Métodos Matemáticos
Sistemas Dinámicos

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Bibliografía:

- Differential equations and dynamical systems. Springer. L. Perko, Third edition 2001.

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Consideremos el sistema *no acoplado*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Dicho sistema se puede escribir

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Las curvas solución tienen la forma

$$y = \frac{k}{x^2}, \quad k = c_1^2 c_2.$$

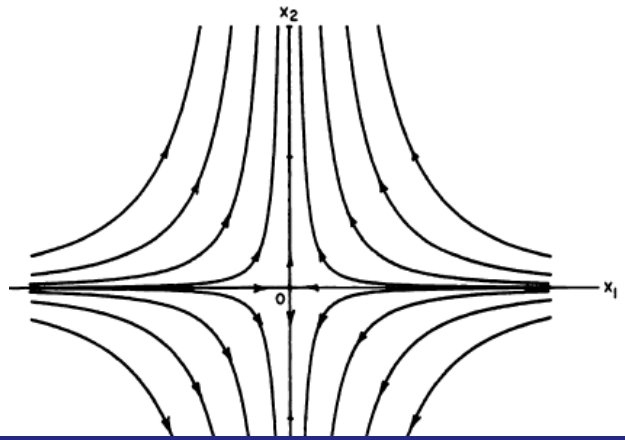


Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

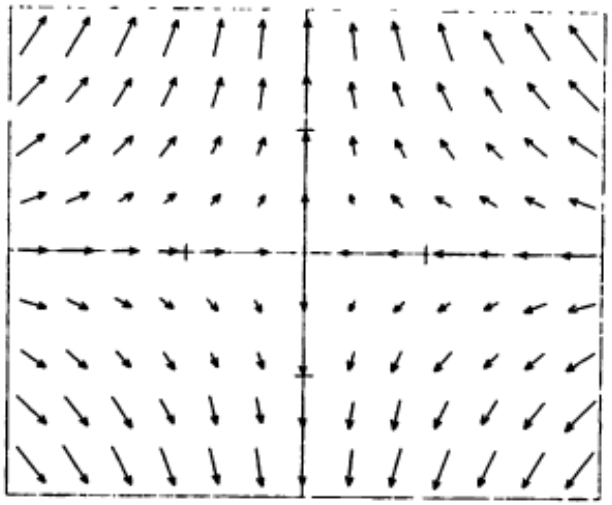
$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

Retornando a (1), la función

$$f(X) = AX$$

define un campo vectorial que asigna a cada punto X_0 del espacio de fases, el vector tangente AX_0 a la curva solución del sistema que pasa por X_0.

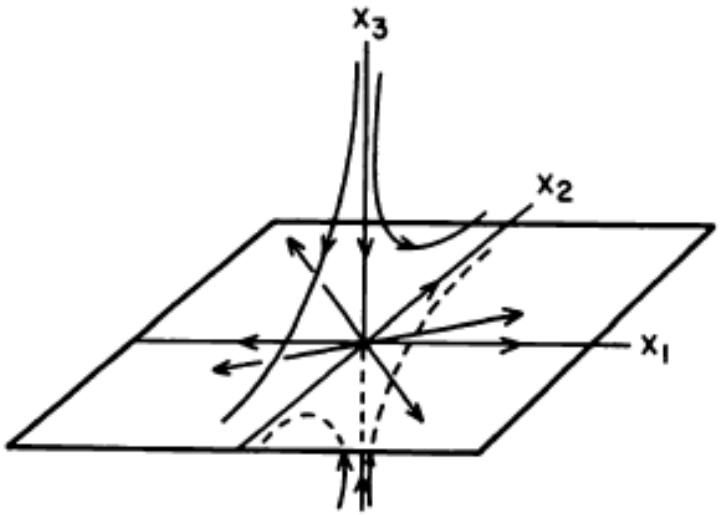


Campo de direcciones para el sistema (1).

Para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_3, \end{cases} \tag{2}$$

se obtiene el diagrama de fases



La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado.

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

Sea $Y = P^{-1}X$, entonces

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]Y$$

que constituye un sistema no acoplado para Y. La solución general de dicho sistema es

$$Y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]Y(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

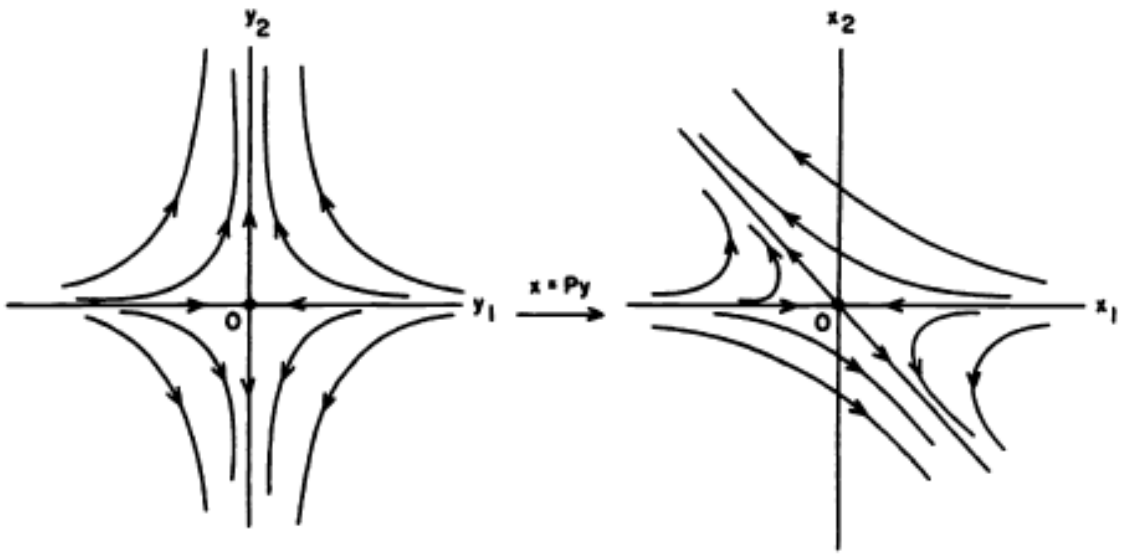
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$



Subespacios estables e inestables

Suponga que A es una matriz $n \times n$ con k valores propios negativos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ y $n-k$ valores propios positivos $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$. Sean $v_1, ..., v_n$ los vectores propios asociados. El subespacio estable del sistema $X' = AX$ es

$$E^s = \text{span } \{v_1, ..., v_k\}.$$

El subespacio inestable es

$$E^u = \text{span } \{v_{k+1}, ..., v_n\}.$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Dado que el principal interés es resolver sistemas de la forma

$$X' = AX$$

asumiremos que T está representado por una matriz A con repecto a la base canónica y definimos e^{At} como sigue:

Exponencial de At

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{A} = e^{a} \begin{bmatrix} \cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la forma canónica de Jordan, para cada matriz A de tamaño 2×2, existe una matriz inversible P tal que

$$P^{-1}AP = B$$

donde B admite una de las siguientes formas:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Teorema fundamental para sistemas lineales

Sea A una matriz real $n \times n$. Entonces, dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

admite una única solución dada por

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

Ejemplo: resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esboce las curvas solución en el diagrama de fases $\mathbb{R}^2$.

Para conocer el comportamiento de las soluciones del sistema plano

$$X' = AX$$

recordemos que existen matrices P y B tales que

$$B = P^{-1}AP,$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Luego, si conocemos el comportamiento de las curvas solución del sistema

$$Y' = BY$$

mediante la transformación lineal $X(t) = PY(t) = Pe^{Bt}c$ podemos recuperar información sobre las curvas solución del sistema original.

Caso I. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < 0 < \mu$.

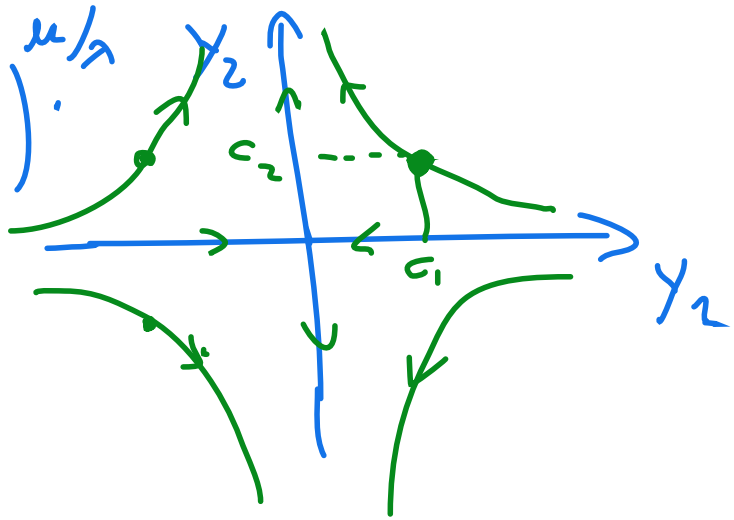
$A \rightarrow P^{-1} A P = B$

$Y' = BY$

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) \longrightarrow y_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \\ y_2'(t) = \mu y_2(t) \longrightarrow y_2(t) = c_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

$$y_2 = c_2 e^{\mu t} = c_2 \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda}$$

$$y_2 = \frac{c_2}{c_1^{\mu/\lambda}} y_1^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}$$

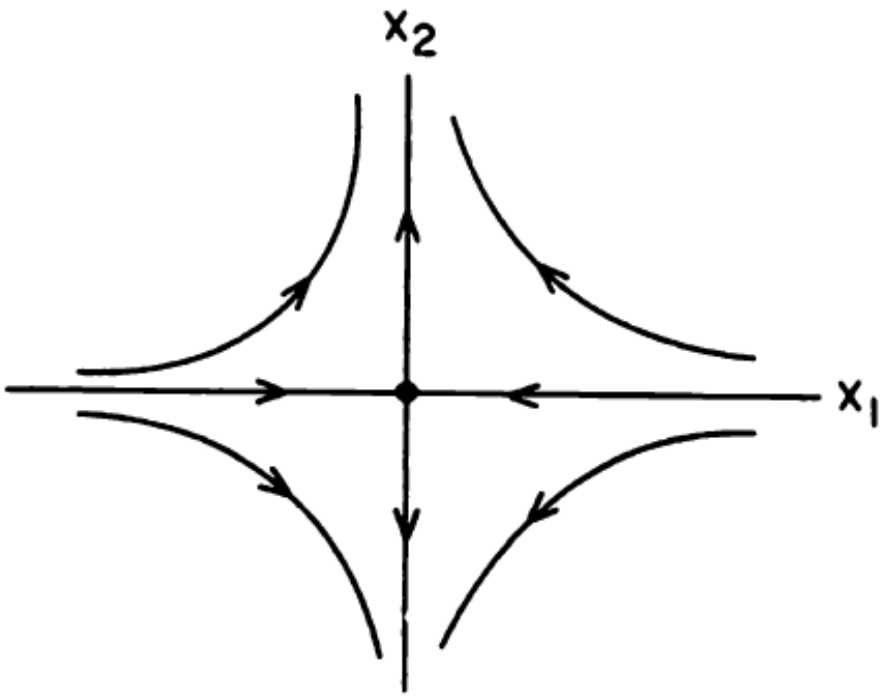


Caso I. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < 0 < \mu$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \mu x_2 \end{cases}$$

Luego, $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Entonces si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}$$



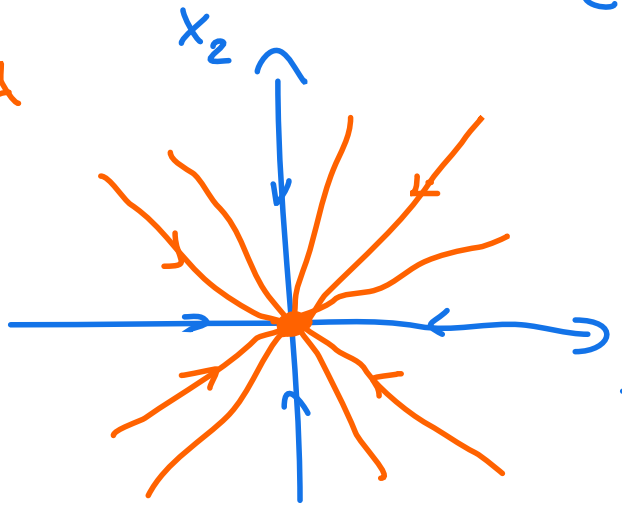
El origen es un punto silla. Si $\mu < 0 < \lambda$, las flechas se revierten.

Caso II. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \leq \mu < 0$ o $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$.

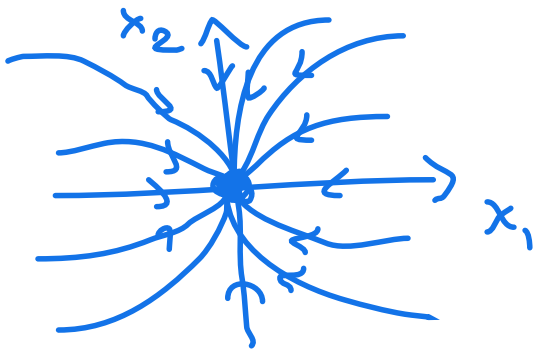
$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \longrightarrow x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \\ x_2' = \mu x_2 \longrightarrow x_2(t) = c_2 e^{\mu t} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$x_2 = c_2 e^{\mu t} = c_2 \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda} = \frac{c_2}{c_1^{\mu/\lambda}} \cdot x_1^{\mu/\lambda}.$$

$\mu = \lambda$



$\lambda < \mu < 0$

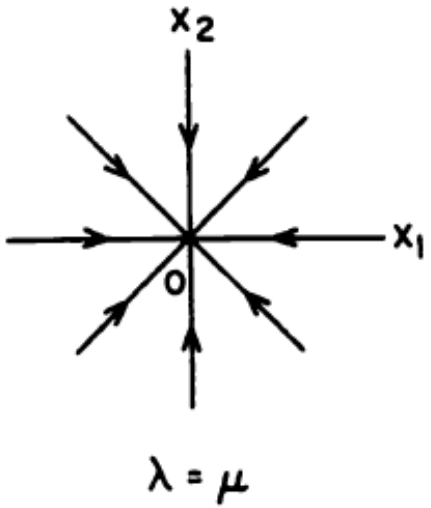


Caso II. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \leq \mu < 0$ o $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{cases}$$

y entonces

$$x_2 = cx_1.$$



El origen es un nodo estable.

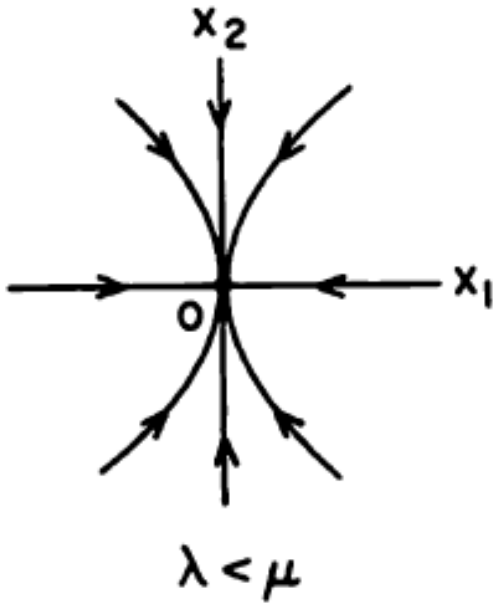
En el caso $\lambda > 0$, el origen es un nodo inestable.

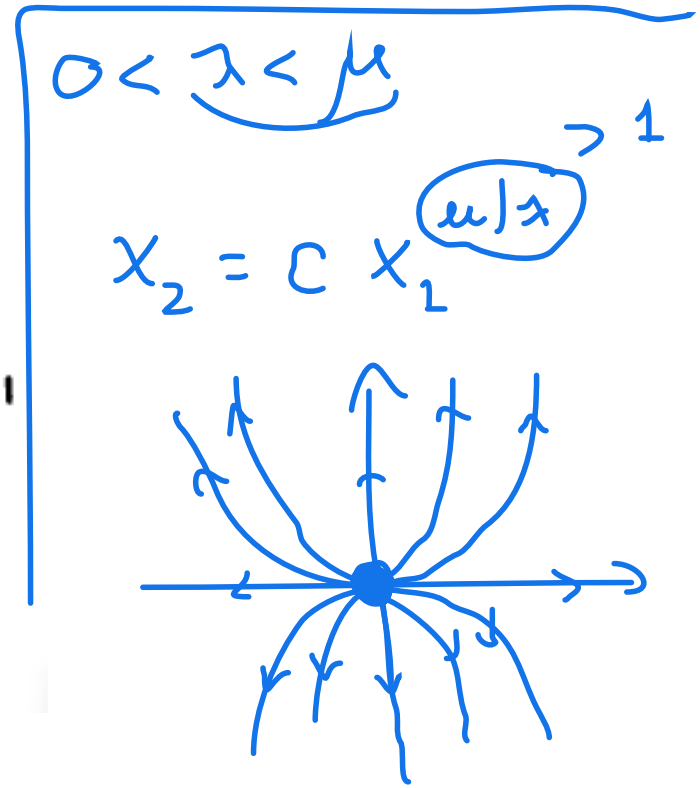
Si ahora $\lambda < \mu < 0$, entonces $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}.$$

Si ahora $\lambda < \mu < 0$, entonces $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}.$$





El origen es un nodo estable. Si $0 < \mu < \lambda$, las flechas se revierten. Si $0 < \lambda < \mu$, las curvas son convexas.

Finalmente, para $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$,

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' = \lambda x_2. \end{cases} \rightarrow \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

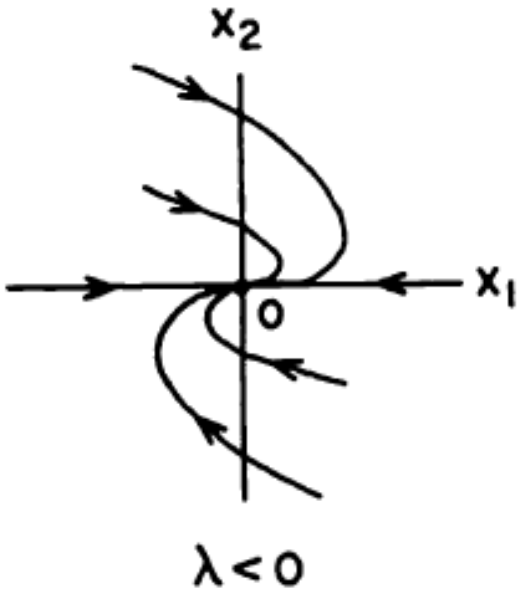
$$\left[x_1'(t) = \lambda x_1(t) + c_2 e^{\lambda t} \right]$$

$$x_1(t) = \underbrace{x_1^{(h)}(t)}_{c_1 e^{\lambda t}} + \underbrace{x_1^{(p)}(t)}_{c t e^{\lambda t}}$$

$$x_1 = (c_1 + c(t)) e^{\lambda t} = \left[c_1 + \frac{c}{\lambda} \ln\left(\frac{x_2}{c_2}\right) \right] \cdot \frac{x_2}{c}$$

Finalmente, para $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$,

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' = \lambda x_2. \end{cases}$$



El origen es un nodo estable.
En el caso $\lambda > 0$, el origen es un nodo inestable.

Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$x_1(t) = e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right)$$

$$x_2(t) = e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right).$$

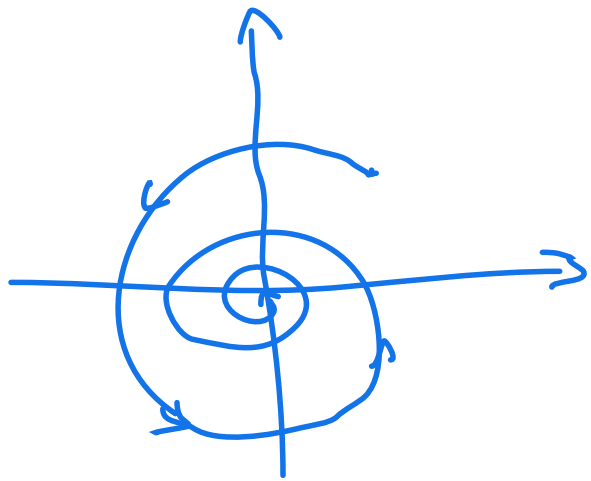
Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$x_1(t) = e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right)$$

$$x_2(t) = e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2 e^{2at}, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

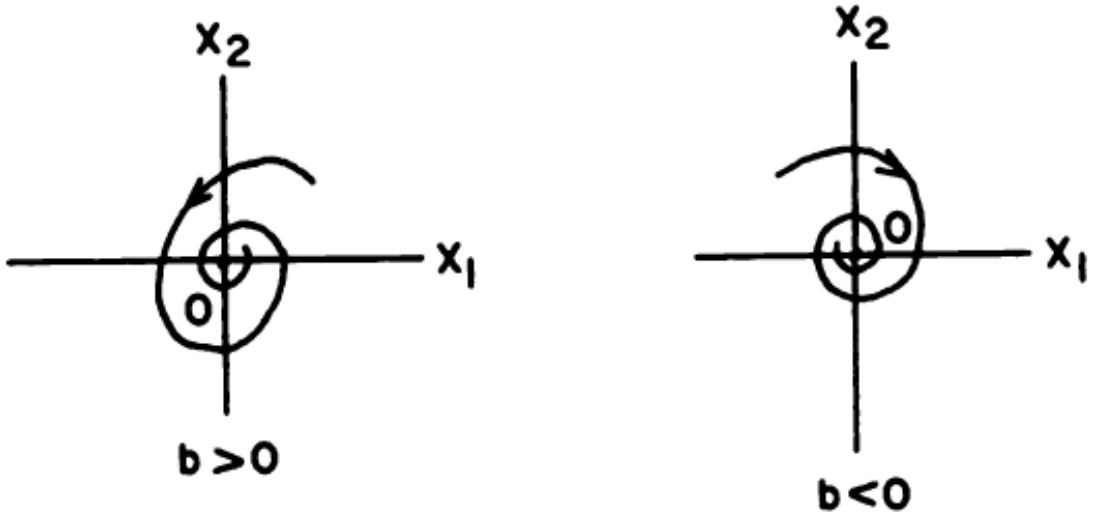


Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right) \\ x_2(t) &= e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right). \end{aligned}\right\}$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2 e^{2at}, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$



El origen es un foco estable. Si $a > 0$, el origen es un foco inestable.

Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

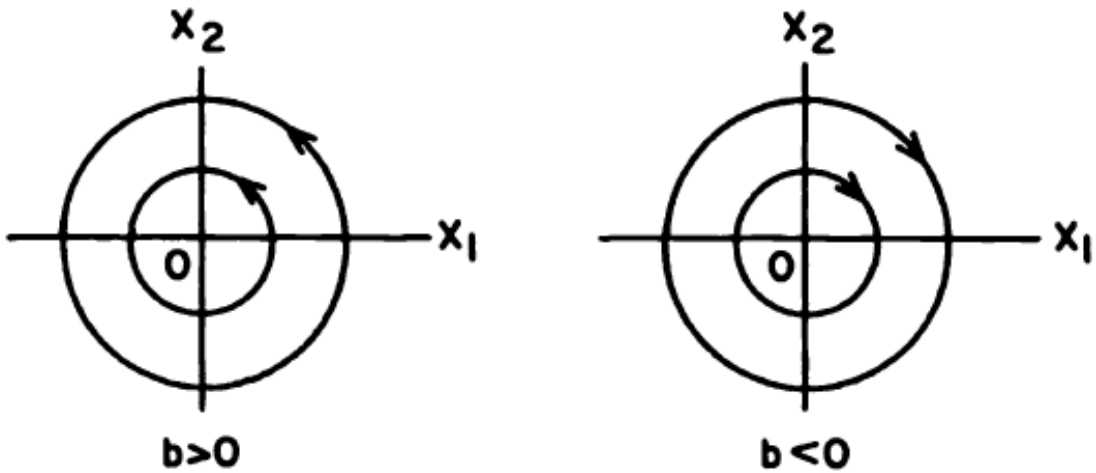
Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$



El origen es un centro.

Ejercicio entrega para Jueves 29/10: dado el sistema

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_2 \\ x_2' = bx_1 + ax_2, \end{cases} \tag{3}$$

realice el siguiente procedimiento para encontrar la solución general.
Derive las ecuaciones (dependientes de t):

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \theta = tan^{-1}(x_2/x_1)$$

para obtener ($r \neq 0$):

$$r' = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{r} \quad \text{y} \quad \theta' = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{r^2}.$$

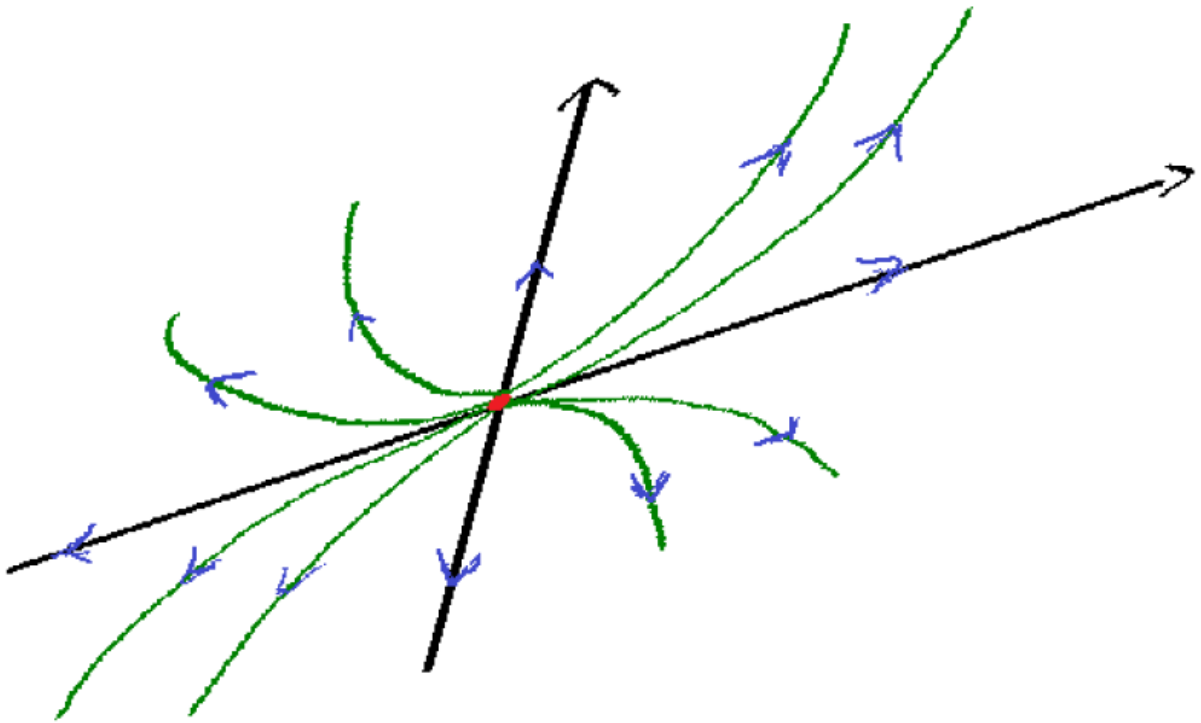
Utilizando el sistema 3, pruebe que las ecuaciones anteriores se reducen a

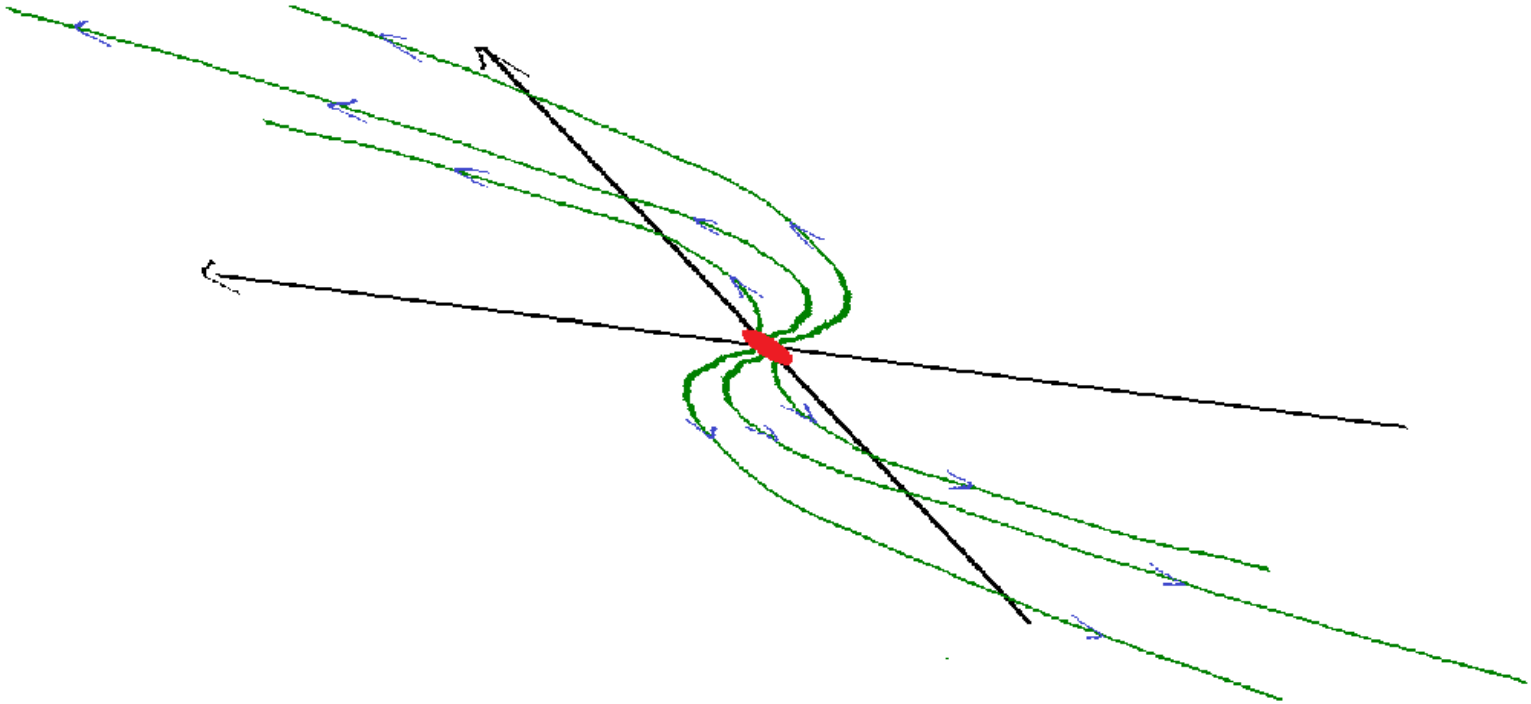
$$r' = ar, \quad \theta' = b.$$

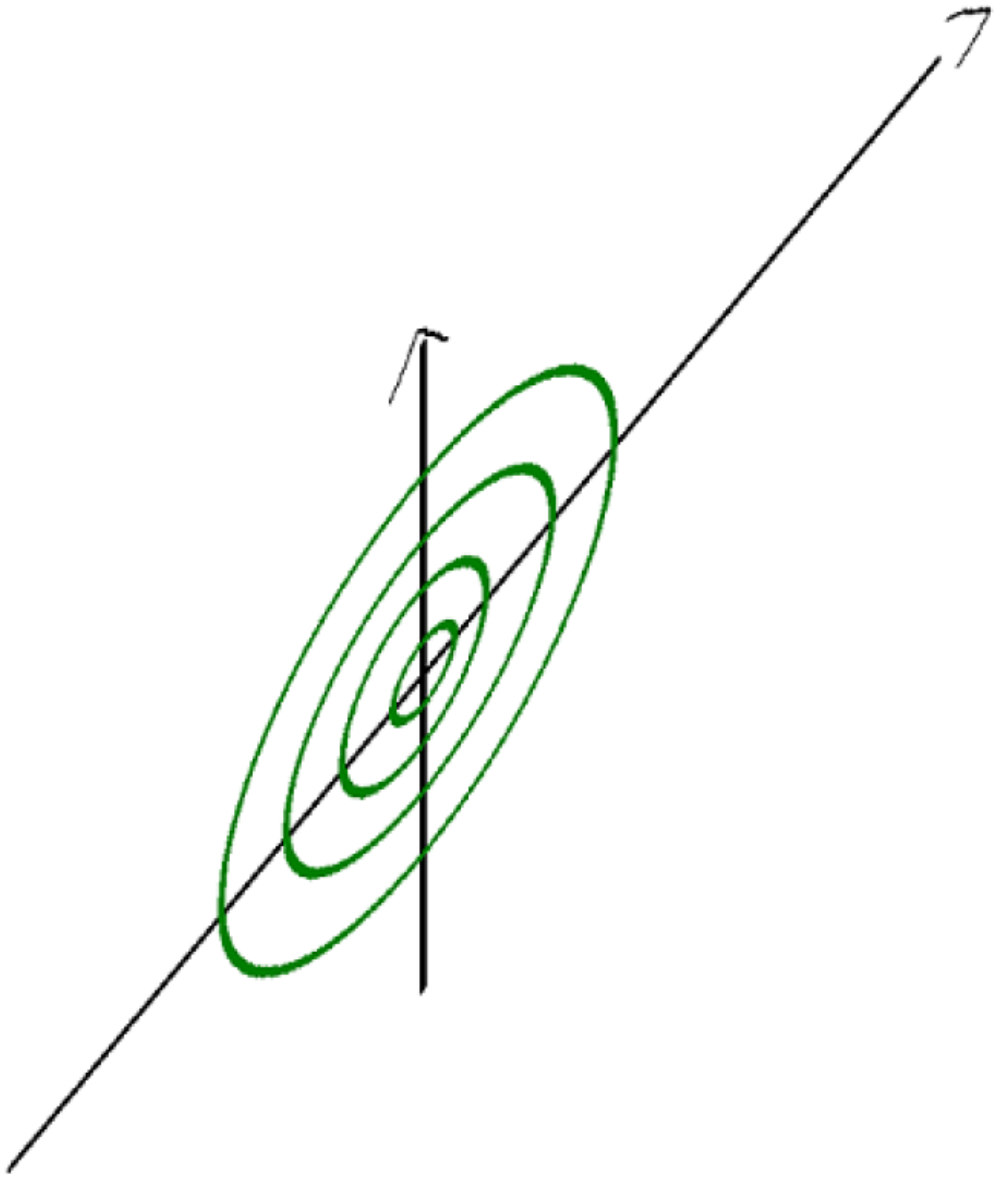
Resuelva estas ecuaciones con condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$.
Verifique que las soluciones obtenidas coinciden con las de las diapositivas anteriores.

Importante: considere el sistema plano $X' = AX$, con $\det A \neq 0$.

- Si A tiene dos autovalores reales de signo distinto, entonces el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso I**.
- Si A tiene autovalores reales repetidos pero es diagonalizable, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso II** diapositiva 16. Si ambos son negativos o ambos positivos y distintos, el diagrama de fases es linealmente equivalente al del **Caso II**, diapositiva 17.
- Si A tiene autovalores repetidos y no es diagonalizable, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso II**, diapositiva 18.
- Si A tiene autovalores complejos, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso III** o **Caso IV**.







$\det A = 4 \neq 0.$

Ejemplo: resuelva el sistema

$$X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X \qquad \begin{cases} x_1' = -4x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

y grafique las curvas solución del sistema analizando la transformación de las correspondientes curvas solución de $Y' = BY$ $(B = P^{-1}AP)$.

Ejercicio entrega para Jueves 29/10 (elija al menos uno de los tres casos)

If $\det A = 0$, then the origin is a degenerate critical point of $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Determine the solution and the corresponding phase portraits for the linear system with

(a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Note that the origin is not an isolated equilibrium point in these cases. The four different phase portraits determined in (a) with $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$, (b) and (c) above, together with the sources, sinks, centers and saddles discussed in this section, illustrate the eight different types of qualitative behavior that are possible for a linear system.

Estabilidad del equilibrio para sistemas planos

Suponga que $\det A \neq 0$. Entonces

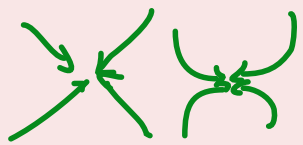
$$AX = 0 \text{ si y solo si } X = 0$$

es decir, el origen es el único punto de equilibrio del sistema.

Teorema

Sea $\delta = \det A$ y $\tau =$ traza A y considere el sistema

$$X' = AX. \tag{4}$$



- Si $\delta < 0$, entonces (4) tiene un punto silla en el origen.
- Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, entonces (4) tiene un nodo en el origen. Es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$, y $\tau \neq 0$, entonces (4) tiene un foco en el origen. Es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces (4) tiene un centro en el origen.

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} X.$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J \longrightarrow \boxed{A = PJP^{-1}}$$

$$X(t) = e^{At} X_0 = P e^{Jt} P^{-1} X_0$$

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Obtenemos

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Obtenemos

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$X(t) = e^{At}X_0 = Pe^{tJ}P^{-1}X_0$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 - t - t^2/2 & -2t - t^2/2 - t - t^2/2 & -t - t^2/2 & \\ t & 1 + t & t & t \\ t^2/2t + t^2/2 & 1 + t^2/2 & t^2/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_0.$$

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.
Tomemos

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1.$$

La solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.
Tomemos

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1.$$

La solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $X_0 \in E$ y supongamos que $f \in C^1(E)$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$X' = f(X)$$

$$X(0) = X_0$$

tiene una única solución en el intervalo $[-\delta, \delta]$.

$X = X(t; X_0)$

si $|X_0 - Y_0| < \eta$, ent.

$\max_t |X(t; X_0) - X(t; Y_0)| <$

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Sea $X' = f(X)$. Un punto X_0 se llama punto de equilibrio del sistema si

$$f(X_0) = 0.$$

Un punto de equilibrio se llama hiperbólico si ninguno de los autovalores de la matrix

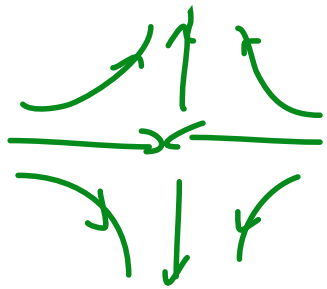
$$A = Df(X_0)$$

tiene parte real nula. El sistema lineal

$$X' = Df(X_0)X$$

se llama linealización del sistema $X' = f(X)$.

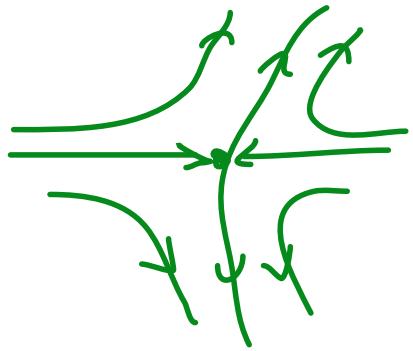
Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio



Supondremos que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal $X' = f(X)$.

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^1(E)$. El origen es un punto silla del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un punto silla del sistema linealizado.



Ejemplo: considere

$$x' = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$y' = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

$f(x;y)$ $(x,y)\neq(0$

con $x^2 + y^2 \neq 0$.

Ejemplo: considere

$$x' = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y' = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

con $x^2 + y^2 \neq 0$.

Sea $f(x,y) = (x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}, -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}})$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = (0,0)$. Entonces

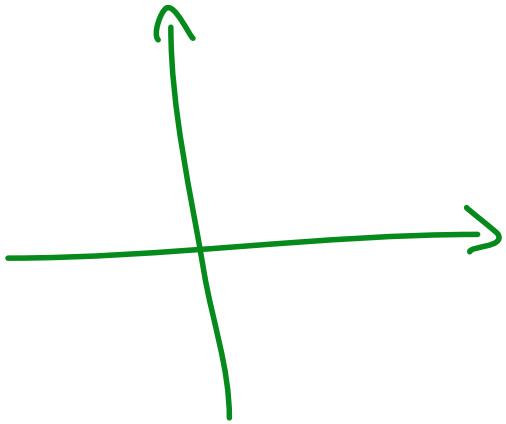
$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{pero } f \notin C^2(\mathbb{R}^2).$$

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

$1 > r_0 > 0$, $\theta_0 > 0$

En coordenadas polares,

$$\begin{cases} r' = -r \\ \theta' = \dfrac{1}{\ln r}. \end{cases}$$



Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

$r_0 < 1$

En coordenadas polares,

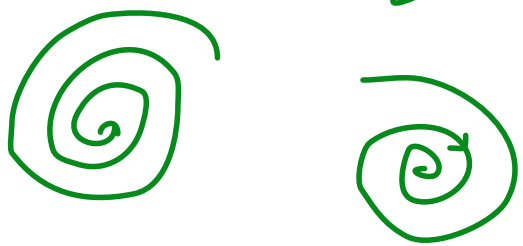
$$r' = -r \quad \rightarrow \quad r(t) = r_0 e^{-t} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$.

$|\theta(t)| \longrightarrow \infty$ $(t \to \infty)$

$$\theta'(t) = \frac{1}{\ln(r_0 \cdot e^{-t})} = \frac{1}{\ln r_0 - t}$$



Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$. Para $r_0 < 1$, el origen es un foco estable para el sistema no lineal.

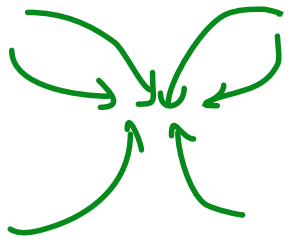
Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$. Para $r_0 < 1$, el origen es un foco estable para el sistema no lineal.
Ahora, si linealizamos, el origen es un nodo estable.

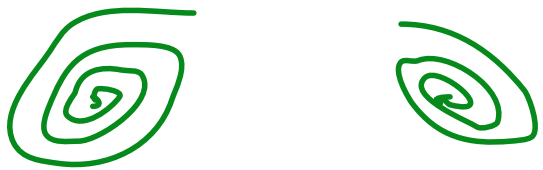


Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^2(E)$.

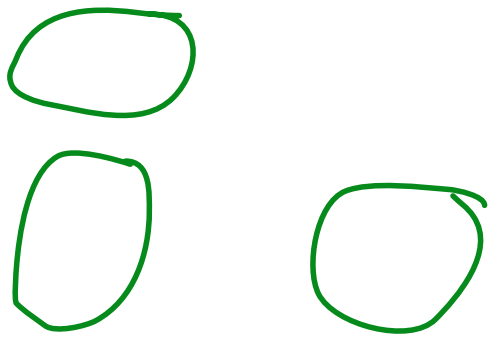
- El origen es un nodo estable (o inestable) del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un nodo estable (o inestable) del sistema linealizado.
- El origen es un foco estable (o inestable) del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un foco estable (o inestable) del sistema linealizado.



Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^1(E)$. Supongamos que el origen es un centro del sistema linealizado. Entonces el origen es un centro, un centro-foco o un foco del sistema no lineal.



Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Si $f \in C^1(E)$, $X_0 \in E$, punto de equilibrio hiperbólico. Entonces, el comportamiento del sistema $X' = f(X)$ alrededor del punto X_0 es similar al del sistema linealizado

$$X' = Df(X_0)(X - X_0).$$

Ejemplo: Polución y crecimiento

K : capital
P : polución
$Y = K^a$,$0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} \dot{K} = s\ K^{\alpha} - r\ K \\ \dot{P} = K^{\beta} - \gamma\ P \end{cases}$$

donde $0 < s < 1,\ r > 0,\ \beta > 1,\ \gamma > 0.$
$K(0) = K_0 > 0,\ P(0) = P_0 \geq 0$

Punto de equilibrio:

$$K^* = \left(\frac{s}{r}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad P^* = \frac{1}{\gamma}\left(K^*\right)^{\beta}$$

Matriz jacobiana:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{K}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{K}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{bmatrix}_{(K^*,P^*)} = \begin{bmatrix} -r(1-\alpha) & 0 \\ \beta \left(\frac{r}{s}\right)^{-(\beta-1)/(1-\alpha)} & -\gamma \end{bmatrix}$$

Equilibrio (K^*, P^*) **estable**: $\operatorname{tr}(A) < 0$, $\det(A) > 0$

Autovalores: $\lambda_1 = -r(1-\alpha)$, $\lambda_2 = -\gamma$

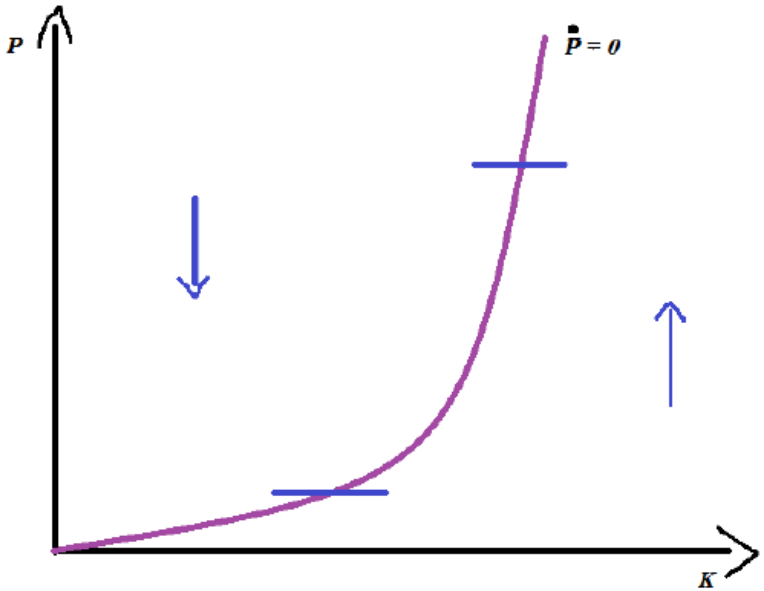
Autovectores: $v_1 = \begin{bmatrix} \gamma - r(1-\alpha) \\ \beta (K^*)^{\beta-1} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

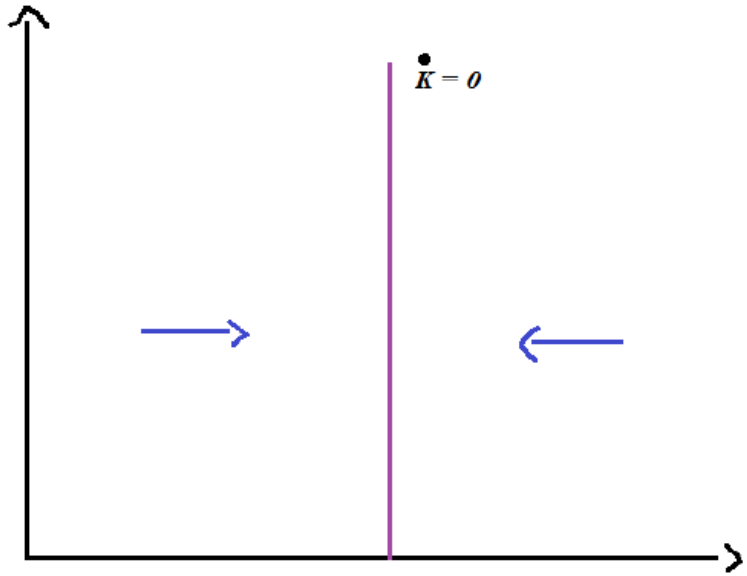
Casos:

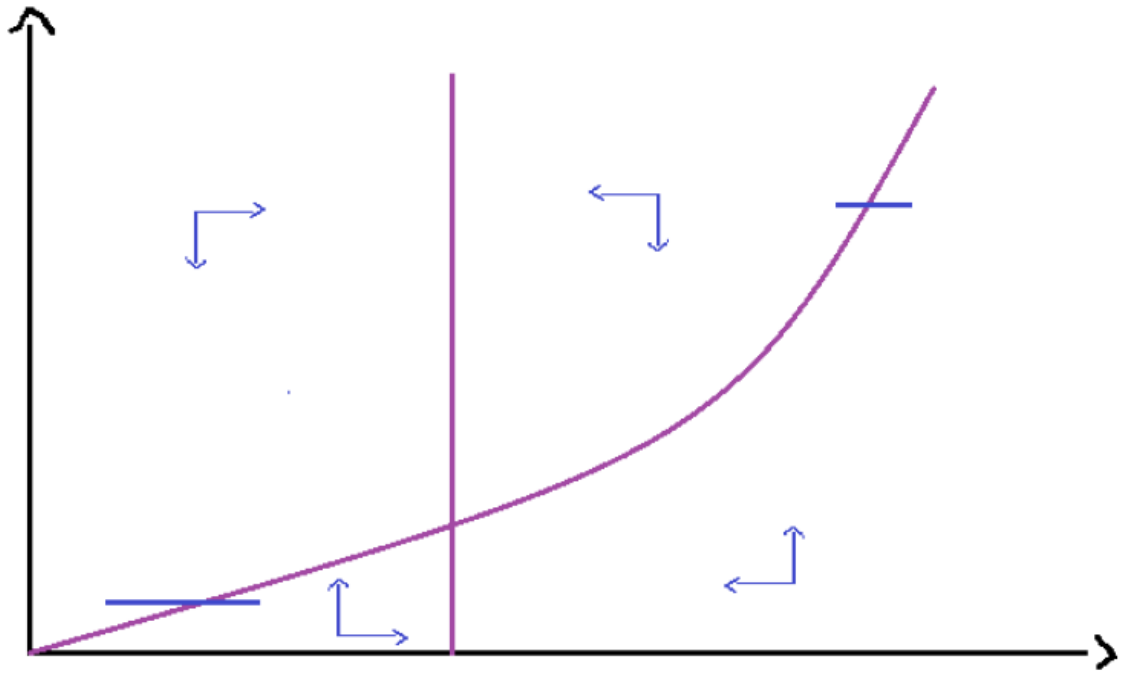
$\gamma > r(1-\alpha)$

$\gamma < r(1-\alpha)$

$\gamma = r(1-\alpha)$ (no diagonalizable)


P
$\dot{P} = 0$
K

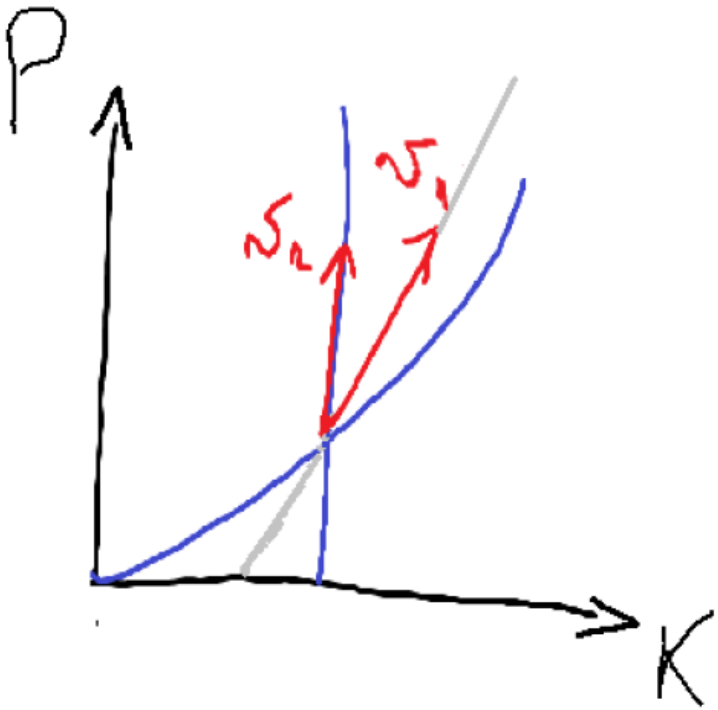

$\dot{K} = 0$



Caso $\gamma > r\left(1-\alpha\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial K}\Big|_{\dot{P}=0,\ K=K^*} = \frac{\beta}{\gamma}\left(K^*\right)^{\beta-1} < \frac{\beta\left(K^*\right)^{\beta-1}}{\gamma - r\left(1-\alpha\right)}$$

El autovector $v_1 = \begin{bmatrix} \gamma - r\left(1-\alpha\right) \\ \beta\left(K^*\right)^{\beta-1} \end{bmatrix}$ tiene más pendiente que la curva $\dot{P} = 0$ en el punto de equilibrio $\left(K^*, P^*\right)$.


P
K

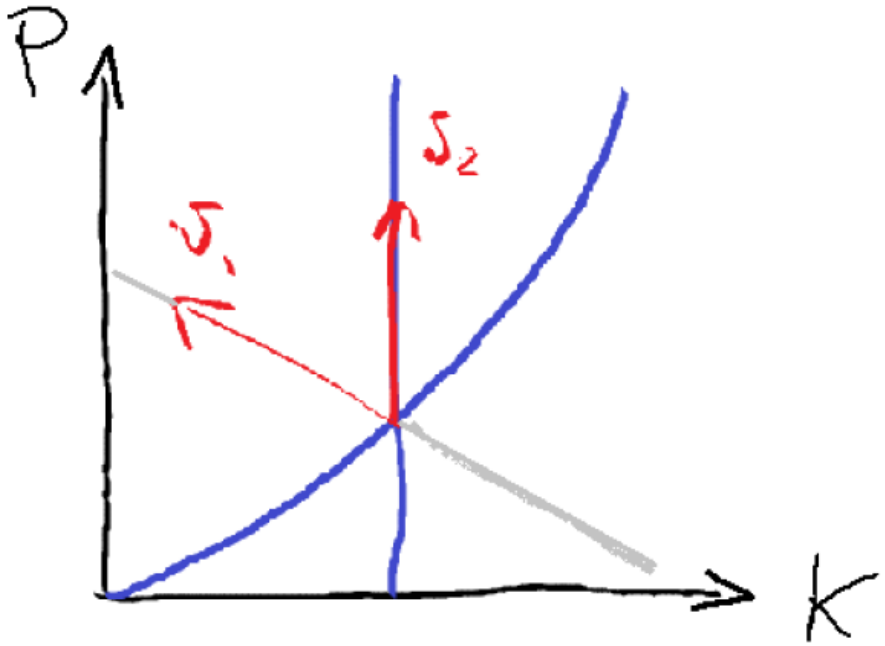
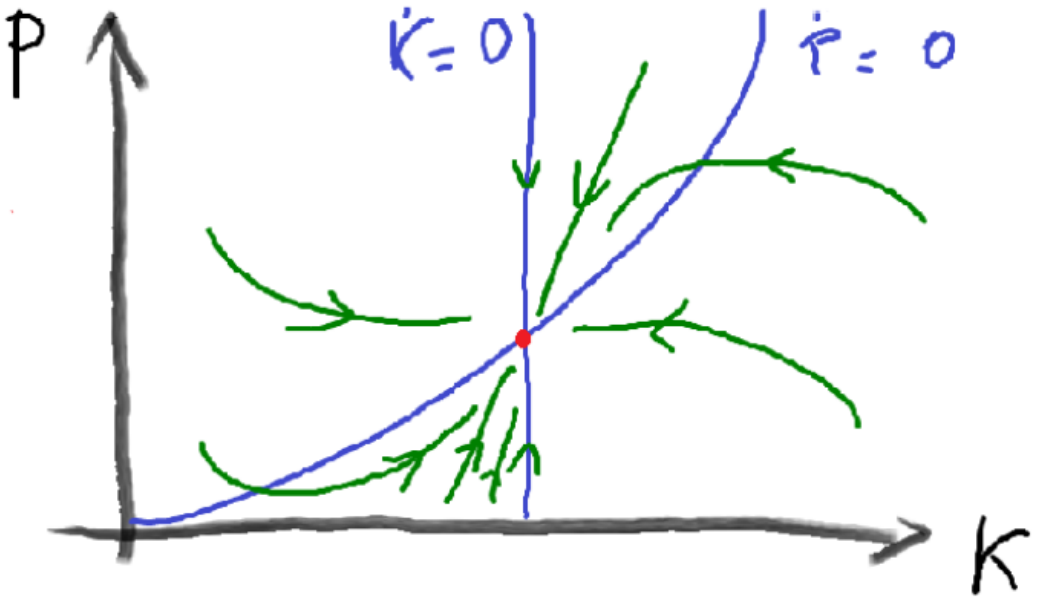

P
K

Diagrama de fase

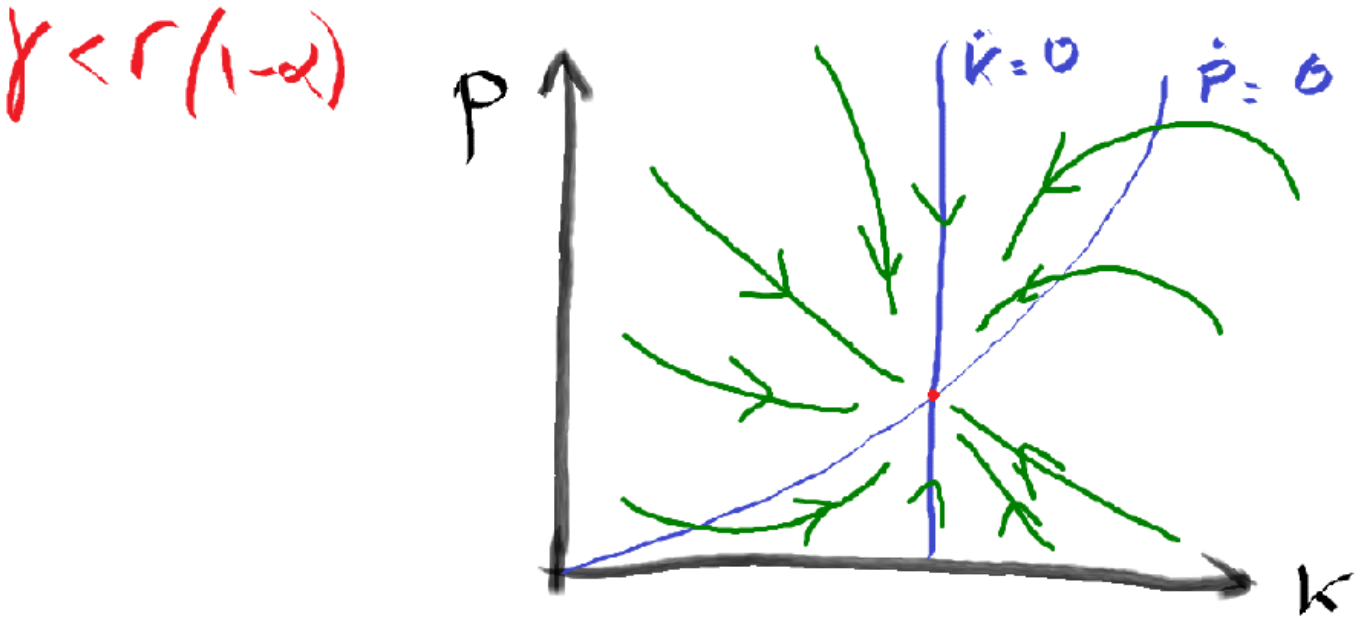
Equilibrio positivo (localmente) estable

$\gamma > \sigma(1-\alpha)$



Caso $\gamma < r\,(1-\alpha)$

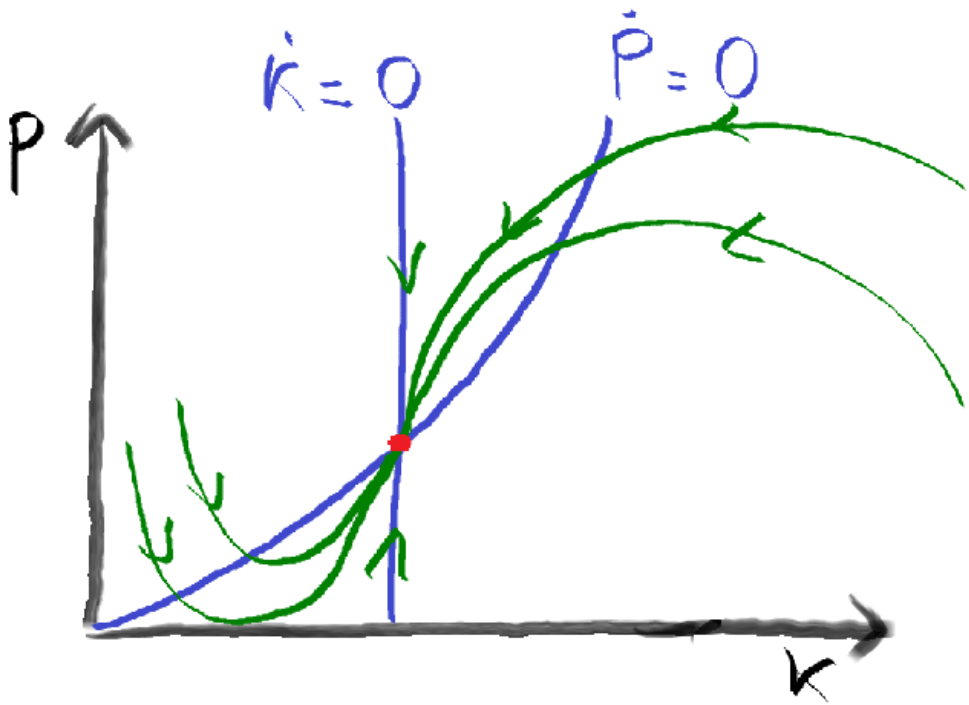
v_1 tiene pendiente negativa



Caso $\gamma = r\,(1-\alpha)$

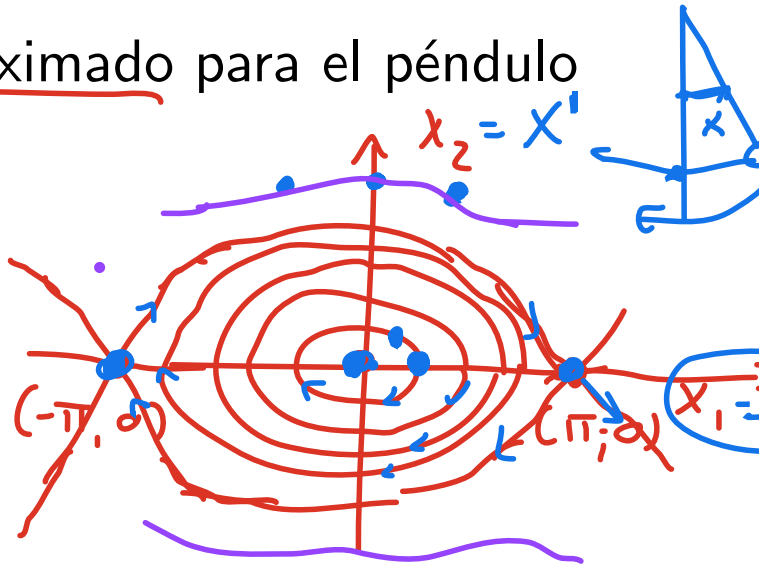
A no es diagonalizable (no existen v_1 y v_2 linealmente independientes)

$\gamma = r(1-\alpha)$



Ejemplo: construya un diagrama de fases aproximado para el péndulo simple

$$x'' + sen(x) = 0.$$



1°) sistema plano.

$x_1 = x$ $\quad x_2 = x'$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = 0 \\ x_2' = -sen\, x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{Df(x_1, x_2)}_{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puntos de equilibrio

$(0,0)$, $(\pi, 0)$; $(-\pi; 0)$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: construya un diagrama de fases aproximado para el péndulo simple

$$x'' + sen(x) = 0.$$

