UNIDAD 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Parte C: EDOs de orden superior

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

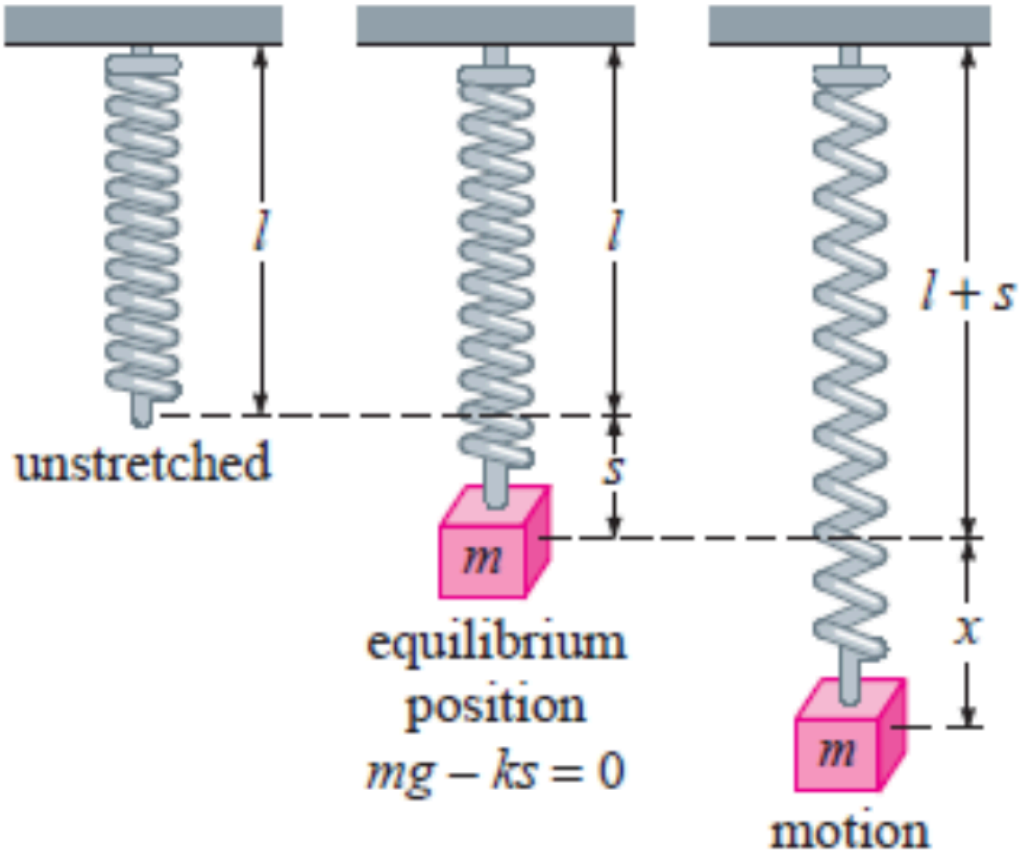
Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

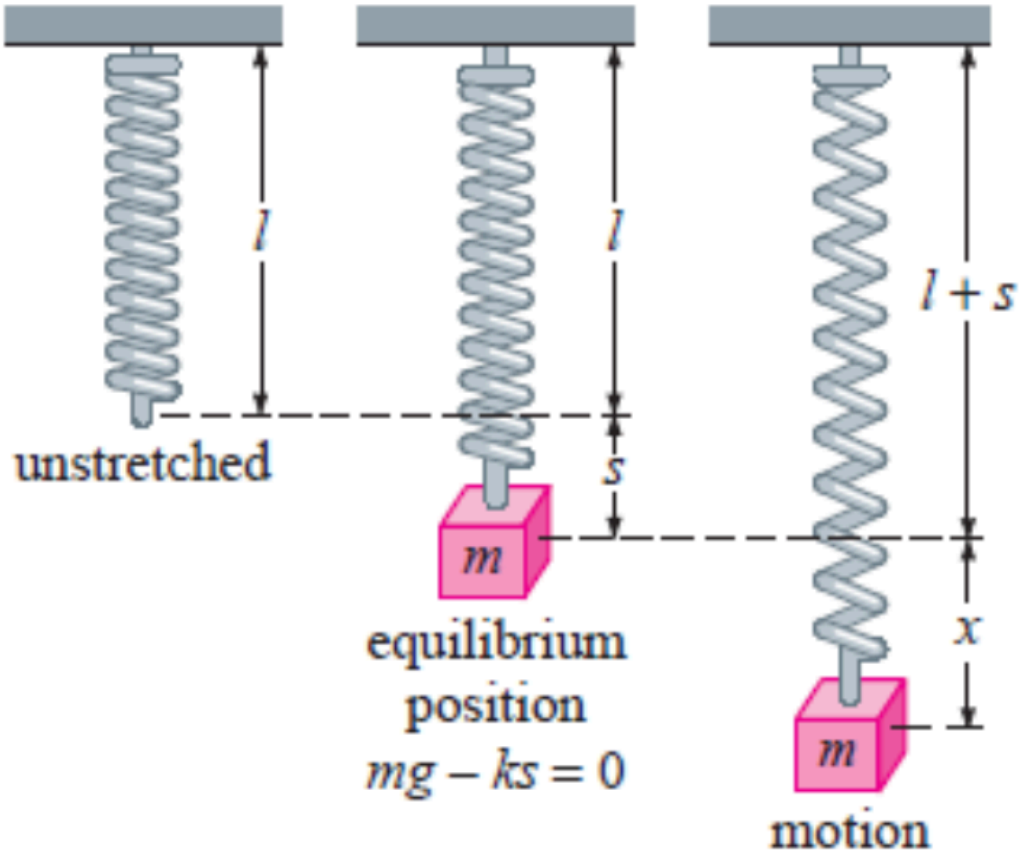
Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

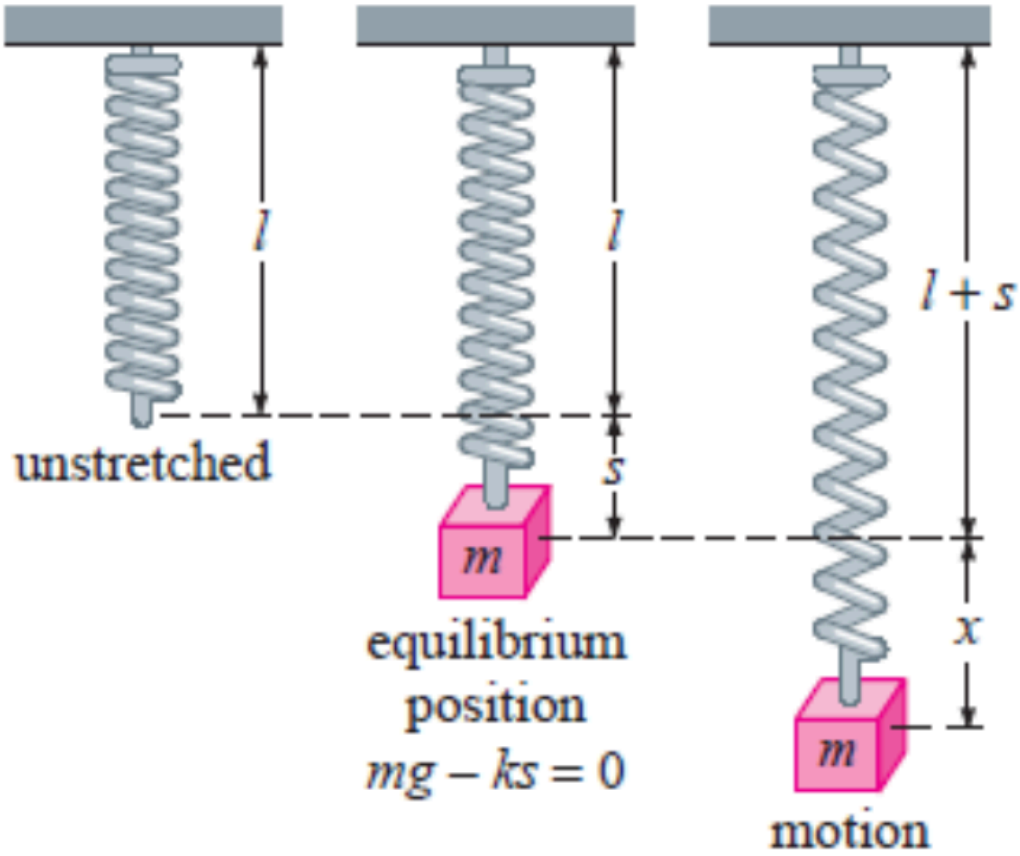
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

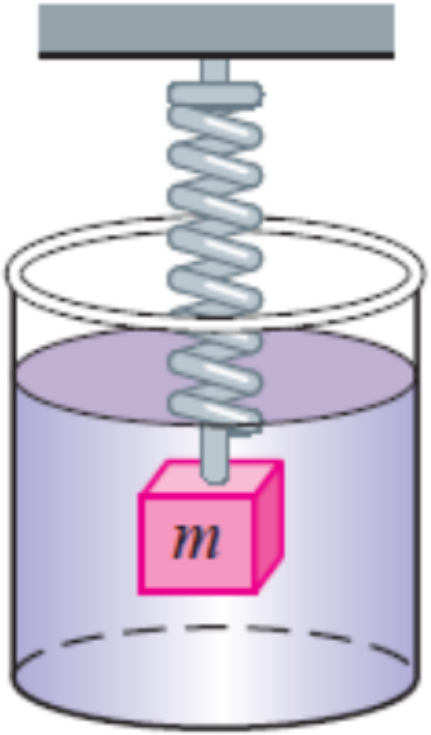
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

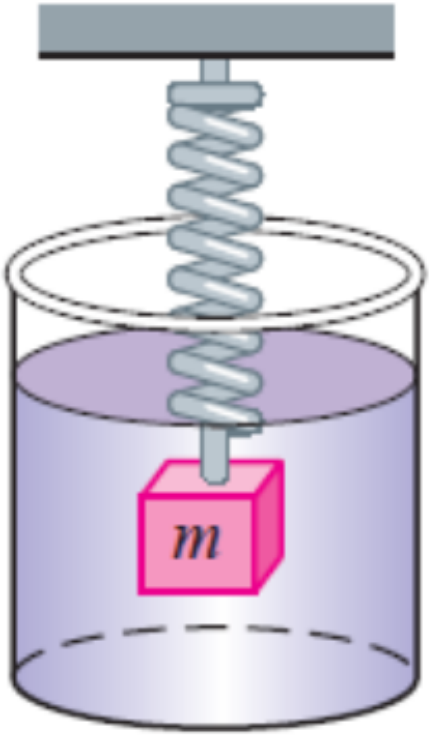
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

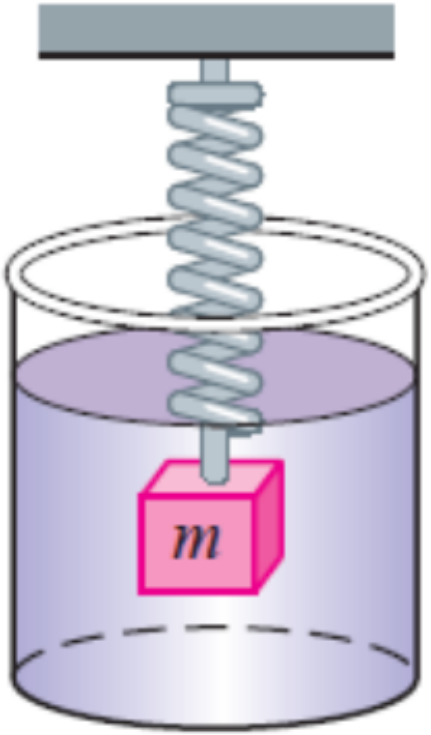
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



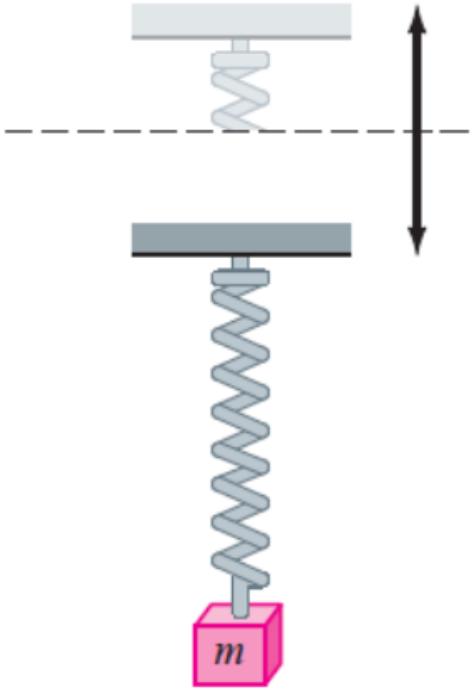
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

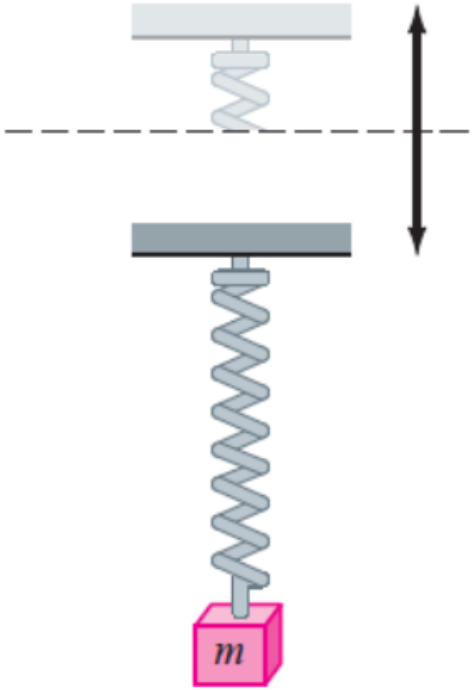
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

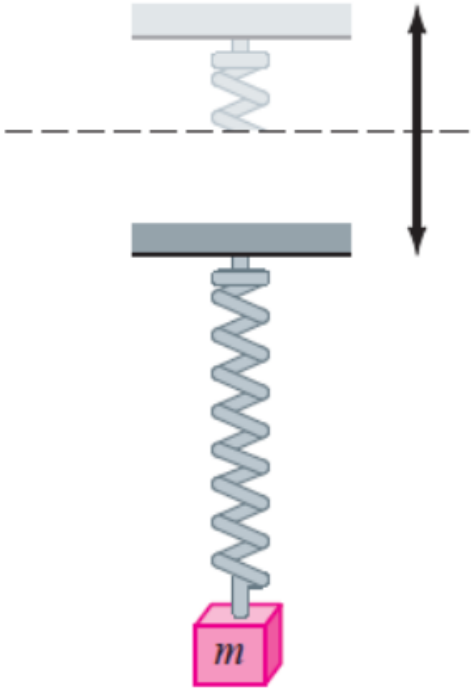
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



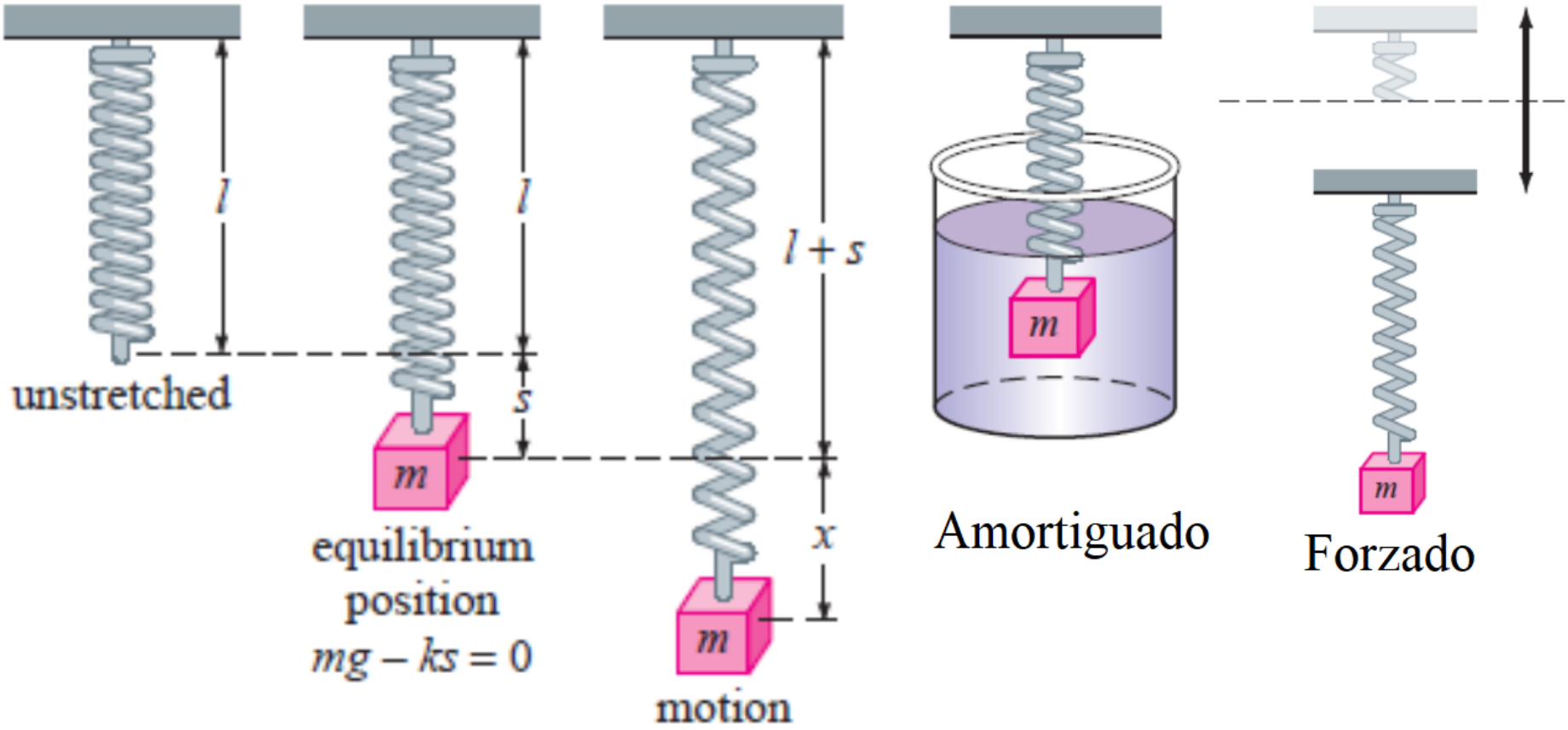
$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

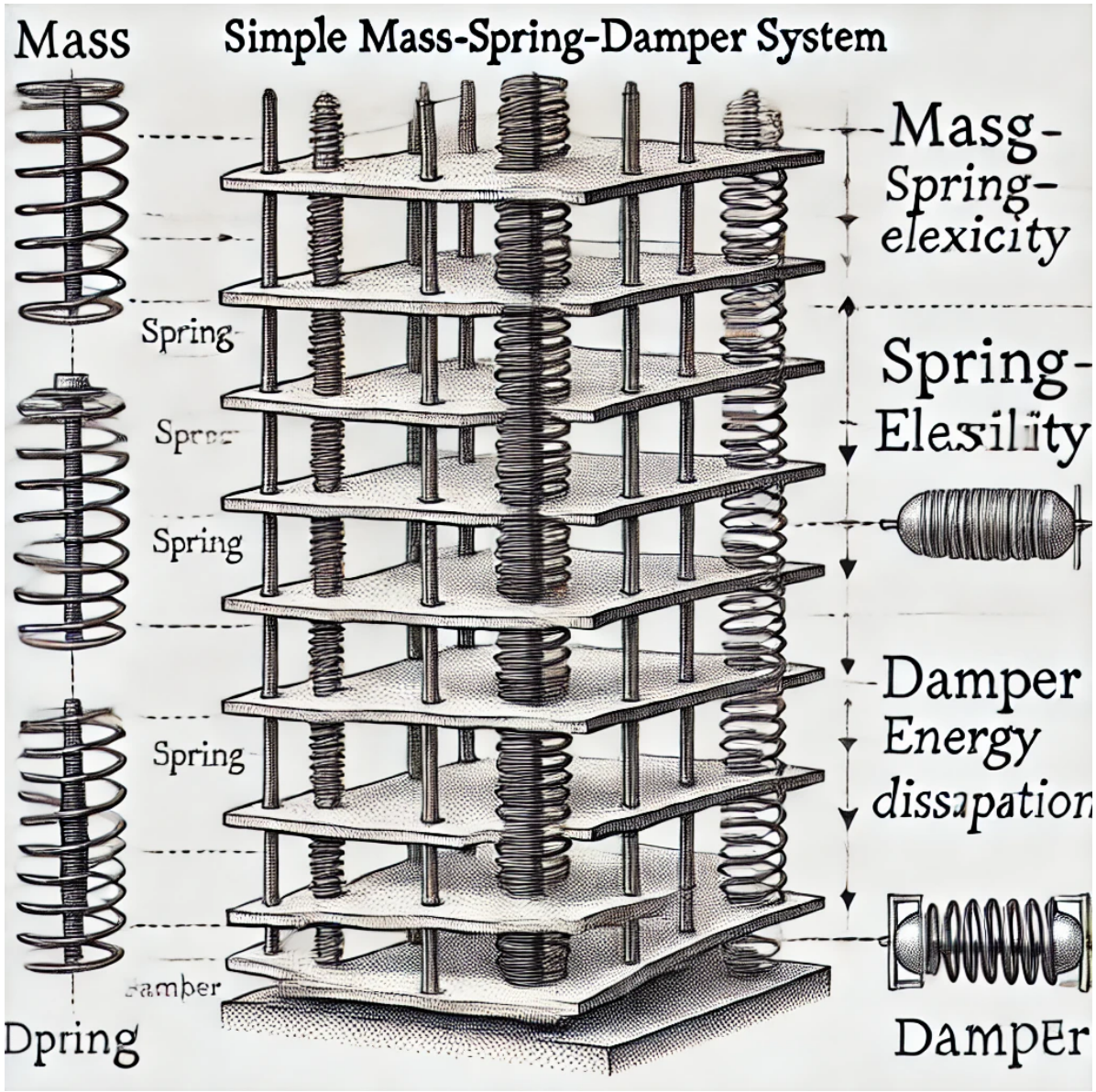
$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento en un sistema masa-resorte

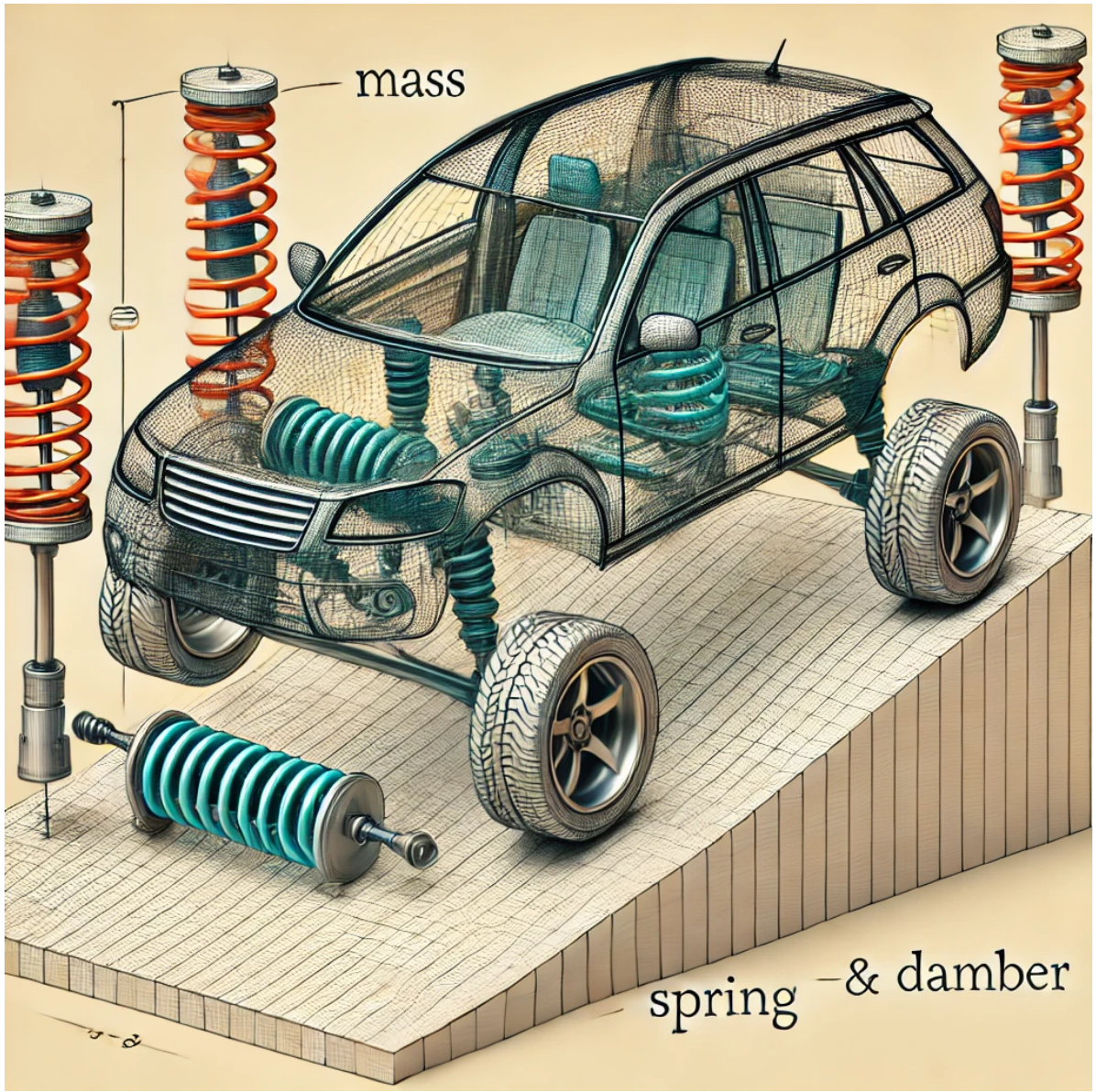


$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$$

Aplicaciones



Aplicaciones



Aplicación en Economía: modelo de Samuelson-Hicks (comparable al modelo masa-resorte)

$Y(t)$: ingreso total nacional; $C(t)$: consumo; $I(t)$: inversión; G_0: gasto público.
Relaciones:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G_0; \quad C(t) = cY(t),\ 0 < c < 1.$$

Por otra parte:
I_0: Inversión autónoma constante; $v > 0$: mide cuánto capital se requiere por unidad de aumento en la producción. $a > 0$: Coeficiente de inercia o retardo en el ajuste de capital. Así: $I(t) = I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t)$.

$$Y(t) = cY(t) + I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t) + G_0$$

$$a\,\ddot{Y}(t) - v\,\dot{Y}(t) + (1-c)\,Y(t) = I_0 + G_0.$$

Ejercicios del TP 5

46. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte.
    - a) Determine la constante del resorte.
    - b) Plantee la ecuación diferencial del movimiento, sabiendo que se trata de un movimiento libre amortiguado en el que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.
    - c) Escriba en términos de su planteo, las siguientes condiciones: la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s.
    - d) Reescriba la ecuación diferencial, agregando a su modelo una fuerza externa dada por $f(t) = 3\cos(t)$ N.

Ejercicios del TP 5

46. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte.
    - a) Determine la constante del resorte.
    - b) Plantee la ecuación diferencial del movimiento, sabiendo que se trata de un movimiento libre amortiguado en el que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.
    - c) Escriba en términos de su planteo, las siguientes condiciones: la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s.
    - d) Reescriba la ecuación diferencial, agregando a su modelo una fuerza externa dada por $f(t) = 3\cos(t)$ N.
      Solución: $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 0$. Condiciones: $x(0) = 2$ m, $\dot{x}(0) = -3$ m/s. $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 3\cos(t)$ N.

Ejercicios del TP 5

47. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el desplazamiento $x(t)$ de un sistema masa-resorte, indique si el movimiento es *libre no amortiguado*, *libre amortiguado* o *forzado*. Indique además la frecuencia natural ω_0 del sistema homogéneo asociado:

    a) $\ddot{x}(t) + 16x(t) = 0$
    b) $2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$
    c) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 9x(t) = 5\cos(2t)$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.
La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Existencia de solución única a un PVI

Llamemos (1) al PVI

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \\ \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Existencia de una solución única)

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I, entonces ***existe*** *una* ***única*** *solución del PVI (1) en I.*

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

Problema con valores en la frontera: PVF

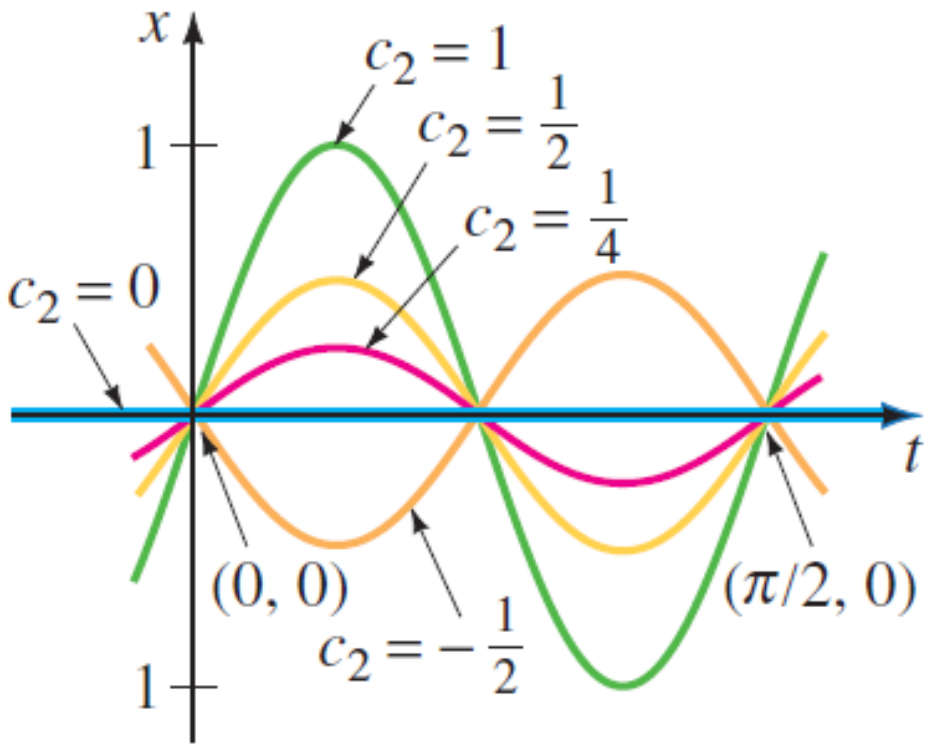
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

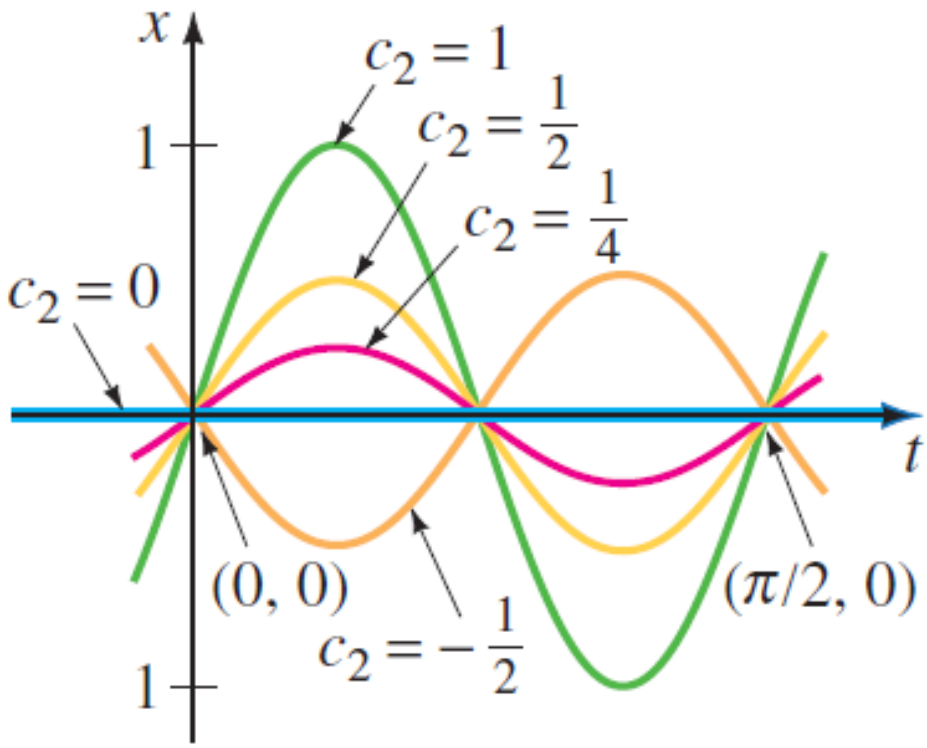
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

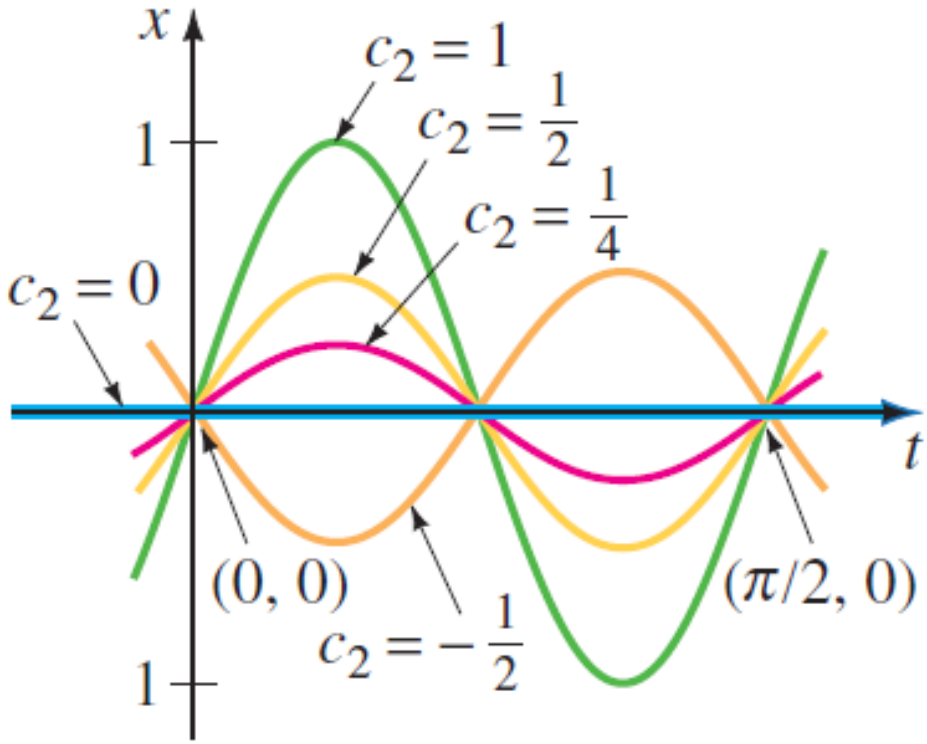


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

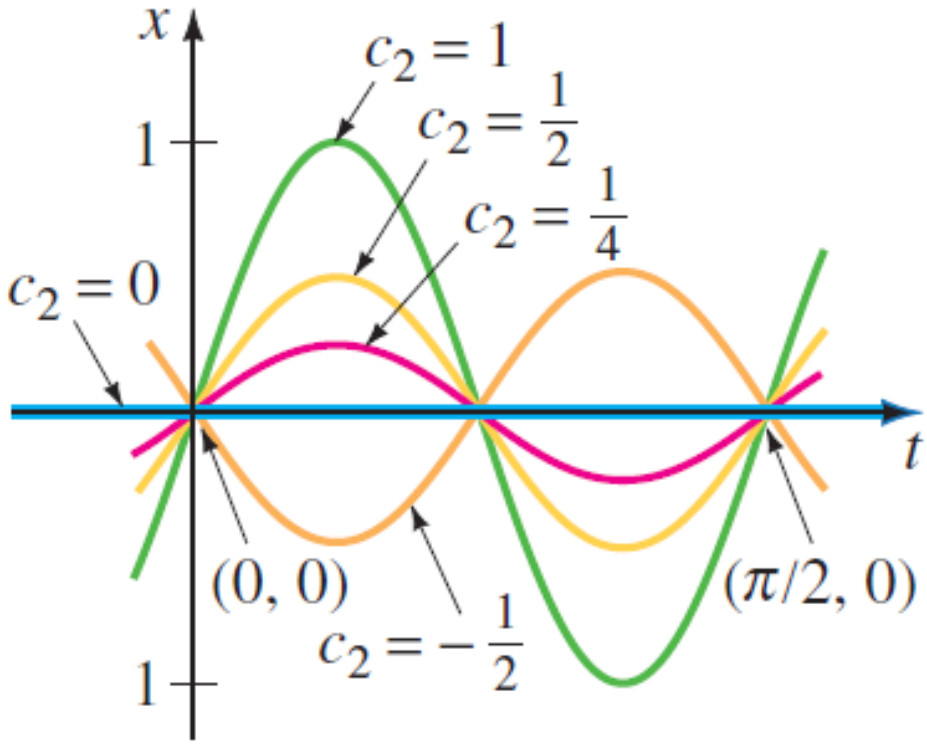
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$

Tiene solución única $x \equiv 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

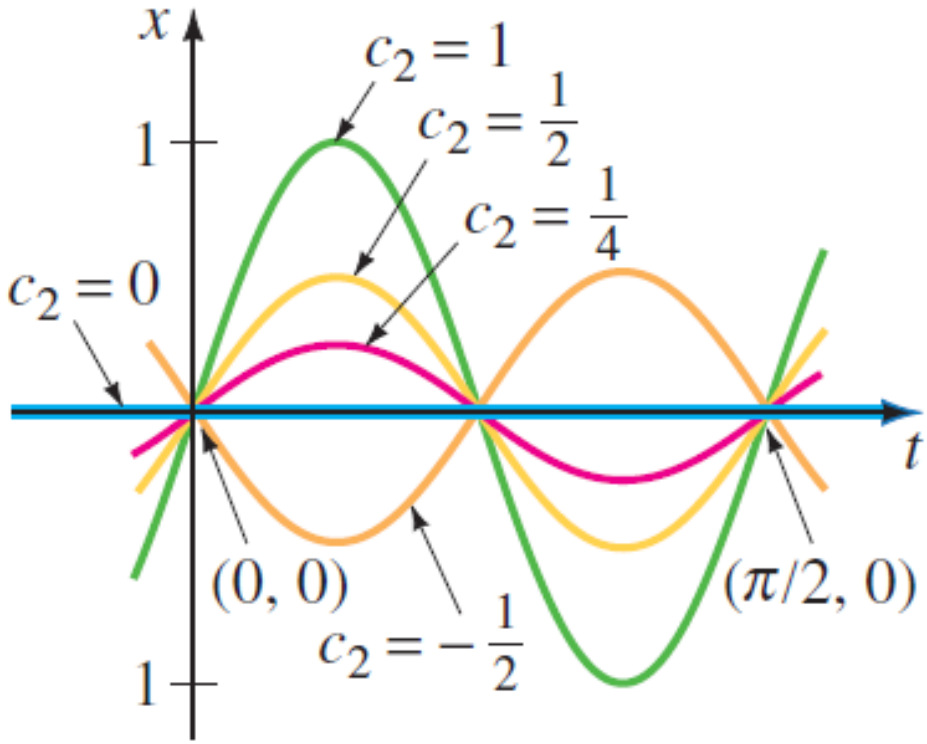
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

¿CONCLUSIÓN?

Ejercicios del TP 5

48. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.

    $b)$ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier ED lineal homogénea.

2) Combinaciones lineales.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$;

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Derivamos g:

$$g'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x); \quad g''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x).$$

y sustituimos en la ED:

$$\begin{aligned}
&a_2(x)g''(x) + a_1(x)g'(x) + a_0(x)g(x) = \\
&= a_2(x)(c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)) + a_1(x)(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)) \\
&\qquad + a_0(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\
&= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) \\
&\qquad + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)) \\
&= c_1\, 0 + c_2\, 0 = 0.
\end{aligned}$$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1, 1]$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
- $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
- $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Wronskiano

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,...,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Equivalentemente, su contrarrecíproco:

Teorema

Si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LI en I.

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Equivalentemente, su contrarrecíproco:

Teorema

Si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LI en I.

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la ED $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ en I. Entonces $\{y_1, \cdots, y_n\}$ es LI en I si y solo si $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sin demostrar.

Ejercicios del TP 5

50. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

$a)$ (o) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, existe un conjunto fundamental de soluciones en I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, existe un conjunto fundamental de soluciones en I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de ED lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, si $\{y_1, \cdots y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en I, la solución general se puede expresar como

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

(Sin demostrar.)

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $\quad y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $\quad y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}$;

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0;$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED; probemos que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$
$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$
$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplos

1. La ED de un sistema masa-resorte es: $2y''(t) + 10y'(t) + 8y(t) = 0$.
   - $a)$ Interprete cada término.
   - $b)$ Indique si se trata de la ecuación de un movimiento libre o forzado, amortiguado o no amortiguado.
   - $c)$ Resolver el PVI dado por la ED y las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
   - $d)$ Halle posición y velocidad de la masa en $t = 1$.
2. Resuelva $16y''(x) + 8y'(x) + y(x) = 0$.
3. Resuelva $\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 25x(t) = 0$.

Ejercicios del TP 5

53. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

$a)$ (o) $4y'' + y' = 0.$

$b)$ (o) $y'' + 8y' + 16y = 0.$

$c)$ (o) $y'' - 3y' + 2y = 0.$

$e)$ (o) $y''' - 4y'' - 5y' = 0.$

$g)$ (o) $y''' + y'' - y' - y = 0.$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Función o solución complementaria

Definición

Dada una ED no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la ED homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA o SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I. *Entonces la solución general de la ED tiene la forma*

$$y = y_c + y_p,$$

donde y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar. Se prueba para $n = 2$.

Teorema (Principio de superposición para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ...a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Observación: no hay relación entre k y n.

Demostración dejada como ejercicio.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Método de los coeficientes indeterminados

Método de Coeficientes Indeterminados

Dada una EDO $a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = g(x)$.
El **método de los coeficientes indeterminados** propone encontrar una solución particular $y_p(x)$ similar a $g(x)$.

1. Proponer la forma de la solución particular $y_p(x)$.
2. Derivar $y_p(x)$ e igualar en la EDO.
3. Resolver el sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes.

Limitación: sólo puede aplicarse para ciertas funciones g, tales como polinomios, senos, cosenos, exponenciales y combinaciones de éstas.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.
Paso 2: Derivamos y sustitumos:
$y_p'(x) = 2Ax + B$; $y_p''(x) = 2A$.

$$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6.$$

Igualamos y resolvemos:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \implies A = -1,\ B = -\frac{5}{2},\ C = -9.$$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$
Paso 2: Derivamos y sustitumos:
$y_p'(x) = 2Ax + B$; $y_p''(x) = 2A.$

$$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6.$$

Igualamos y resolvemos:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \implies A = -1,\ B = -\frac{5}{2},\ C = -9.$$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$. Hallamos la solución

complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$. Hallamos la solución

complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3} x e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$. Hallamos la solución

complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3} x e^x$.

3) $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta:
$y_c = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
$y_p = A\,\mathrm{sen}(3x) + B\cos(3x)$
$y_G = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Tabla

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma $ay'' + by' + cy = G(x)$.

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de . . .	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
sen kx, cos kx	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B \cos kx + C \operatorname{sen} kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \text{sen}(x) + 3e^x$$

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \operatorname{sen}(x) + 3e^x$$

Sol. complementaria: $y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$.

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \operatorname{sen}(x) + 3e^x$$

Sol. complementaria: $y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$.

Sol. gral:

$$y_G(x) = y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{5}e^x.$$

Ejercicios del TP 5

58. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:

$a)$ (o) $y'' + y' - 6y = 2x$.

$b)$ (o) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.

$c)$ (o) $y'' + y' - 6y = 2x - e^{2x}$.

$g)$ (o) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$.

$k)$ (o) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ o subintervalos de éste.

Ejercicios del TP 5

59. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:

$a)$ (o) $y'' + y = \sec x$.

$b)$ (r) $y'' + y = \tan x$.

$c)$ (r) $y'' + y = 2\sec x - \tan x$.

$d)$ (o) $y'' + y = \sec^2 x$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

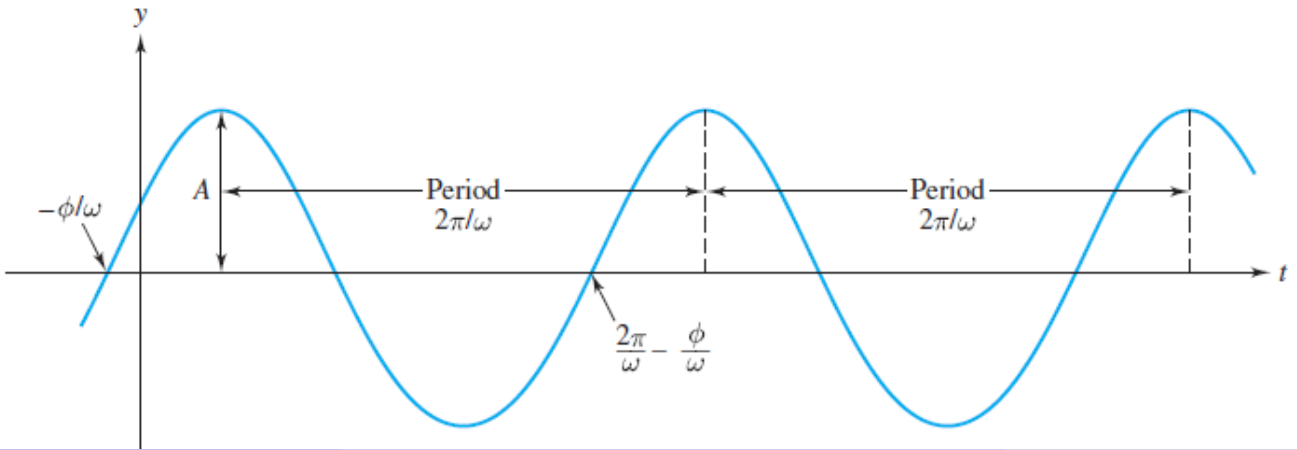
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \xrightarrow[\text{llevar a la forma}]{} y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$A \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = A \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\phi)+A \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\phi) \implies \begin{cases} c_1 &= A \operatorname{sen}(\phi) \\ c_2 &= A \cos(\phi) \end{cases}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}; \qquad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

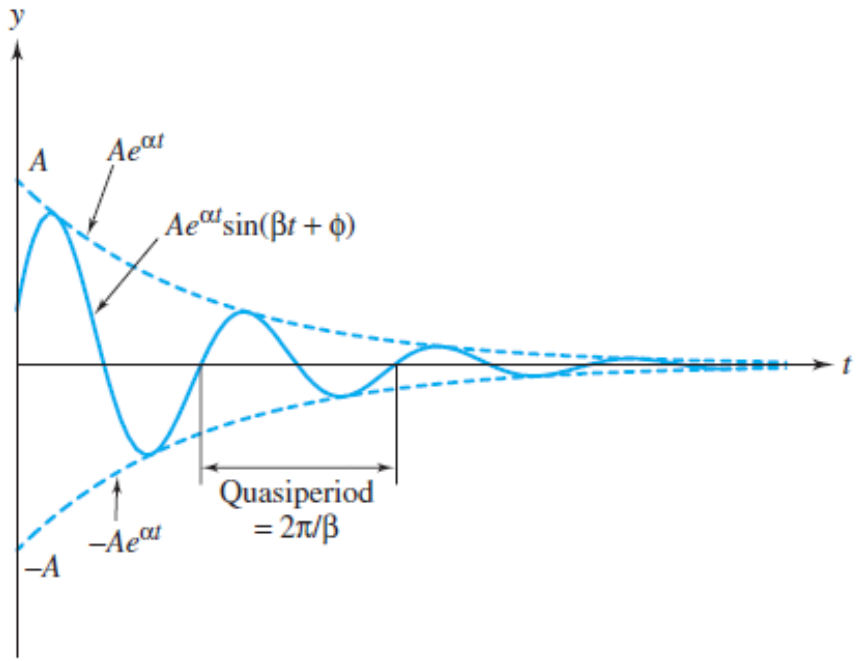
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento subamortiguado: $b^2 < 4mk \qquad \alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

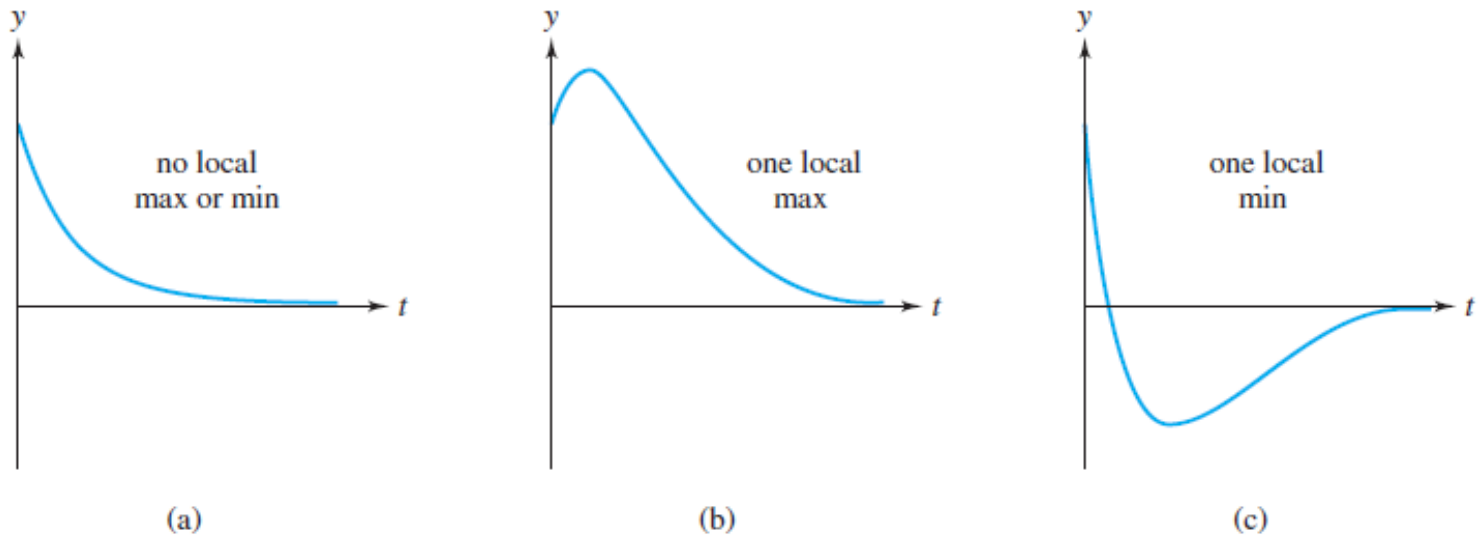
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > 4mk$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad r_1 < 0;\ r_2 < 0.$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

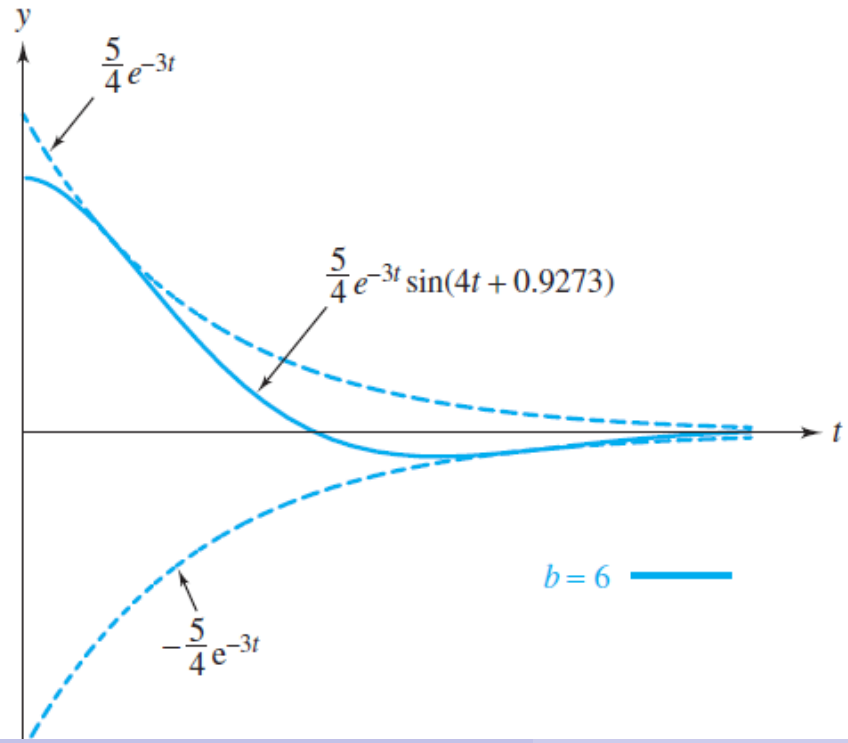
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

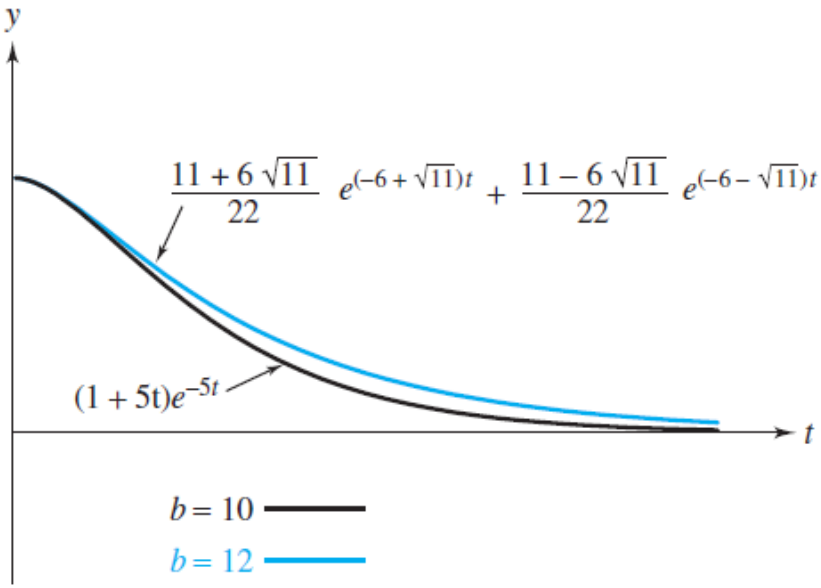
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = 4mk$

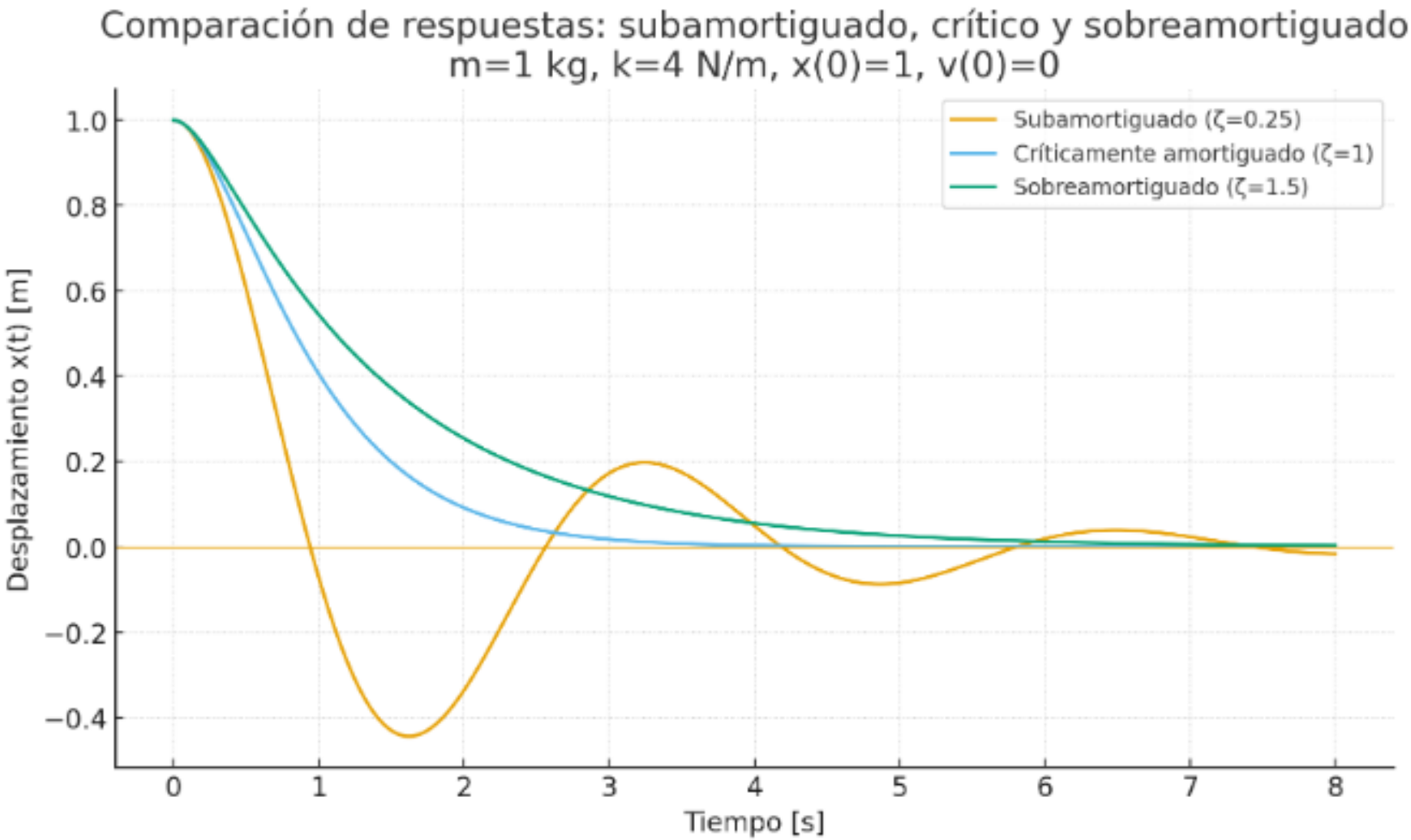
$$y = c_1\, e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2\, t\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad b = 6,\ 10,\ 12.$





Tres tipos de movimiento



Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk;$$

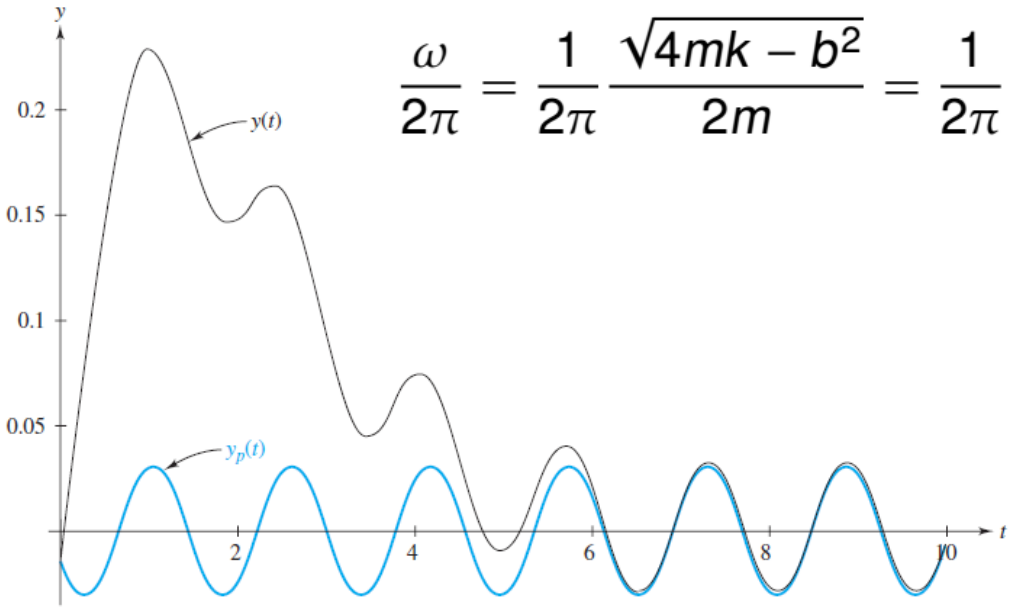
Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}\,\text{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$



$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \ (b = 0).$$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

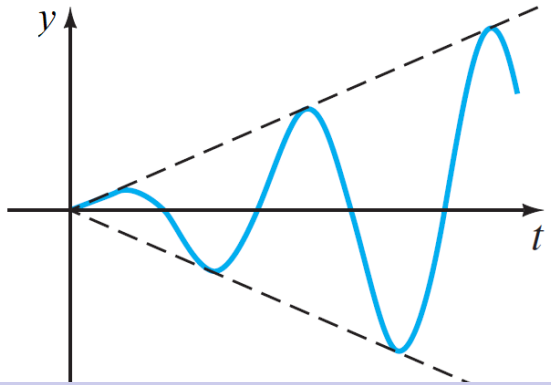
$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t),\ (b = 0).$$

$$y_G(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t),\ \text{si } \gamma \neq \omega.$$

$$y_G(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\operatorname{sen}(\omega t) + \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t).$$

No hay estado transitorio. Tomamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ y calculamos el límite

$$\lim_{\gamma \to \omega} y(t) = \frac{F_0}{2\omega} \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} - t \cos(\omega t) \right).$$



Ejercicios del TP 5

61. (o) Dado el PVI $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$ con condiciones iniciales $y(0) = -3$ y $y'(0) = 1$:
    1. Resuelva el PVI para obtener la solución en la forma tradicional.
    2. Identifique la parte homogénea subamortiguada $y_h(x)$ y exprésela en la forma equivalente de amplitud y ángulo de fase $Ae^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x + \phi)$.
    3. Analice el comportamiento de la solución cuando $x \to \infty$ e indique si existe un término de estado estable.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I. *Entonces la solución general de la ED tiene la forma* $y = y_c + y_p$ *donde* y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2). Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2). Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

$$\begin{aligned}
&a_2(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_0(x)Y(x) = \\
&= a_2(x)(\Phi''(x) - y_p''(x)) + a_1(x)(\Phi'(x) - y_p'(x)) + a_0(x)(\Phi(x) - y_p(x)) \\
&= \big(a_2(x)\Phi''(x) + a_1(x)\Phi'(x) + a_0(x)\Phi(x)\big) \\
&\qquad\qquad - \big(a_2(x)y_p''(x) + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x)\big) \\
&= G(x) - G(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Entonces $\Phi(x) - y_p(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$, o sea

$$\Phi(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + y_p(x). \qquad \blacksquare$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$ Resolver por determinantes.