UNIDAD 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Parte C: EDOs de orden superior

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2026



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERÍA

➢ 2026 | A 40 AÑOS DE LA RECUPERACIÓN DEL COGOBIERNO DEMOCRÁTICO DE LA UNCUYO

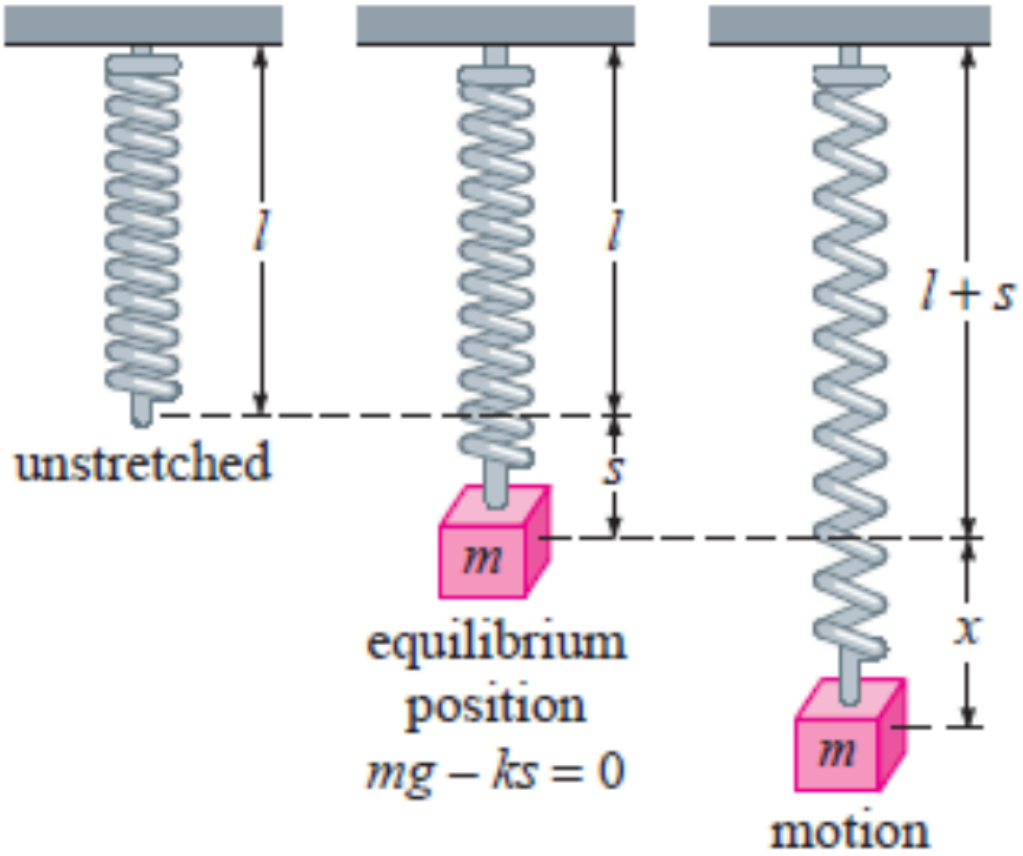
Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

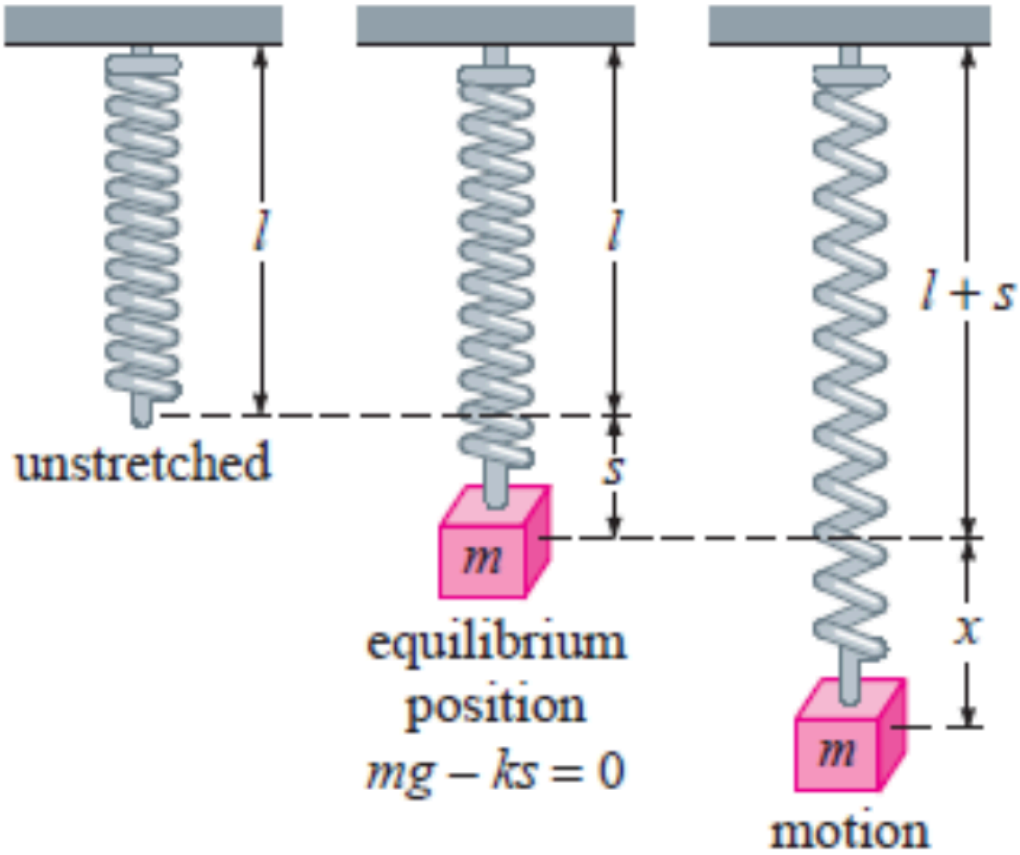
Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

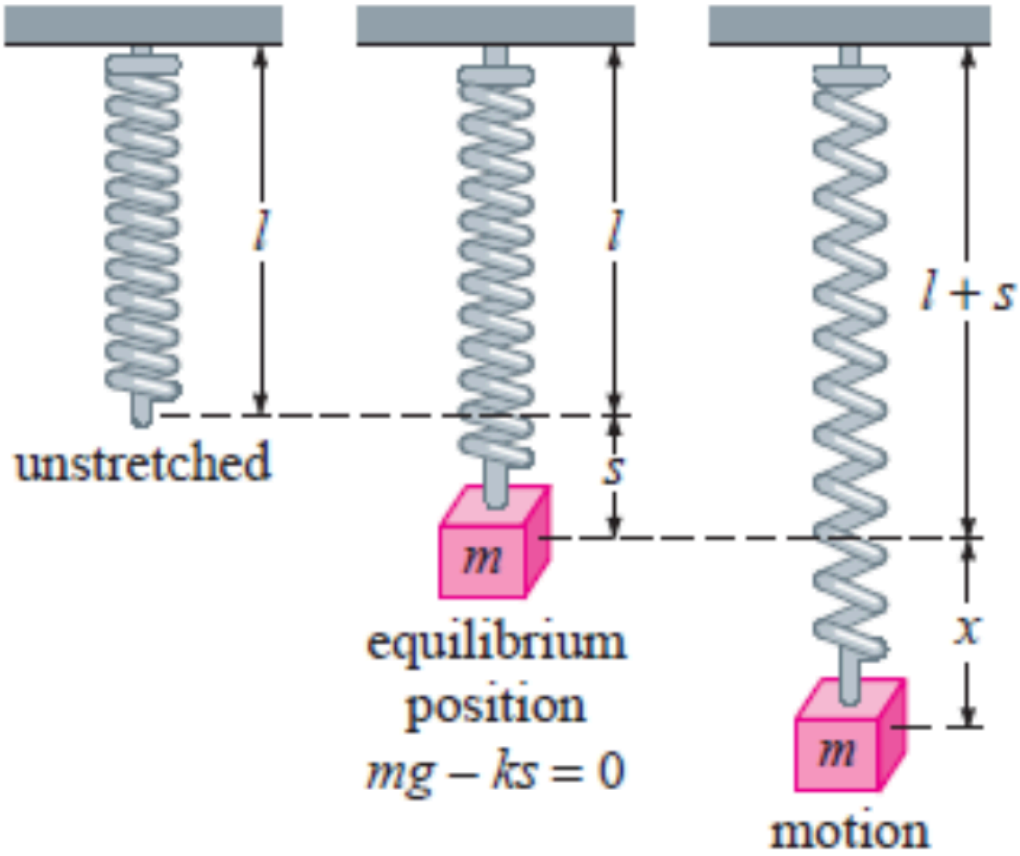
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

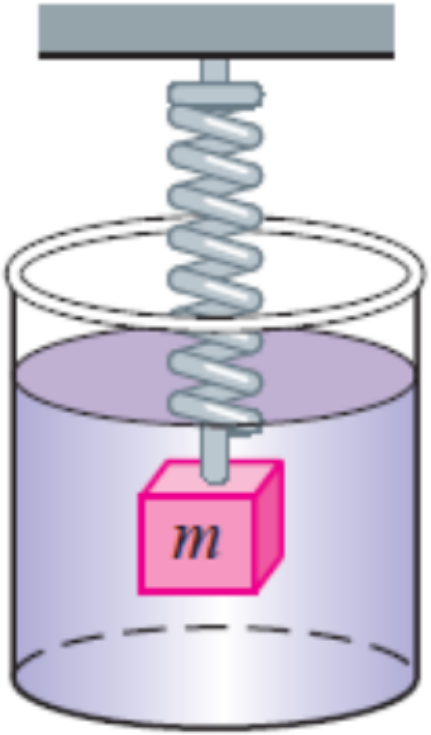
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

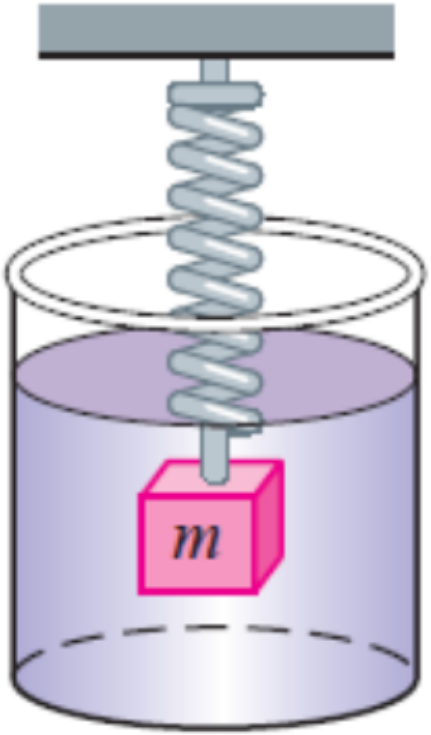
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

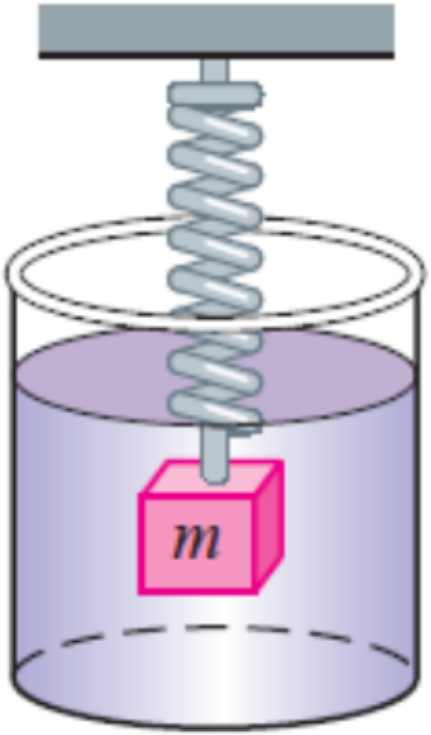
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



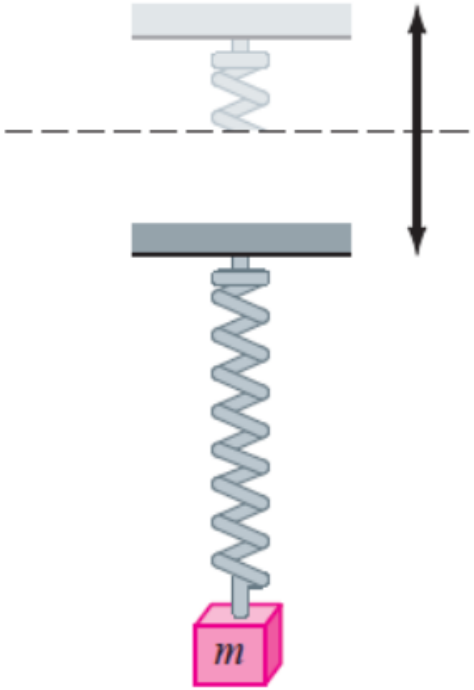
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

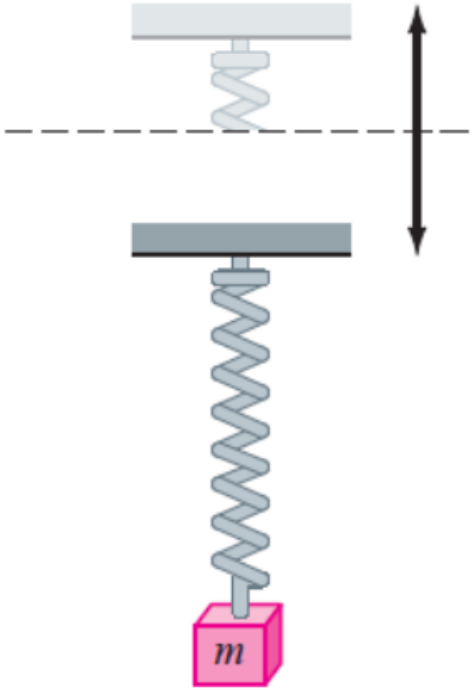
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

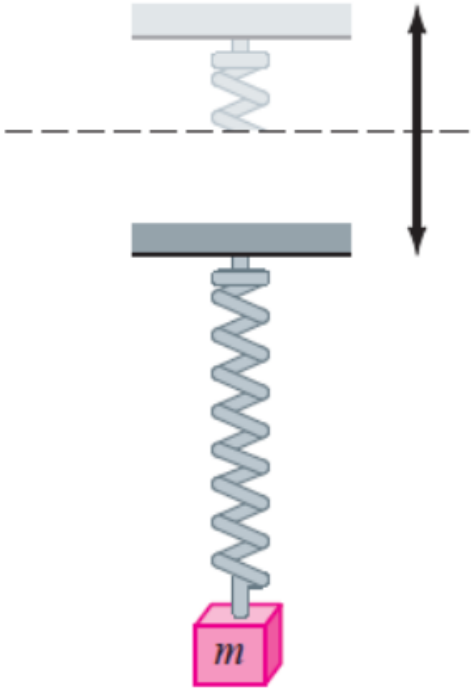
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



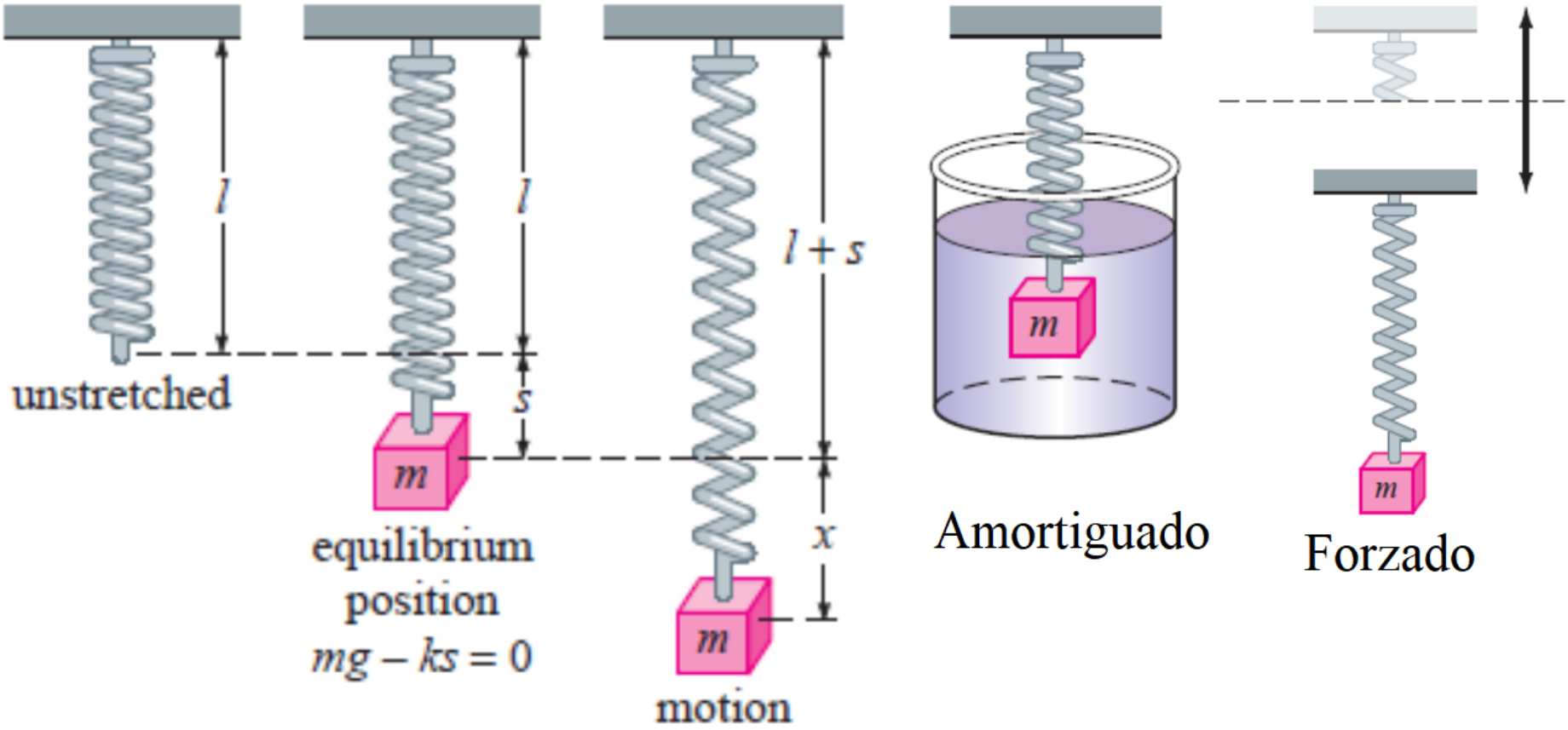
$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

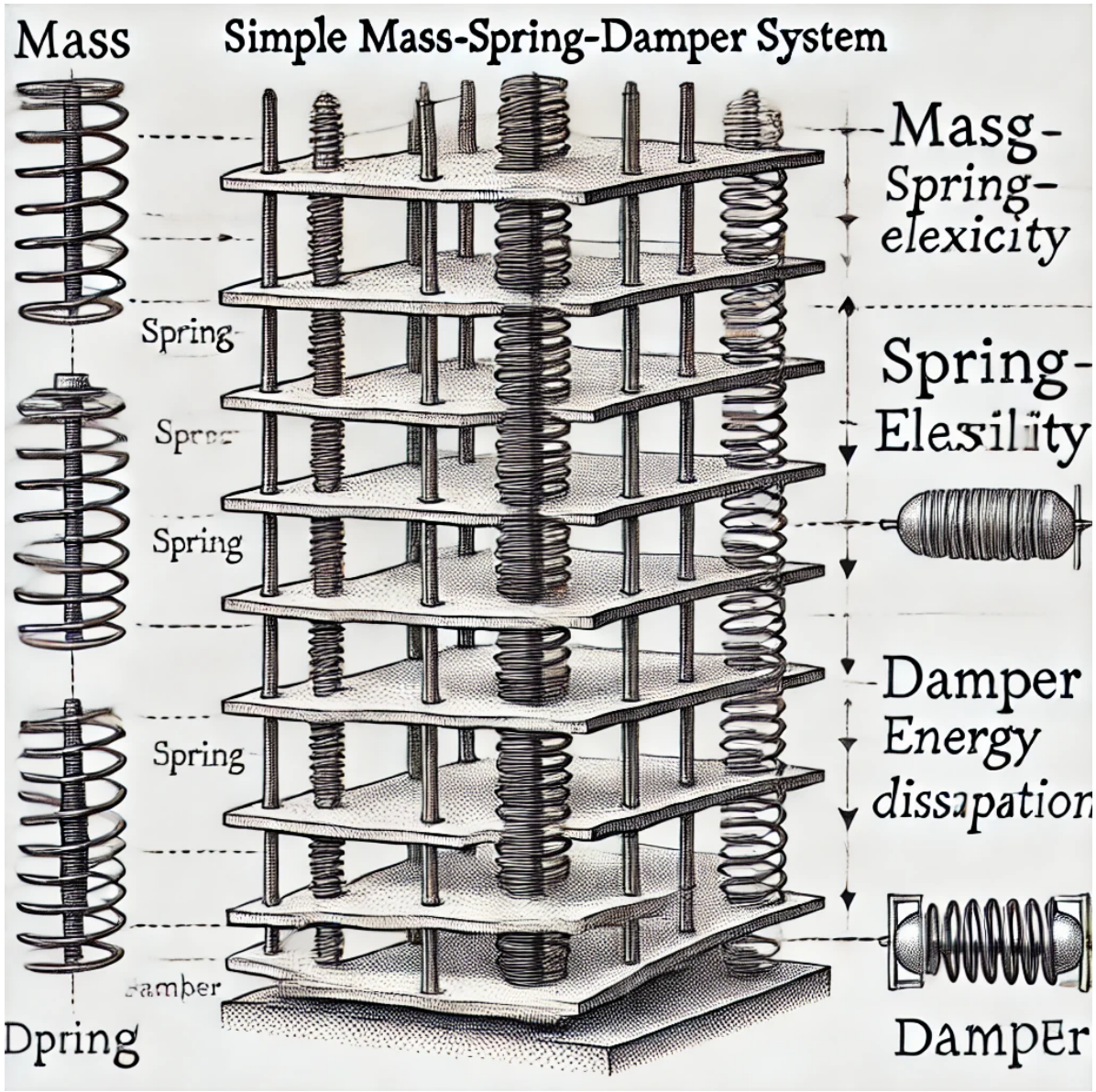
$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento en un sistema masa-resorte

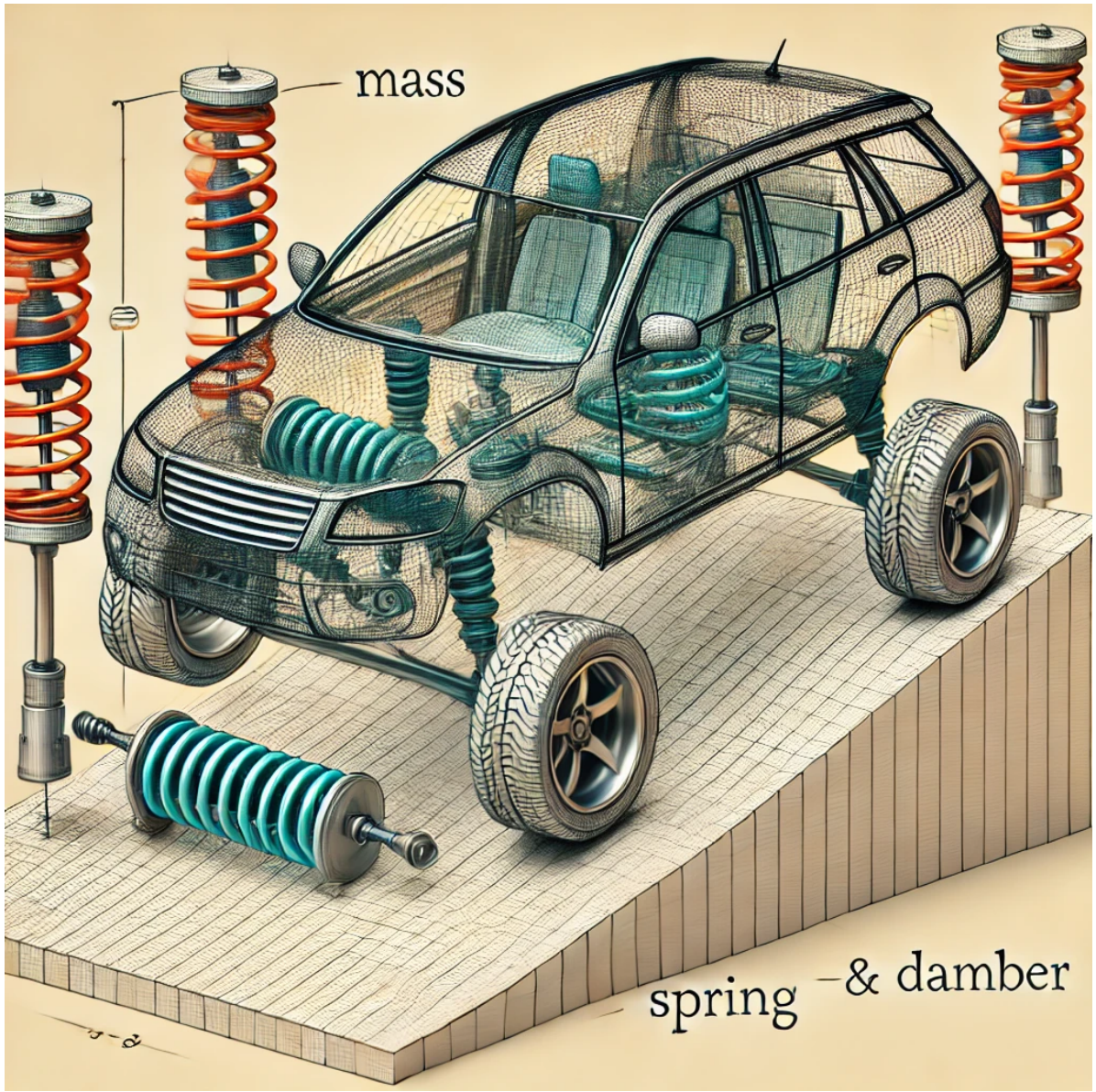


$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$$

Aplicaciones



Aplicaciones



Aplicación en Economía: modelo de Samuelson-Hicks (comparable al modelo masa-resorte)

$Y(t)$: ingreso total nacional; $C(t)$: consumo; $I(t)$: inversión; G_0: gasto público.
Relaciones:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G_0; \quad C(t) = cY(t),\ 0 < c < 1.$$

Por otra parte:
I_0: Inversión autónoma constante; $v > 0$: mide cuánto capital se requiere por unidad de aumento en la producción. $a > 0$: Coeficiente de inercia o retardo en el ajuste de capital. Así: $I(t) = I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t)$.

$$Y(t) = cY(t) + I_0 + v\,\dot{Y}(t) - a\,\ddot{Y}(t) + G_0$$

$$a\,\ddot{Y}(t) - v\,\dot{Y}(t) + (1-c)\,Y(t) = I_0 + G_0.$$

Ejercicios del TP 5

46. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte.
    - a) Determine la constante del resorte.
    - b) Plantee la ecuación diferencial del movimiento, sabiendo que se trata de un movimiento libre amortiguado en el que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.
    - c) Escriba en términos de su planteo, las siguientes condiciones: la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s.
    - d) Reescriba la ecuación diferencial, agregando a su modelo una fuerza externa dada por $f(t) = 3\cos(t)$ N.

Ejercicios del TP 5

46. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte.
    - a) Determine la constante del resorte.
    - b) Plantee la ecuación diferencial del movimiento, sabiendo que se trata de un movimiento libre amortiguado en el que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.
    - c) Escriba en términos de su planteo, las siguientes condiciones: la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s.
    - d) Reescriba la ecuación diferencial, agregando a su modelo una fuerza externa dada por $f(t) = 3\cos(t)$ N.
      Solución: $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 0$. Condiciones: $x(0) = 2$ m, $\dot{x}(0) = -3$ m/s. $1\,\text{kg}\,\ddot{x}(t) + 3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} + 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,x(t) = 3\cos(t)$ N.

Ejercicios del TP 5

47. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el desplazamiento $x(t)$ de un sistema masa-resorte, indique si el movimiento es *libre no amortiguado*, *libre amortiguado* o *forzado*. Indique además la frecuencia natural ω_0 del sistema homogéneo asociado:

    a) $\ddot{x}(t) + 16x(t) = 0$
    b) $2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$
    c) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 9x(t) = 5\cos(2t)$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.
La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Existencia de solución única a un PVI

Llamemos (1) al PVI

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \\ \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Existencia de una solución única)

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I, entonces ***existe*** *una* ***única*** *solución del PVI (1) en I.*

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

Problema con valores en la frontera: PVF

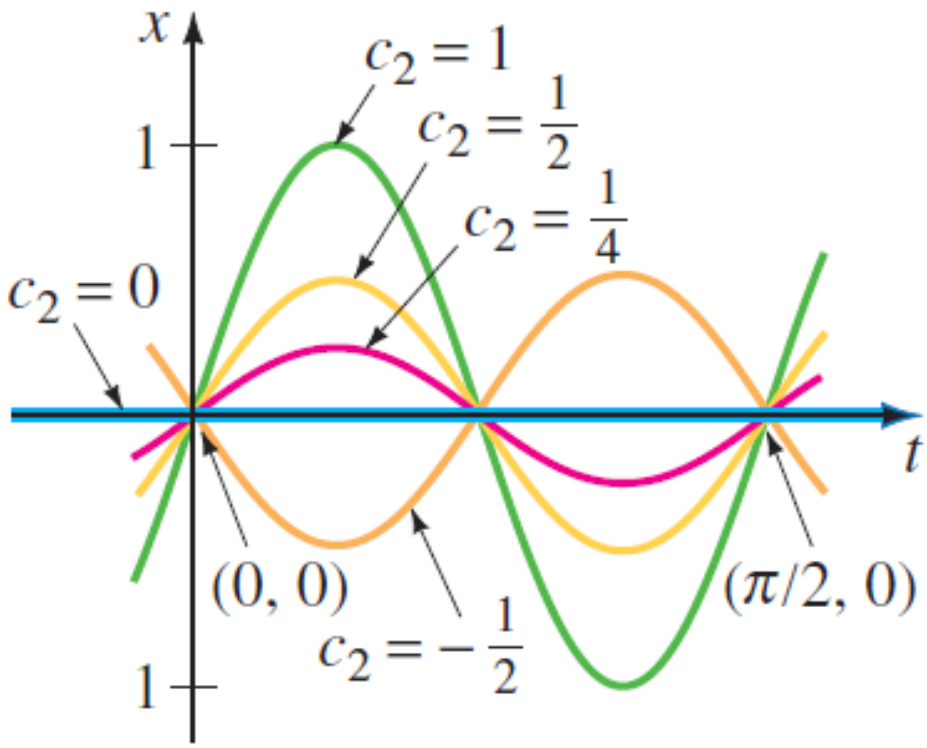
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

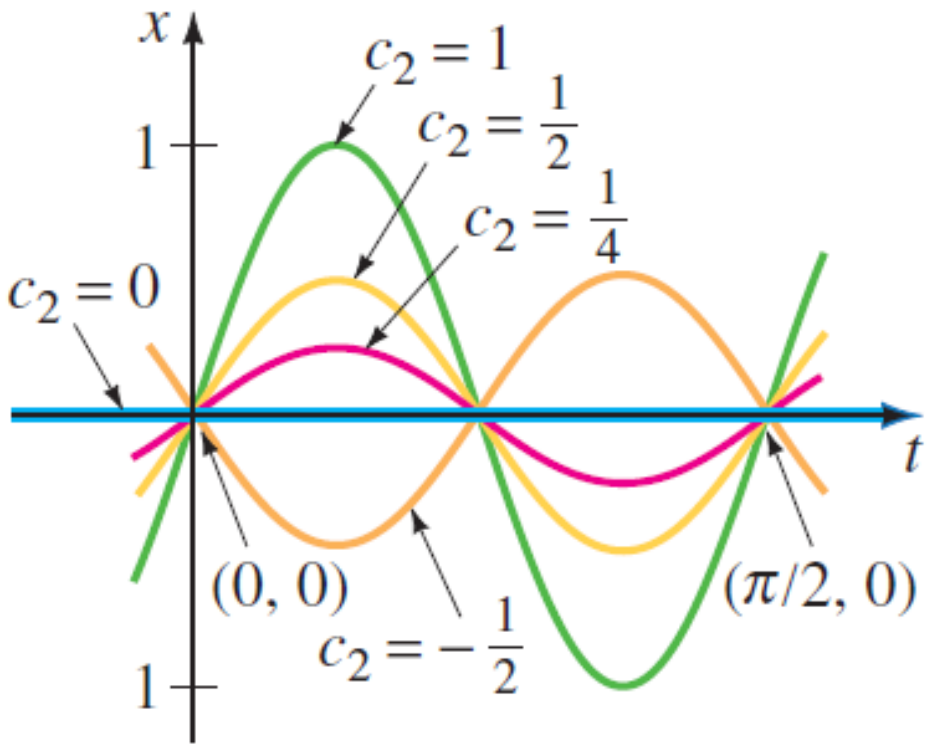
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

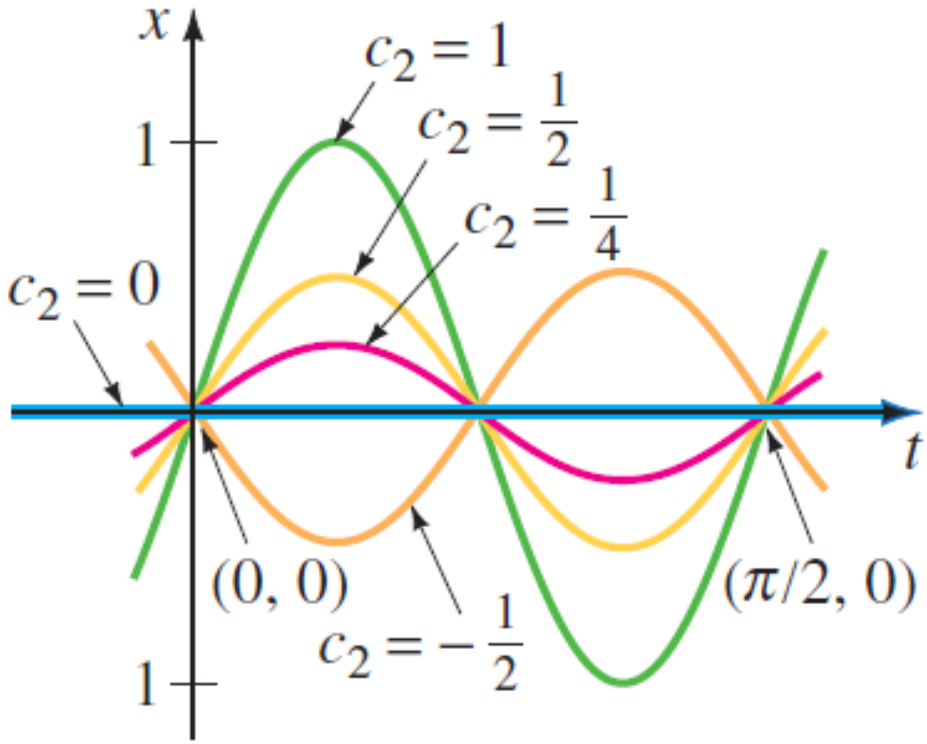


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



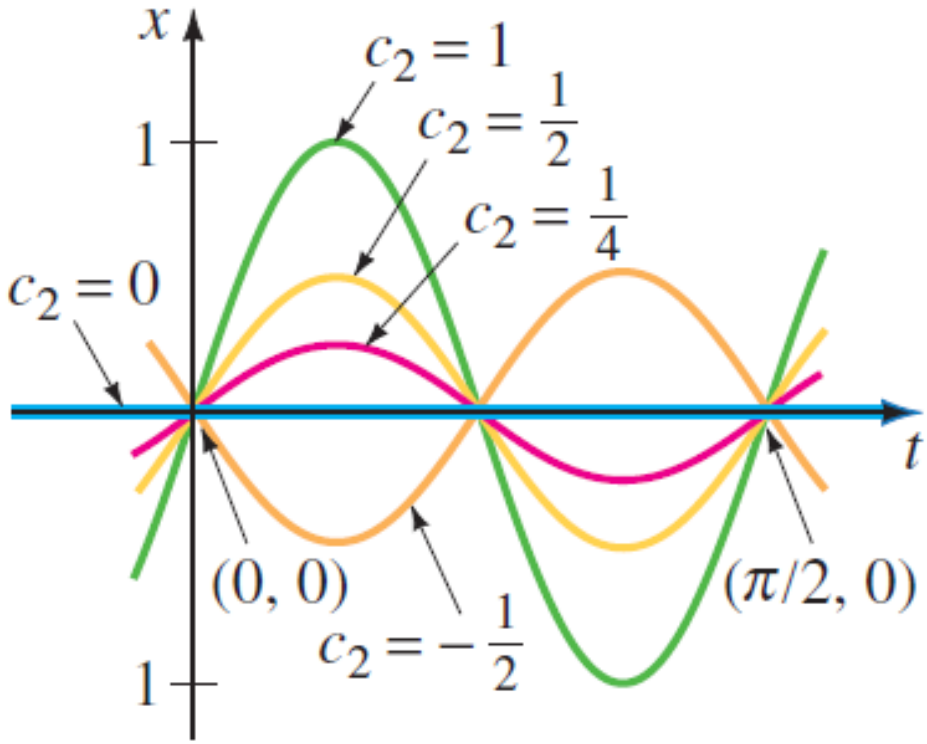
a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

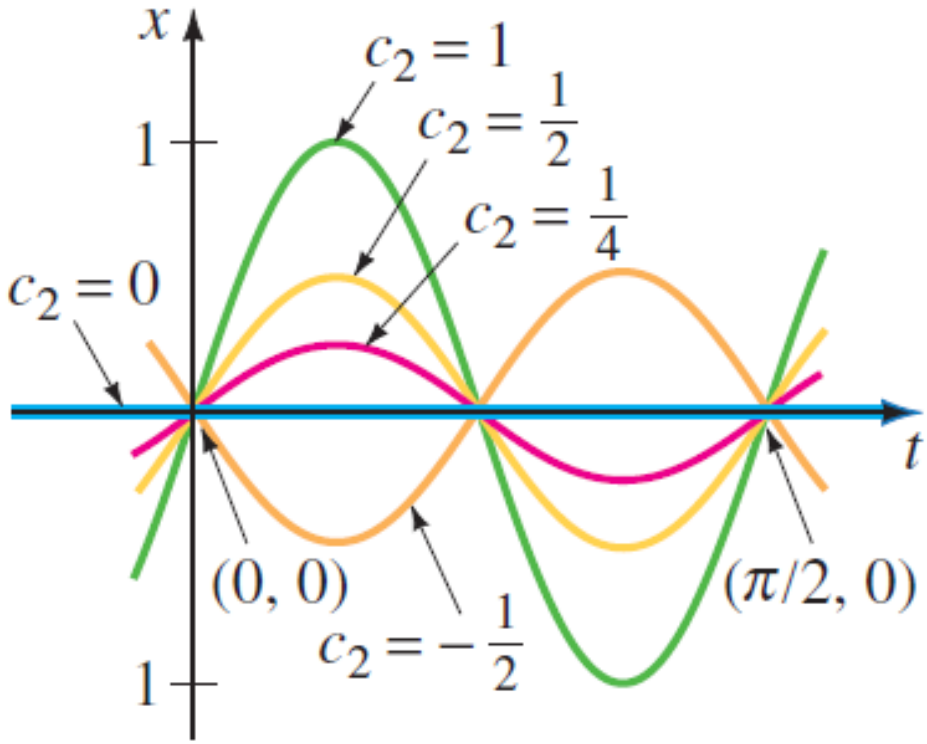
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

¿CONCLUSIÓN?

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier ED lineal homogénea.

2) Combinaciones lineales.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
- $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Wronskiano

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,...,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,\ldots,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una familia LI en I.

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,\ldots,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una familia LI en I.

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la ED $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ en I. Entonces $\{y_1, \cdots, y_n\}$ es LI en I si y solo si $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sin demostrar.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, existe un conjunto fundamental de soluciones en I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n es una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, existe un conjunto fundamental de soluciones en I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de ED lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, si $\{y_1, \cdots y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en I, la solución general se puede expresar como

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

(Sin demostrar.)

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación } \textit{me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $\quad y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0;$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED; probemos que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$

$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2(\beta x) + \beta\operatorname{sen}^2(\beta x)) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejercicios del TP 5

53. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

$a)$ (o) $4y'' + y' = 0.$

$b)$ (o) $y'' + 8y' + 16y = 0.$

$c)$ (o) $y'' - 3y' + 2y = 0.$

$e)$ (o) $y''' - 4y'' - 5y' = 0.$

$g)$ (o) $y''' + y'' - y' - y = 0.$

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Función o solución complementaria

Definición

Dada una ED no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la ED homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA o SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I. *Entonces la solución general de la ED tiene la forma*

$$y = y_c + y_p,$$

donde y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar. Se prueba para $n = 2$.

Teorema (Principio de superposición para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ...a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Observación: no hay relación entre k y n.

Demostración dejada como ejercicio.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Método de los coeficientes indeterminados

Método de Coeficientes Indeterminados

Dada una EDO $a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = g(x)$.
El **método de los coeficientes indeterminados** propone encontrar una solución particular $y_p(x)$ similar a $g(x)$.

1. Resolver la ecuación homogénea asociada.
2. Proponer la forma de la solución particular $y_p(x)$.
3. Derivar $y_p(x)$ e igualar en la EDO.
4. Resolver el sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes.

Limitación: sólo puede aplicarse para ciertas funciones g, tales como polinomios, senos, cosenos, exponenciales y combinaciones de éstas.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria:$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.
Paso 2: Derivamos y sustitumos:
$y_p'(x) = 2Ax + B$; $y_p''(x) = 2A$.

$$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6.$$

Igualamos y resolvemos:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \implies A = -1,\ B = -\frac{5}{2},\ C = -9.$$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$
Paso 1: Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$
Paso 2: Derivamos y sustitumos:
$y_p'(x) = 2Ax + B$; $y_p''(x) = 2A.$

$$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6.$$

Igualamos y resolvemos:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \implies A = -1,\ B = -\frac{5}{2},\ C = -9.$$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$
Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3} x e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Hallamos la solución complementaria: $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$
Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3} x e^x$.

3) $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta:
$y_c = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
$y_p = A\,\mathrm{sen}(3x) + B\cos(3x)$
$y_G = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Tabla

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma $ay'' + by' + cy = G(x)$.

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de . . .	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
sen kx, cos kx	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C\,\text{sen}\,kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Ejercicios del TP 5

58. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:

$a)$ (o) $y'' + y' - 6y = 2x$.

$b)$ (o) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.

$c)$ (o) $y'' + y' - 6y = 2x - e^{2x}$.

$g)$ (o) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$.

$k)$ (o) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ o subintervalos de éste.

Ejercicios del TP 5

59. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:

$a)$ (o) $y'' + y = \sec x$.

$b)$ (r) $y'' + y = \tan x$.

$c)$ (r) $y'' + y = 2\sec x - \tan x$.

$d)$ (o) $y'' + y = \sec^2 x$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

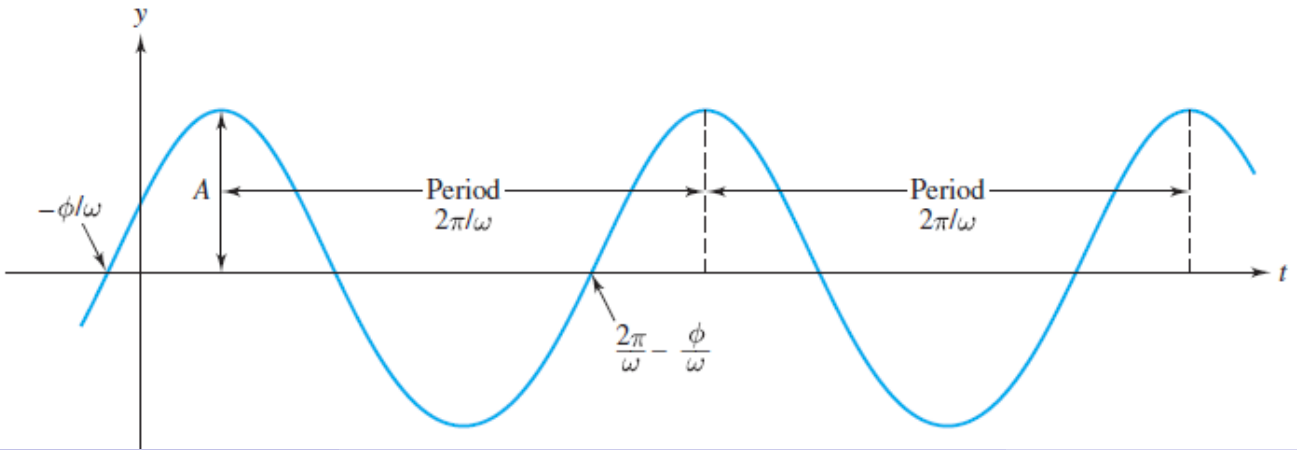
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \xrightarrow[\text{llevar a la forma}]{} y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$A \operatorname{sen}(\omega t+\phi) = A \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\phi)+A \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\phi) \implies \begin{cases} c_1 &= A \operatorname{sen}(\phi) \\ c_2 &= A \cos(\phi) \end{cases}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}; \qquad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

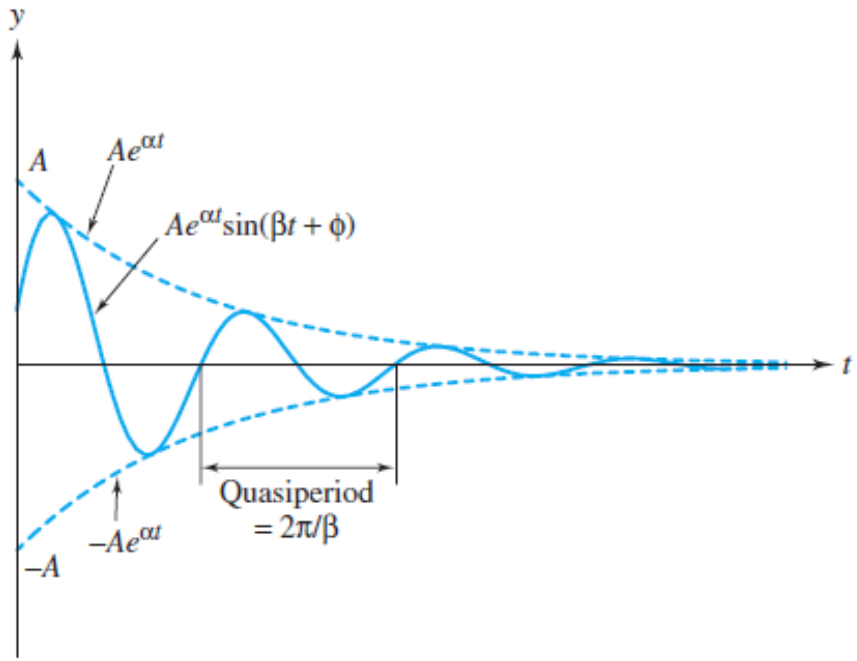
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento subamortiguado: $b^2 < 4mk \qquad \alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

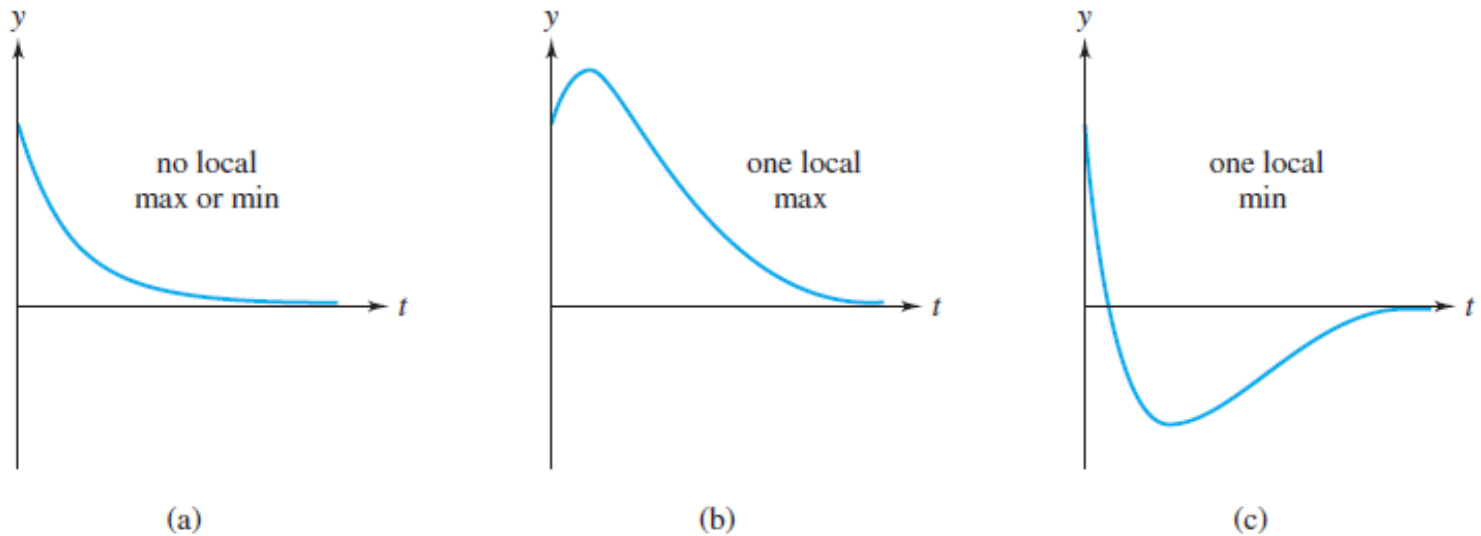
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > 4mk$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad r_1 < 0;\ r_2 < 0.$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

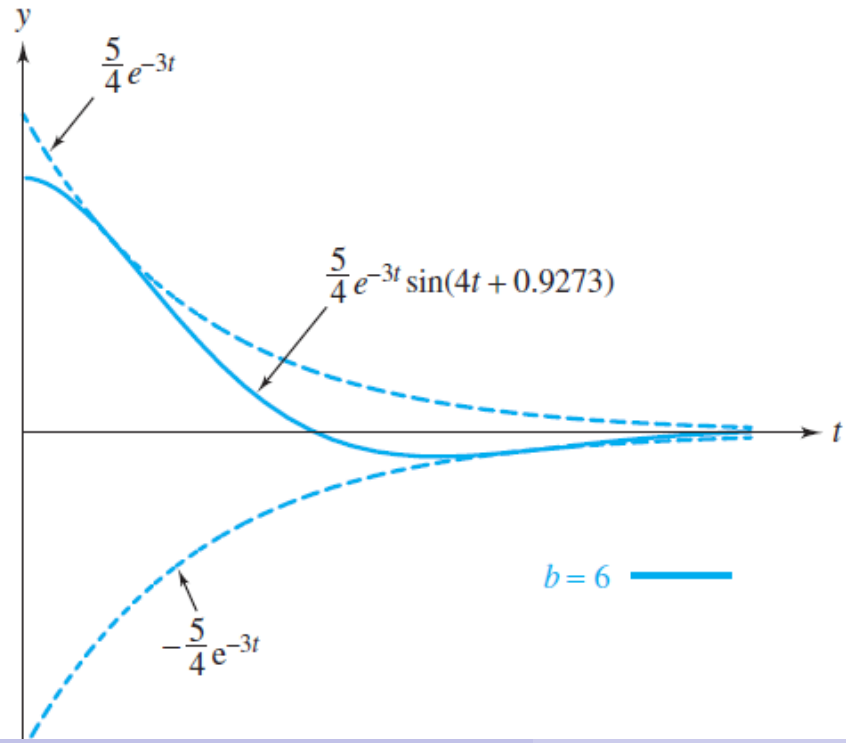
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

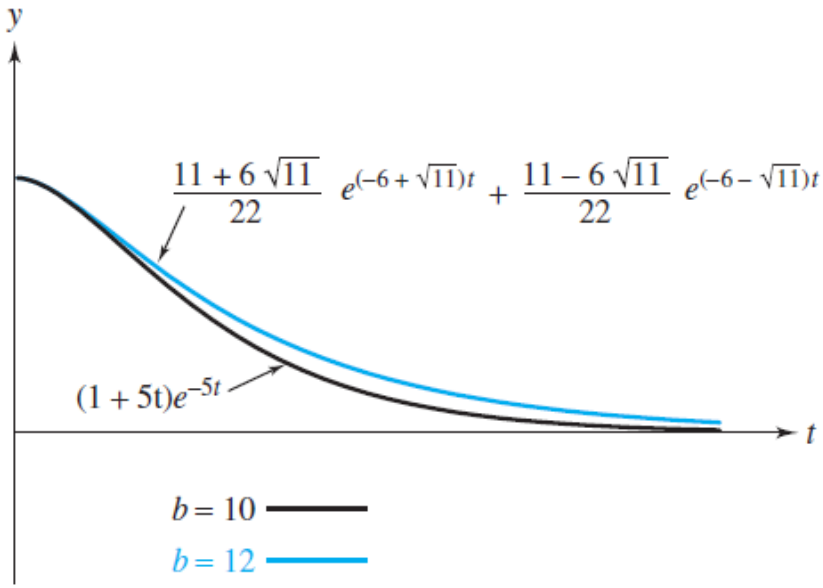
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = 4mk$

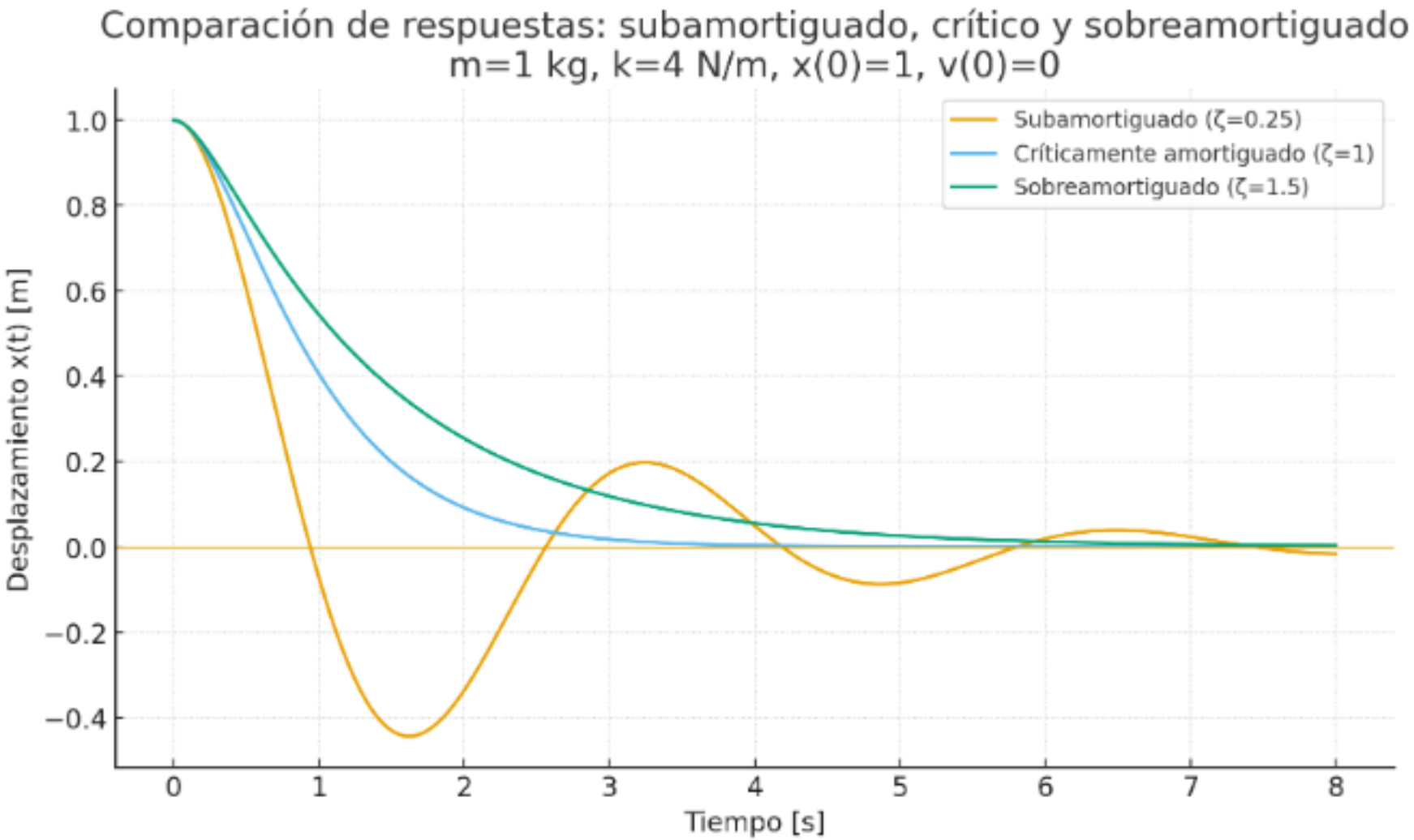
$$y = c_1\, e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2\, t\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad b = 6,\ 10,\ 12.$





Tres tipos de movimiento



Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk;$$

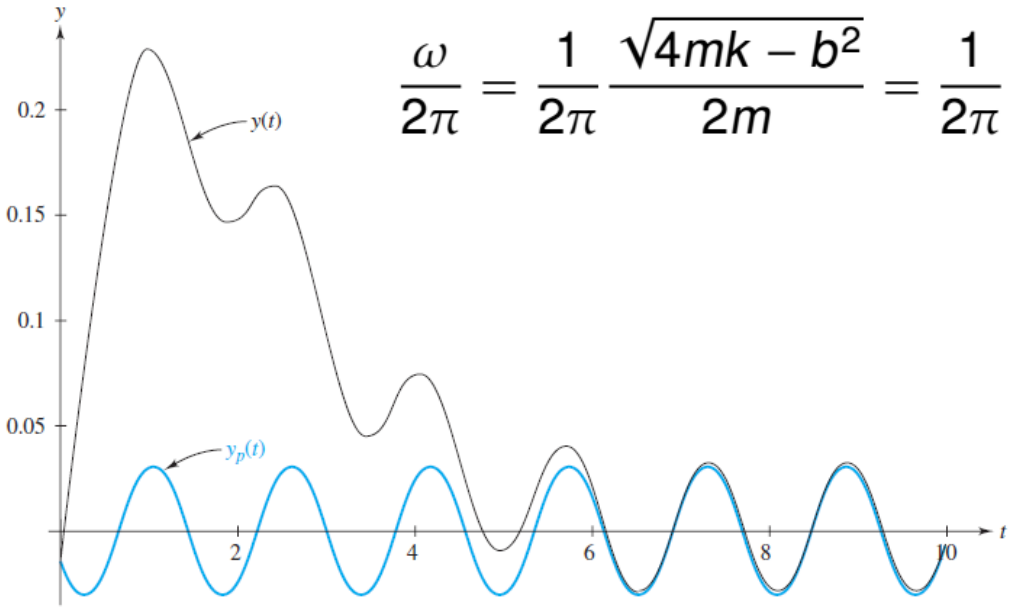
Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}\,\text{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$



$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \ (b = 0).$$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

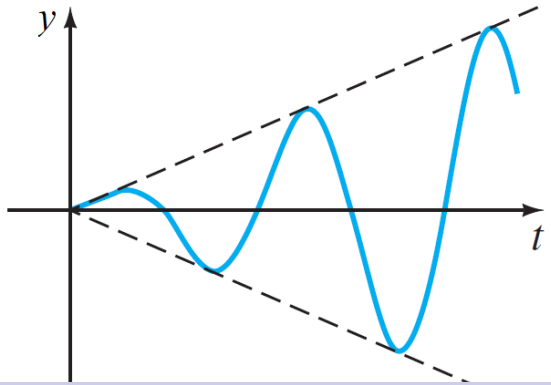
$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t),\ (b = 0).$$

$$y_G(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t),\ \text{si } \gamma \neq \omega.$$

$$y_G(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\operatorname{sen}(\omega t) + \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t).$$

No hay estado transitorio. Tomamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ y calculamos el límite

$$\lim_{\gamma \to \omega} y(t) = \frac{F_0}{2\omega} \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} - t \cos(\omega t) \right).$$



Ejercicios del TP 5

61. (o) Dado el PVI $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$ con condiciones iniciales $y(0) = -3$ y $y'(0) = 1$:
    1. Resuelva el PVI para obtener la solución en la forma tradicional.
    2. Identifique la parte homogénea subamortiguada $y_h(x)$ y exprésela en la forma equivalente de amplitud y ángulo de fase $Ae^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x + \phi)$.
    3. Analice el comportamiento de la solución cuando $x \to \infty$ e indique si existe un término de estado estable.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema de solución general de una ED lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte
5. Demostraciones y desarrollos

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I. *Entonces la solución general de la ED tiene la forma* $y = y_c + y_p$ *donde* y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2). Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2). Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

$$\begin{aligned}
&a_2(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_0(x)Y(x) = \\
&= a_2(x)(\Phi''(x) - y_p''(x)) + a_1(x)(\Phi'(x) - y_p'(x)) + a_0(x)(\Phi(x) - y_p(x)) \\
&= \big(a_2(x)\Phi''(x) + a_1(x)\Phi'(x) + a_0(x)\Phi(x)\big) \\
&\qquad\qquad - \big(a_2(x)y_p''(x) + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x)\big) \\
&= G(x) - G(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Entonces $\Phi(x) - y_p(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$, o sea

$$\Phi(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + y_p(x). \qquad \blacksquare$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$ Resolver por determinantes.