Métodos Matemáticos
Sistemas Dinámicos

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Bibliografía:

- Differential equations and dynamical systems. Springer. L. Perko, Third edition 2001.

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Consideremos el sistema *no acoplado*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Dicho sistema se puede escribir

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$



o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Las curvas solución tienen la forma

$$y = \frac{k}{x^2}, \quad k = c_1^2 c_2.$$

$$x_2 = \frac{k}{x_1^2}$$

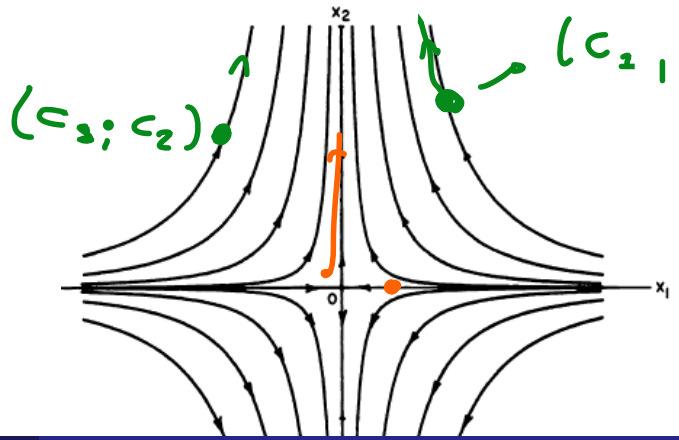


Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

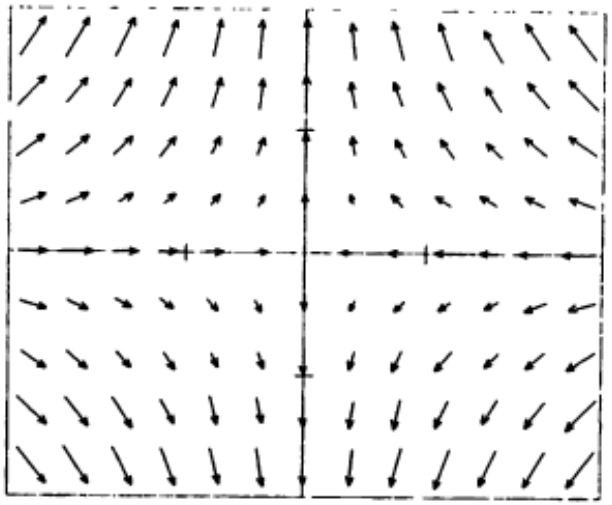
Retornando a (1), la función

$$f(X) = AX$$

define un campo vectorial que asigna a cada punto X_0 del espacio de fases, el vector tangente AX_0 a la curva solución del sistema que pasa por X_0.

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$$



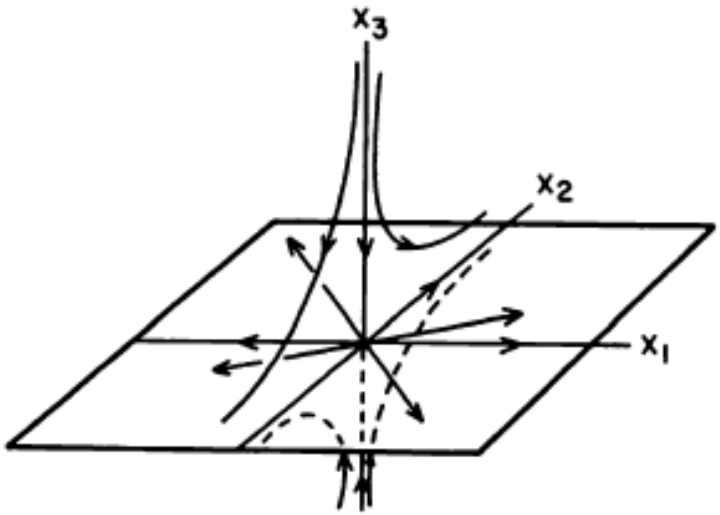


Campo de direcciones para el sistema (1).

Para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_3, \end{cases} \tag{2}$$

se obtiene el diagrama de fases



La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado.

$$Y' = DY$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$X = PY \longrightarrow Y = P^{-1}X$$

$$X' = PY' = PDY = PDP^{-1}X = AX.$$

$$P = [V_1\ V_2 \cdots V_n] \qquad V_i \text{ es vector propio de } A.$$

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

$y_1' = \lambda_1 y_1$

$y_2' = \lambda_2 y_2$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$

Sea $Y = P^{-1}X$, entonces

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]Y$$

que constituye un sistema no acoplado para Y. La solución general de dicho sistema es

$$Y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]Y(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases} \qquad X'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} X(t)$$

- Valores propios de A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.
- Solución del sistema $Y'(t) = DY(t)$

$$Y(t) = \mathrm{diag}[e^{-t}, e^{2t}]\,Y(0)$$

- $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$: $X(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$
- $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e \\ 0 & \end{bmatrix}$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

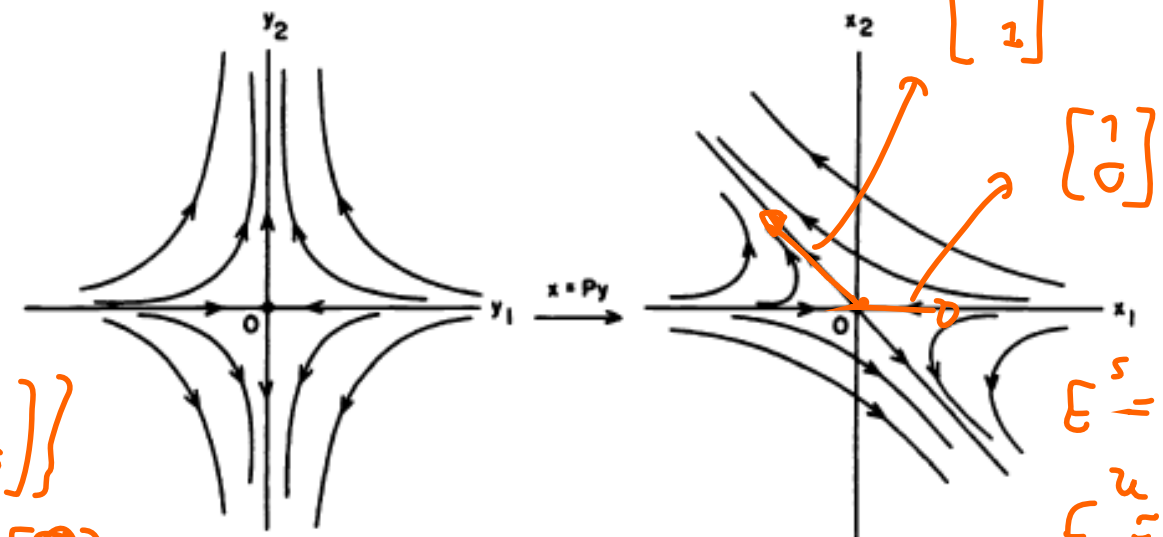
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x_1(t) = (c_1 + c_2)e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$X(t) = PY(t)$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$E^s = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$E^u = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$E^s = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$E^u = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Subespacios estables e inestables

Suponga que A es una matriz $n \times n$ con k valores propios negativos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ y $n-k$ valores propios positivos $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$. Sean $v_1, ..., v_n$ los vectores propios asociados. El subespacio estable del sistema $X' = AX$ es

$$E^s = \text{span } \{v_1, ..., v_k\}.$$

El subespacio inestable es

$$E^u = \text{span } \{v_{k+1}, ..., v_n\}.$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Dado que el principal interés es resolver sistemas de la forma

$$X' = AX$$

asumiremos que T está representado por una matriz A con repecto a la base canónica y definimos e^{At} como sigue:

Exponencial de At

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos

matriz $n \times n$

$$= e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

$P^{-1}AP = J$

$e^{A} = P \cdot e^{J} \cdot P^{-1}$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

$e^{Dt} = \text{diag}\left[e^{\lambda_1 t}; \cdots; e^{\lambda_n t}\right.$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{A} = e^{a} \begin{bmatrix} \cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la forma canónica de Jordan, para cada matriz A de tamaño 2×2, existe una matriz inversible P tal que

$$P^{-1}AP = B$$

donde B admite una de las siguientes formas:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at}\begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Teorema fundamental para sistemas lineales

Sea A una matriz real $n \times n$. Entonces, dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

admite una única solución dada por

$$X(t) = e^{At}X_0. \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

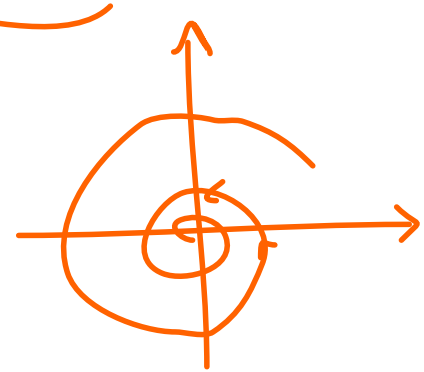
Esboce las curvas solución en el diagrama de fases $\mathbb{R}^2$.

$$X(t) = e^{At} X_0 = e^{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & - \\ \operatorname{sen} t & \cos \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t \cdot e^{-2t} \\ x_2(t) = \operatorname{sen} t \cdot e^{-2} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = e^{-4t}$$



Para conocer el comportamiento de las soluciones del sistema plano

$$X' = AX$$

recordemos que existen matrices P y B tales que

$$B = P^{-1}AP,$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Luego, si conocemos el comportamiento de las curvas solución del sistema

$$Y' = BY$$

mediante la transformación lineal $X(t) = PY(t) = Pe^{Bt}c$ podemos recuperar información sobre las curvas solución del sistema original.