$, $0 \le v \le 1$.

a) Describir la imagen y el sentido de recorrido de cada trayectoria.

b) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbf{r}} f\, ds$ y $\displaystyle\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

c) Sin repetir todas las cuentas, determinar las integrales del campo escalar y del campo vectorial sobre $\boldsymbol{\sigma}$ y sobre $\boldsymbol{\eta}$. Justificar con las propiedades correspondientes.

43. (r) Analizar las integrales de línea a partir de los campos representados en las siguientes figuras, sin buscar una expresión algebraica de los campos:

a) Para el campo de la figura 1 y la circunferencia unitaria centrada en el origen, recorrida en sentido antihorario, indicar si $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o nula. Justificar geométricamente.

b) Dibujar, para el campo de la figura 1, una curva suave no constante sobre la que la integral de línea sea nula.

c) Para el campo de la figura 2, estimar el signo de la integral sobre C_1 y sobre C_2, con las orientaciones indicadas. Justificar a partir de la dirección del campo respecto de las tangentes a cada curva.

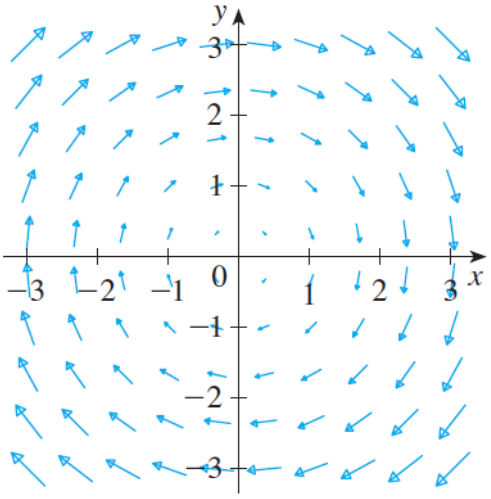


figura 1

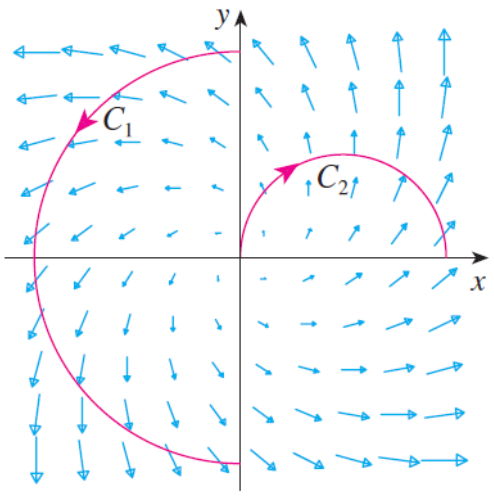


figura 2