Métodos Matemáticos
Sistemas Dinámicos

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Bibliografía:

- Differential equations and dynamical systems. Springer. L. Perko, Third edition 2001.

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

Recordemos que la ecuación

$$x'(t) = ax(t)$$

tiene por solución general

$$x(t) = ce^{at}, \quad c = x(0).$$

Consideremos el sistema *no acoplado*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Dicho sistema se puede escribir

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Sistemas lineales no acoplados

La solución general del sistema se obtiene resolviendo cada ecuación por separado

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

o

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} c, \quad c = X(0).$$

Las curvas solución tienen la forma

$$y = \frac{k}{x^2}, \quad k = c_1^2 c_2.$$

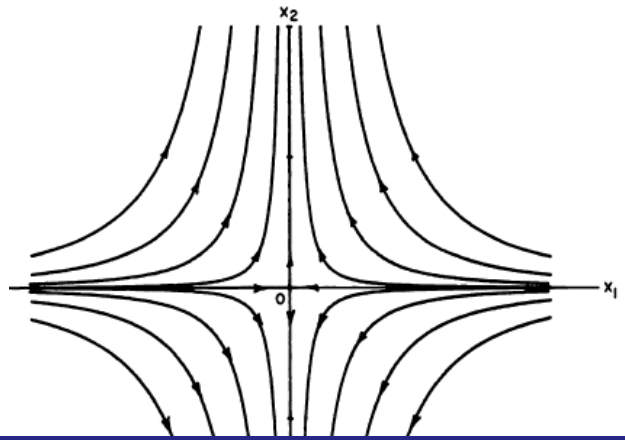


Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

Diagrama de fases

El diagrama de fases de un sistema

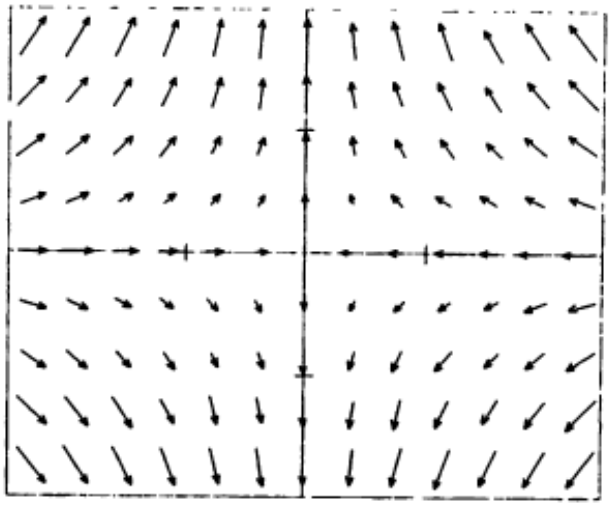
$$X' = AX$$

es el conjunto de todas las curvas solución del sistema en el espacio de fases $\mathbb{R}^n$.

Retornando a (1), la función

$$f(X) = AX$$

define un campo vectorial que asigna a cada punto X_0 del espacio de fases, el vector tangente AX_0 a la curva solución del sistema que pasa por X_0.

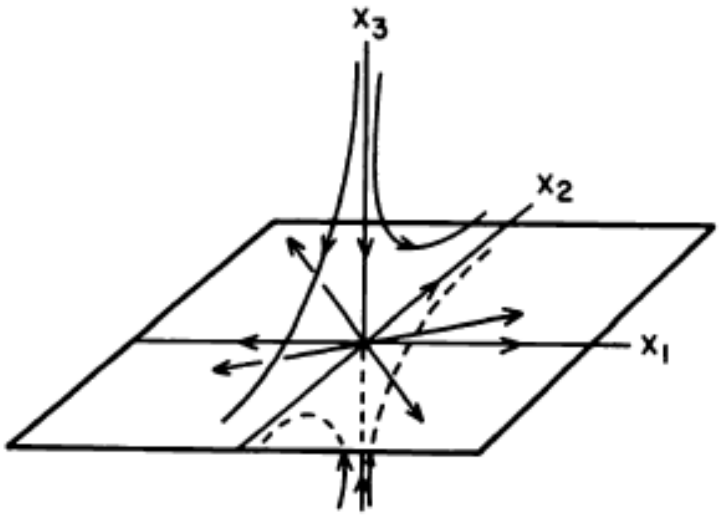


Campo de direcciones para el sistema (1).

Para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_3, \end{cases} \tag{2}$$

se obtiene el diagrama de fases



La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado.

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

La diagonalización de matrices cuadradas A se puede usar para reducir un sistema lineal

$$X' = AX$$

a un sistema no acoplado. Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces cualquier conjunto de vectores propios asociados $v_1, ..., v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

es inversible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

Sea $Y = P^{-1}X$, entonces

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]Y$$

que constituye un sistema no acoplado para Y. La solución general de dicho sistema es

$$Y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]Y(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

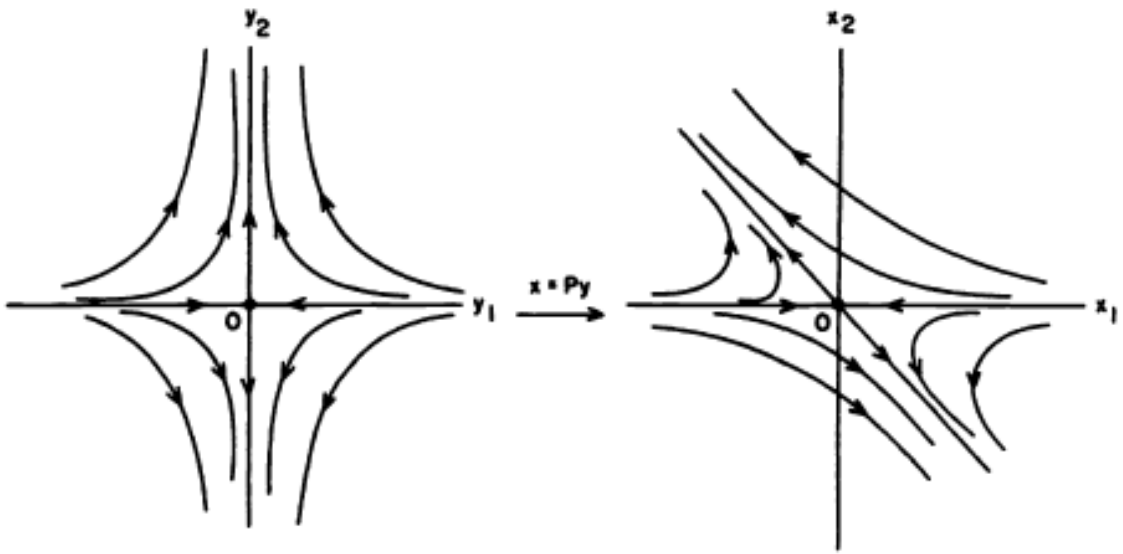
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Como $X(t) = PY(t)$, $Y(0) = P^{-1}X(0)$, entonces la solución buscada es

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}X(0).$$

Ejemplo: resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$



Subespacios estables e inestables

Suponga que A es una matriz $n \times n$ con k valores propios negativos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ y $n-k$ valores propios positivos $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$. Sean $v_1, ..., v_n$ los vectores propios asociados. El subespacio estable del sistema $X' = AX$ es

$$E^s = \text{span } \{v_1, ..., v_k\}.$$

El subespacio inestable es

$$E^u = \text{span } \{v_{k+1}, ..., v_n\}.$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Exponencial de operadores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos su exponencial como

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Dado que el principal interés es resolver sistemas de la forma

$$X' = AX$$

asumiremos que T está representado por una matriz A con repecto a la base canónica y definimos e^{At} como sigue:

Exponencial de At

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

Importante: la exponencial e^{At} es una matriz que puede calcularse en base a valores y vectores propios (vectores propios generalizados) de A.

- Si J y P son matrices $n \times n$ y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}.$$

- Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, entonces

$$e^{At} = P\text{diag}[e^{\lambda_j t}]P^{-1}.$$

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{A} = e^{a} \begin{bmatrix} \cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propiedades de la exponencial de matrices

- Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la forma canónica de Jordan, para cada matriz A de tamaño 2×2, existe una matriz inversible P tal que

$$P^{-1}AP = B$$

donde B admite una de las siguientes formas:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Además, sabemos

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o } e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & -sen(bt) \\ sen(bt) & cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Como veremos a continuación, calcular e^{At} equivale a resolver el sistema

$$X' = AX.$$

Teorema fundamental para sistemas lineales

Sea A una matriz real $n \times n$. Entonces, dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

admite una única solución dada por

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

Ejemplo: resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esboce las curvas solución en el diagrama de fases $\mathbb{R}^2$.

Para conocer el comportamiento de las soluciones del sistema plano

$$X' = AX$$

recordemos que existen matrices P y B tales que

$$B = P^{-1}AP,$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Luego, si conocemos el comportamiento de las curvas solución del sistema

$$Y' = BY$$

mediante la transformación lineal $X(t) = PY(t) = Pe^{Bt}c$ podemos recuperar información sobre las curvas solución del sistema original.

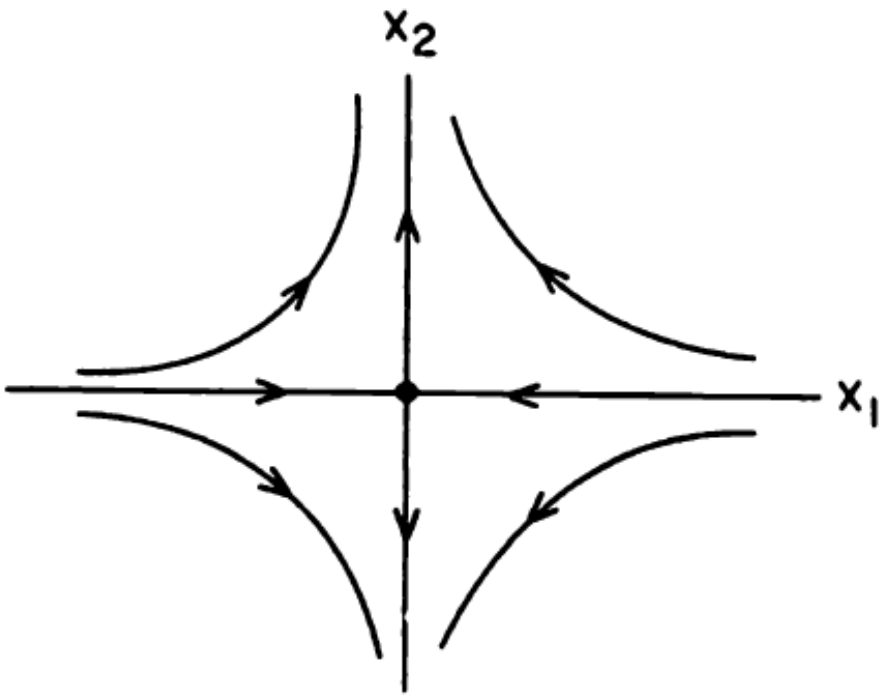
Caso I. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < 0 < \mu$.

Caso I. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda < 0 < \mu$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \mu x_2 \end{cases}$$

Luego, $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Entonces si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}$$



El origen es un punto silla. Si $\mu < 0 < \lambda$, las flechas se revierten.

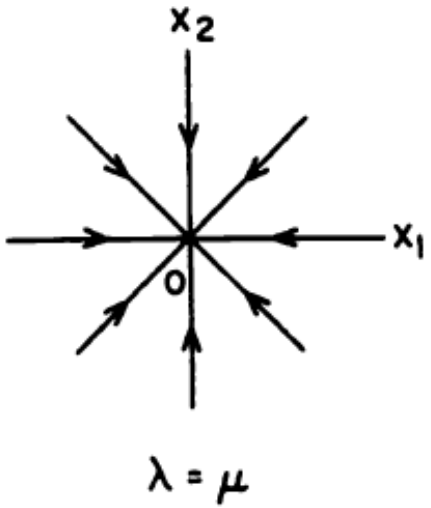
Caso II. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \leq \mu < 0$ o $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$.

Caso II. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \leq \mu < 0$ o $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{cases}$$

y entonces

$$x_2 = cx_1.$$



El origen es un nodo estable.

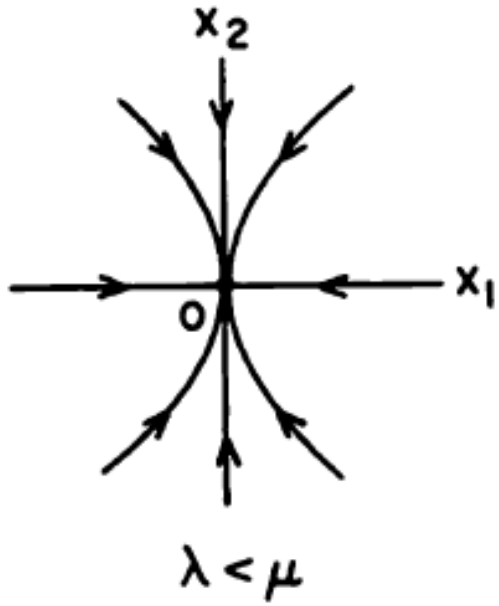
En el caso $\lambda > 0$, el origen es un nodo inestable.

Si ahora $\lambda < \mu < 0$, entonces $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}.$$

Si ahora $\lambda < \mu < 0$, entonces $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{\mu t}$. Si $c_1 \neq 0$,

$$x_2 = c(x_1)^{\mu/\lambda}.$$



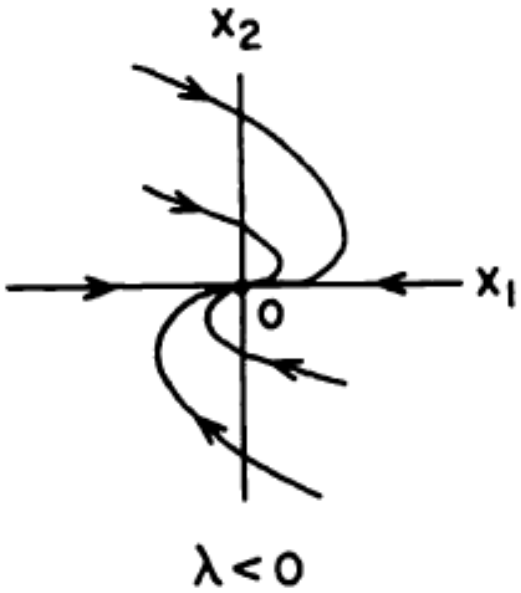
El origen es un nodo estable. Si $0 < \mu < \lambda$, las flechas se revierten. Si $0 < \lambda < \mu$, las curvas son convexas.

Finalmente, para $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$,

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' = \lambda x_2. \end{cases}$$

Finalmente, para $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda < 0$,

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' = \lambda x_2. \end{cases}$$



El origen es un nodo estable.
En el caso $\lambda > 0$, el origen es un nodo inestable.

Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$x_1(t) = e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right)$$

$$x_2(t) = e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right).$$

Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$x_1(t) = e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right)$$

$$x_2(t) = e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2 e^{2at}, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

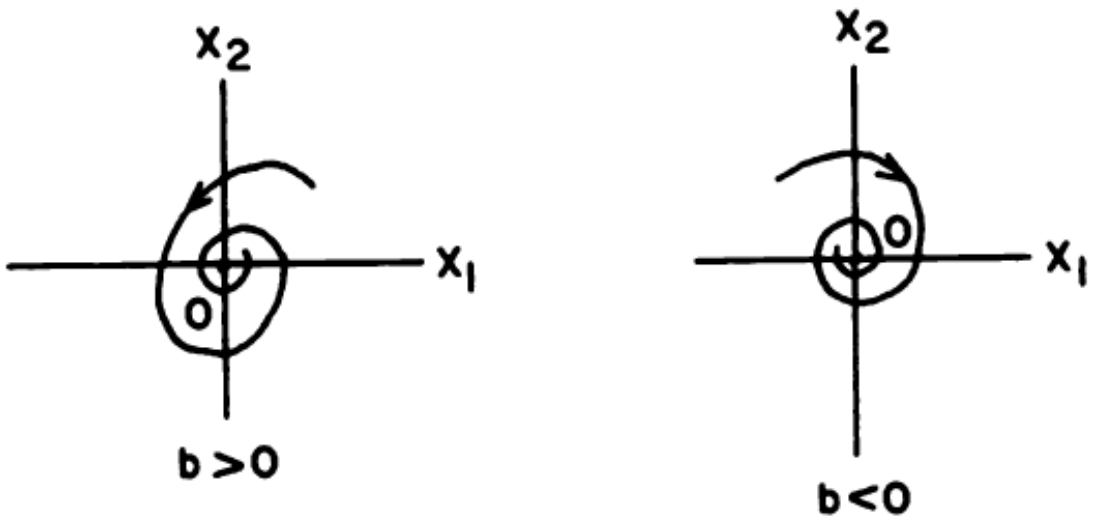
Caso III. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ con $a < 0$. Solución:

$$x_1(t) = e^{at}\left(c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)\right)$$

$$x_2(t) = e^{at}\left(c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt)\right).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2 e^{2at}, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$



El origen es un foco estable. Si $a > 0$, el origen es un foco inestable.

Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

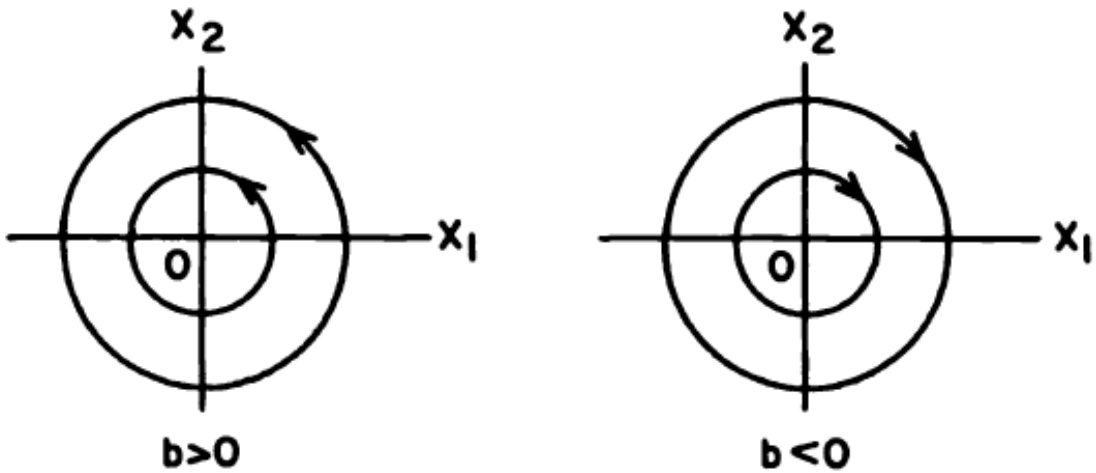
Caso IV. $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Solución:

$$x_1(t) = c_1 cos(bt) - c_2 sen(bt)$$

$$x_2(t) = c_2 cos(bt) + c_1 sen(bt).$$

Luego,

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = c^2, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2.$$



El origen es un centro.

Ejercicio entrega para Jueves 29/10: dado el sistema

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_2 \\ x_2' = bx_1 + ax_2, \end{cases} \tag{3}$$

realice el siguiente procedimiento para encontrar la solución general. Derive las ecuaciones (dependientes de t):

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \theta = tan^{-1}(x_2/x_1)$$

para obtener ($r \neq 0$):

$$r' = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{r} \quad \text{y} \quad \theta' = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{r^2}.$$

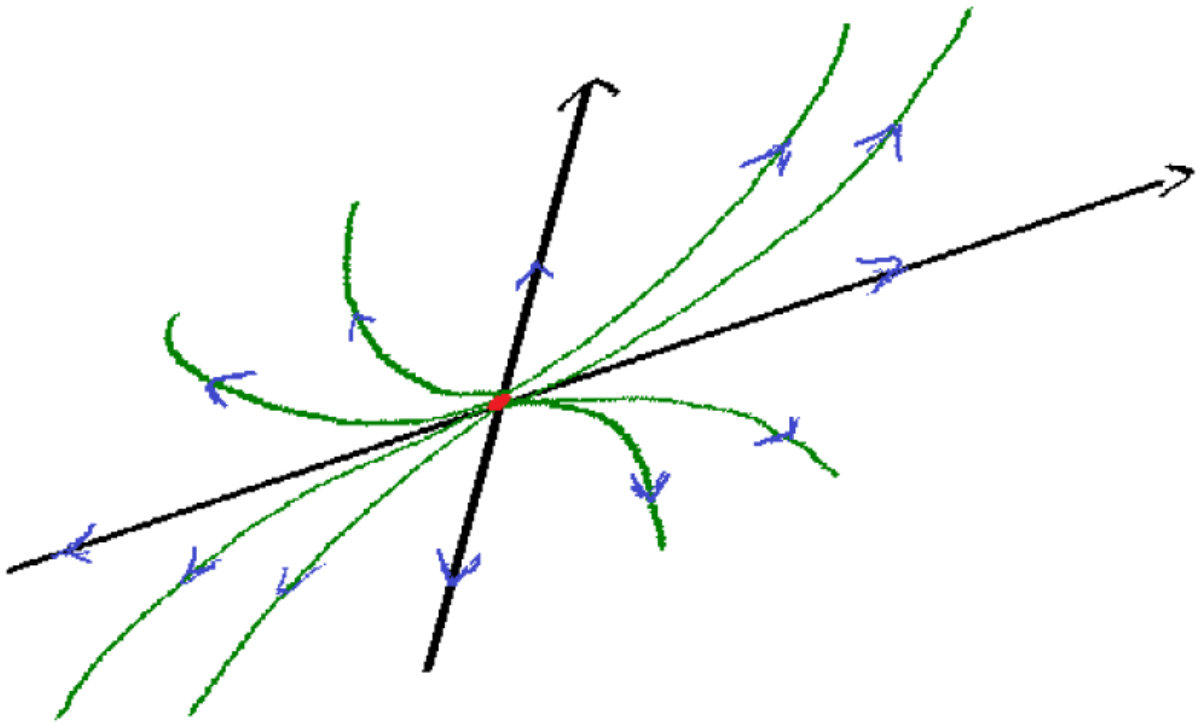
Utilizando el sistema 3, pruebe que las ecuaciones anteriores se reducen a

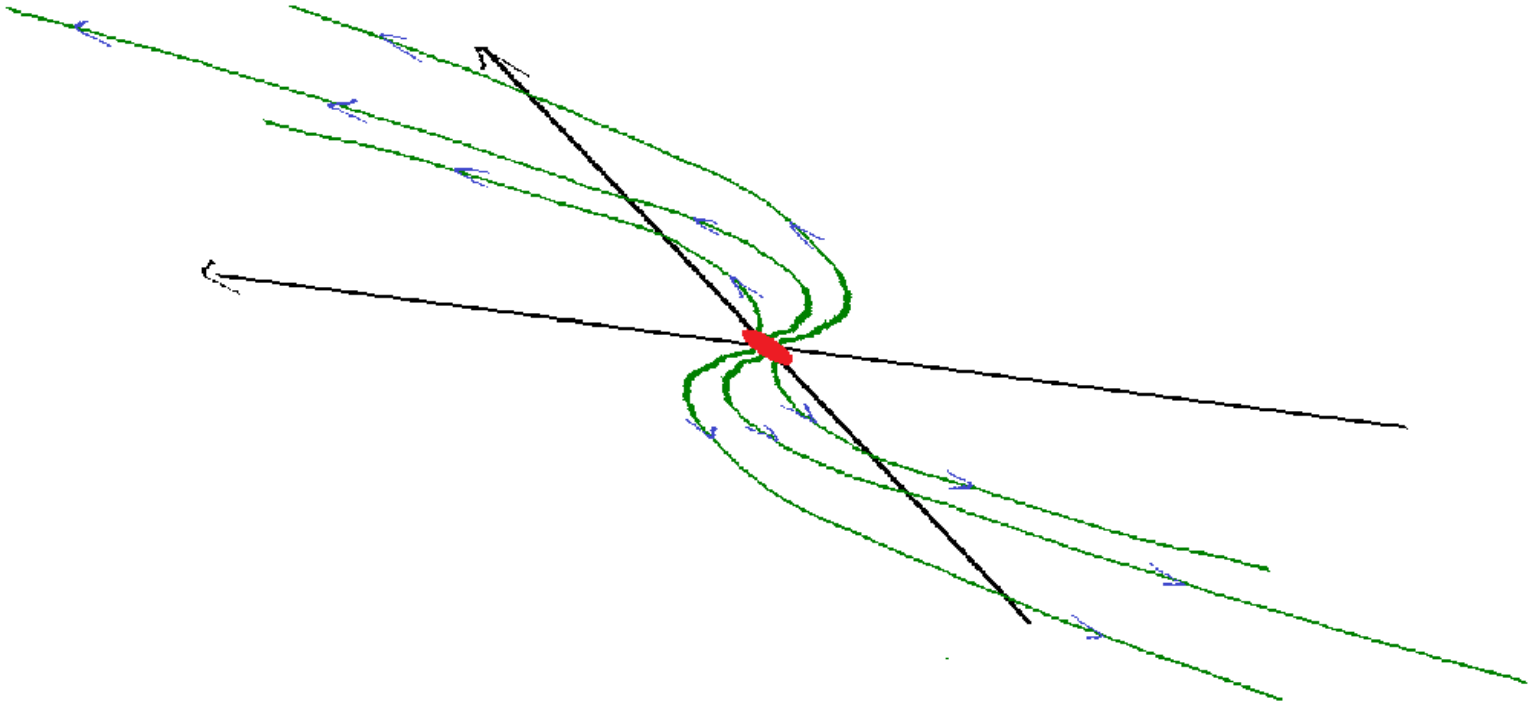
$$r' = ar, \quad \theta' = b.$$

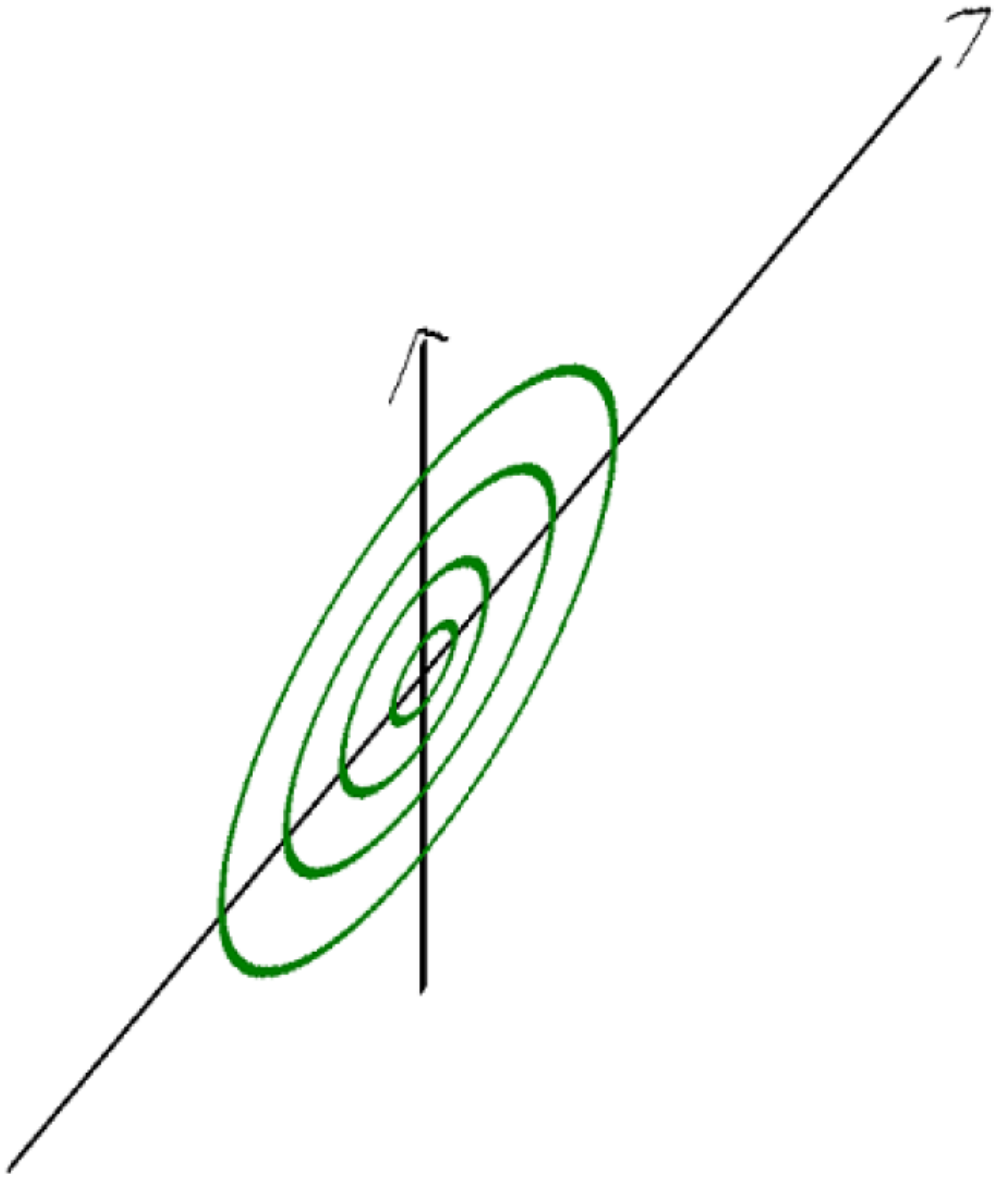
Resuelva estas ecuaciones con condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$. Verifique que las soluciones obtenidas coinciden con las de las diapositivas anteriores.

Importante: considere el sistema plano $X' = AX$, con $\det A \neq 0$.

- Si A tiene dos autovalores reales de signo distinto, entonces el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso I**.
- Si A tiene autovalores reales repetidos pero es diagonalizable, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso II** diapositiva 16. Si ambos son negativos o ambos positivos y distintos, el diagrama de fases es linealmente equivalente al del **Caso II**, diapositiva 17.
- Si A tiene autovalores repetidos y no es diagonalizable, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso II**, diapositiva 18.
- Si A tiene autovalores complejos, el diagrama de fases del sistema es linealmente equivalente al del **Caso III** o **Caso IV**.







Ejemplo: resuelva el sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

y grafique las curvas solución del sistema analizando la transformación de las correspondientes curvas solución de $Y' = BY$ $(B = P^{-1}AP)$.

Ejercicio entrega para Jueves 29/10 (elija al menos uno de los tres casos)

If $\det A = 0$, then the origin is a degenerate critical point of $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Determine the solution and the corresponding phase portraits for the linear system with

(a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Note that the origin is not an isolated equilibrium point in these cases. The four different phase portraits determined in (a) with $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$, (b) and (c) above, together with the sources, sinks, centers and saddles discussed in this section, illustrate the eight different types of qualitative behavior that are possible for a linear system.

Estabilidad del equilibrio para sistemas planos

Suponga que det $A \neq 0$. Entonces

$$AX = 0 \text{ si y solo si } X = 0$$

es decir, el origen es el único punto de equilibrio del sistema.

Teorema

Sea $\delta = \det A$ y $\tau =$ traza A y considere el sistema

$$X' = AX. \tag{4}$$

- Si $\delta < 0$, entonces (4) tiene un punto silla en el origen.
- Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, entonces (4) tiene un nodo en el origen. Es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$, y $\tau \neq 0$, entonces (4) tiene un foco en el origen. Es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces (4) tiene un centro en el origen.

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Obtenemos

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces

Sistemas de orden superior

Ejemplo: encuentre la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Obtenemos

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$X(t) = e^{At}X_0 = Pe^{tJ}P^{-1}X_0$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 - t - t^2/2 & -2t - t^2/2 - t - t^2/2 & -t - t^2/2 & \\ t & 1 + t & t & t \\ t^2/2t + t^2/2 & 1 + t^2/2 & t^2/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_0.$$

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.
Tomemos

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1.$$

La solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Sistemas no lineales autónomos

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Existen dos soluciones $u(t) = t^3$ y $v(t) = 0$.
Tomemos

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1.$$

La solución es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $X_0 \in E$ y supongamos que $f \in C^1(E)$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$X' = f(X)$$

$$X(0) = X_0$$

tiene una única solución en el intervalo $[-\delta, \delta]$.

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Sea $X' = F(X)$. Un punto X_0 se llama punto de equilibrio del sistema si

$$f(X_0) = 0.$$

Un punto de equilibrio se llama hiperbólico si ninguno de los autovalores de la matrix

$$A = Df(X_0)$$

tiene parte real nula. El sistema lineal

$$X' = Df(X_0)X$$

se llama linealización del sistema $X' = f(X)$.

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Supondremos que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal $X' = f(X)$.

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^1(E)$. El origen es un punto silla del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un punto silla del sistema linealizado.

Ejemplo: considere

$$x' = -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y' = -y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}},$$

con $x^2 + y^2 \neq 0$.

Ejemplo: considere

$$x' = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y' = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

con $x^2 + y^2 \neq 0$.
Sea $f(x,y) = (x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}, -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}})$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = (0,0)$. Entonces

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{pero } f \notin C^2(\mathbb{R}^2).$$

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$.

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$. Para $r_0 < 1$, el origen es un foco estable para el sistema no lineal.

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

En coordenadas polares,

$$r' = -r$$

$$\theta' = \frac{1}{\ln r}.$$

Luego, $r(t) = r_0 e^{-t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$. Para $r_0 < 1$, el origen es un foco estable para el sistema no lineal.
Ahora, si linealizamos, el origen es un nodo estable.

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^2(E)$.

- El origen es un nodo estable (o inestable) del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un nodo estable (o inestable) del sistema linealizado.
- El origen es un foco estable (o inestable) del sistema $X' = f(X)$ si y sólo si el origen es un foco estable (o inestable) del sistema linealizado.

Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen y $f \in C^1(E)$.
Supongamos que el origen es un centro del sistema linealizado. Entonces el origen es un centro, un centro-foco o un foco del sistema no lineal.



Comportamiento de sistemas no lineales cerca del equilibrio

Teorema

Si $f \in C^1(E)$, $X_0 \in E$, punto de equilibrio hiperbólico. Entonces, el comportamiento del sistema $X' = f(X)$ alrededor del punto X_0 es similar al del sistema linealizado

$$X' = Df(X_0)(X - X_0).$$

Ejemplo: Polución y crecimiento

K : capital

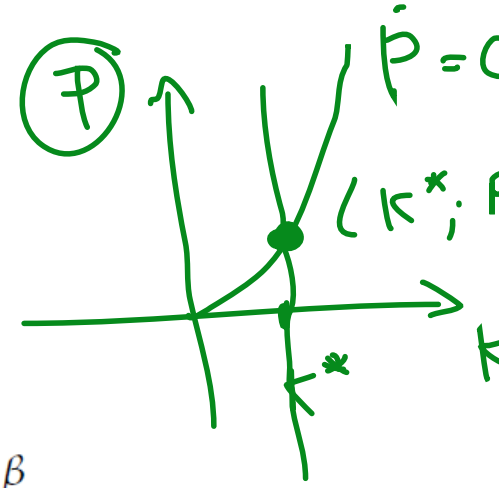
P : polución

$Y = K^a$,$0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} \dot{K} = s\,K^{\alpha} - r\,K = 0 \\ \dot{P} = K^{\beta} - \gamma\,P = 0 \end{cases}$$

$K^{\alpha}(s - r\,K^{1-\alpha}) = 0 \Rightarrow K^* = \left(\frac{s}{r}\right)^{1/(1-\alpha)}$

$P = \frac{K^{\beta}}{\gamma}$



donde $0 < s < 1,\ r > 0,\ \beta > 1,\ \gamma > 0.$

$K(0) = K_0 > 0,\ P(0) = P_0 \geq 0$

Punto de equilibrio:

$$K^* = \left(\frac{s}{r}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad P^* = \frac{1}{\gamma}(K^*)^{\beta}$$

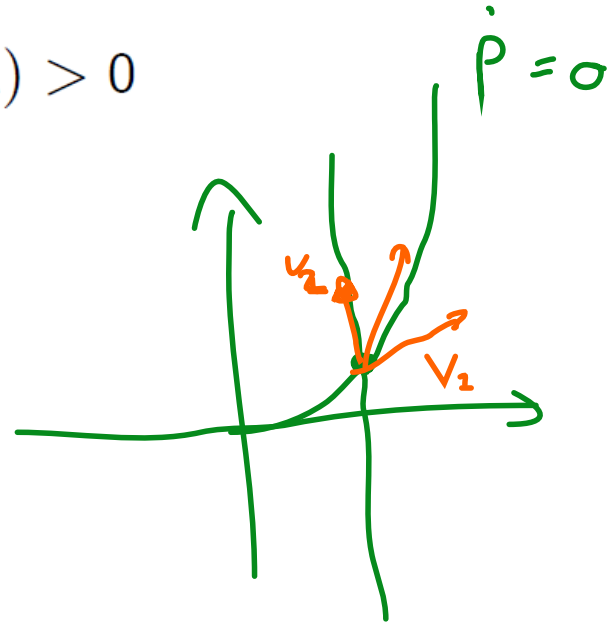
Matriz jacobiana:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{K}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{K}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial K} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{bmatrix}_{(K^*,P^*)} = \begin{bmatrix} -r(1-\alpha) & 0 \\ \beta \left(\frac{r}{s}\right)^{-(\beta-1)/(1-\alpha)} & -\gamma \end{bmatrix}$$

Equilibrio (K^*, P^*) **estable**: $\operatorname{tr}(A) < 0$, $\det(A) > 0$

Autovalores: $\lambda_1 = -r(1-\alpha)$, $\lambda_2 = -\gamma$

Autovectores: $v_1 = \begin{bmatrix} \gamma - r(1-\alpha) \\ \beta (K^*)^{\beta-1} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

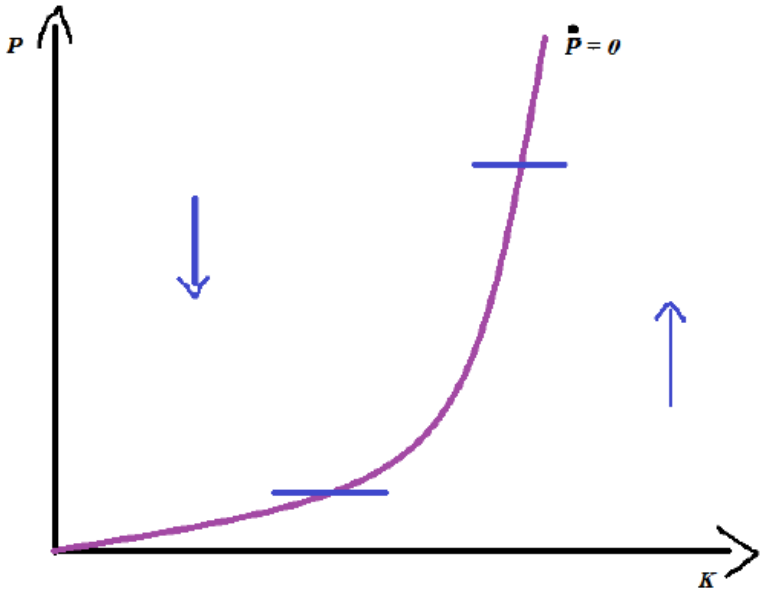


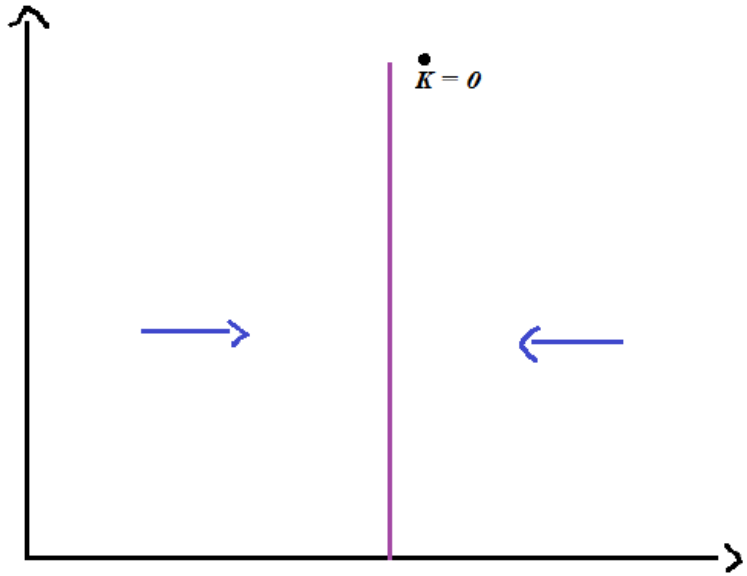
Casos:

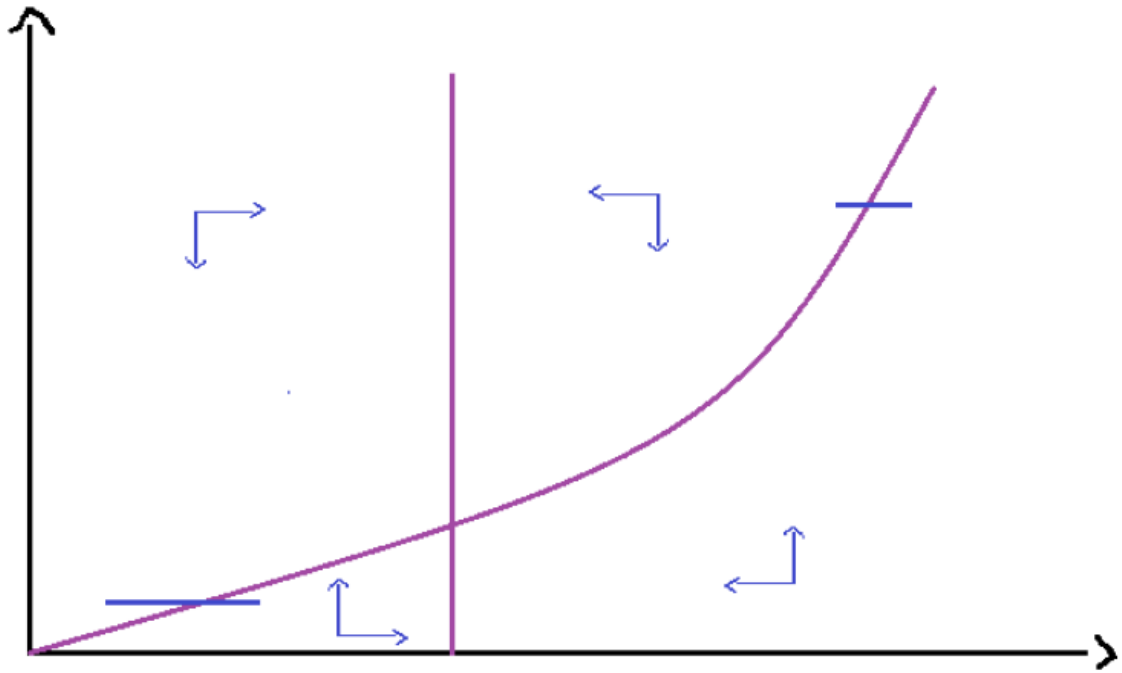
$\gamma > r(1-\alpha)$

$\gamma < r(1-\alpha)$

$\gamma = r(1-\alpha)$ (no diagonalizable)


P
$\dot{P} = 0$
K


$\dot{K} = 0$

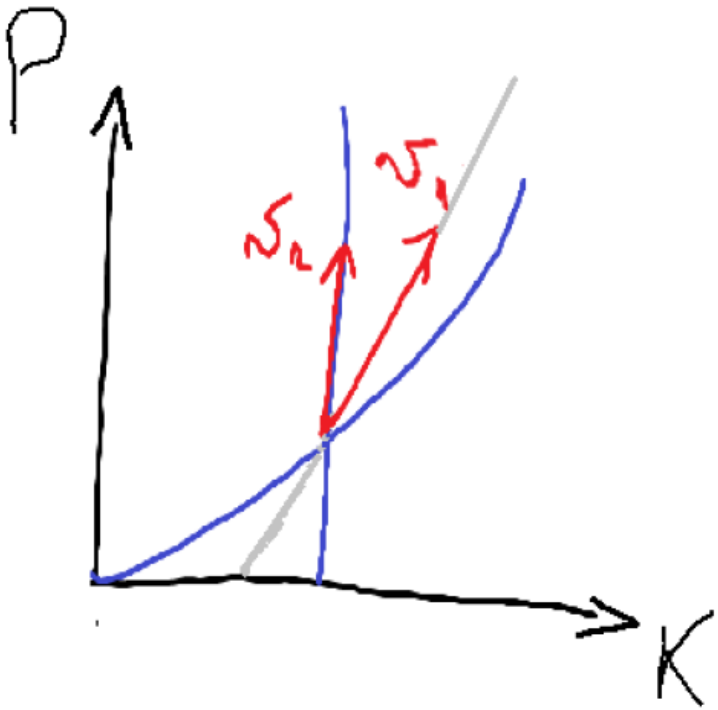


Caso $\gamma > r\left(1-\alpha\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial K}\Big|_{\dot{P}=0,\ K=K^*} = \frac{\beta}{\gamma}\left(K^*\right)^{\beta-1} < \frac{\beta\left(K^*\right)^{\beta-1}}{\gamma - r\left(1-\alpha\right)}$$

El autovector $v_1 = \begin{bmatrix} \gamma - r\left(1-\alpha\right) \\ \beta\left(K^*\right)^{\beta-1} \end{bmatrix}$ tiene más pendiente que la curva $\dot{P} = 0$ en el punto de equilibrio $\left(K^*, P^*\right)$.

$\gamma > r(1-\alpha)$



$\gamma < r(1-\alpha)$

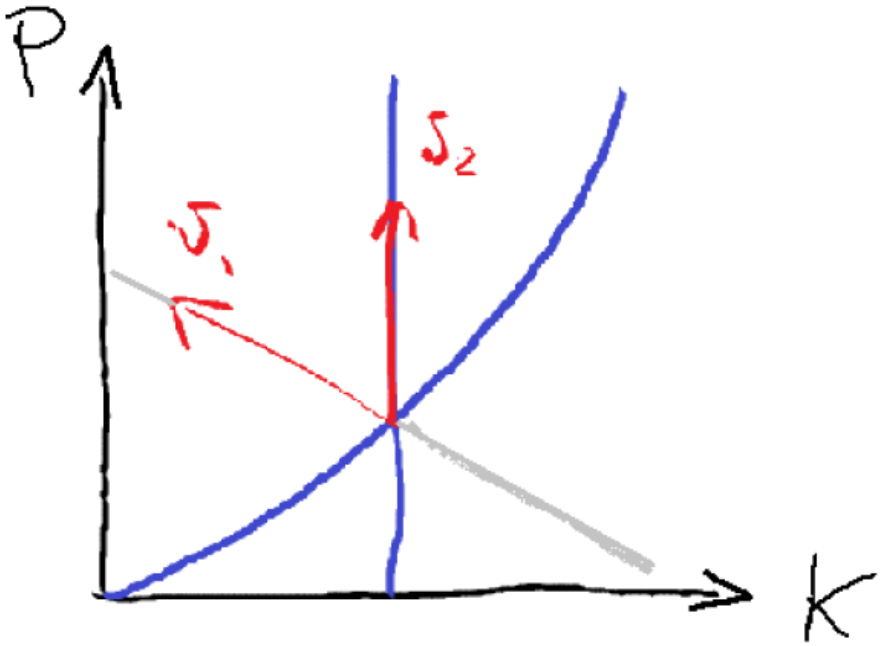
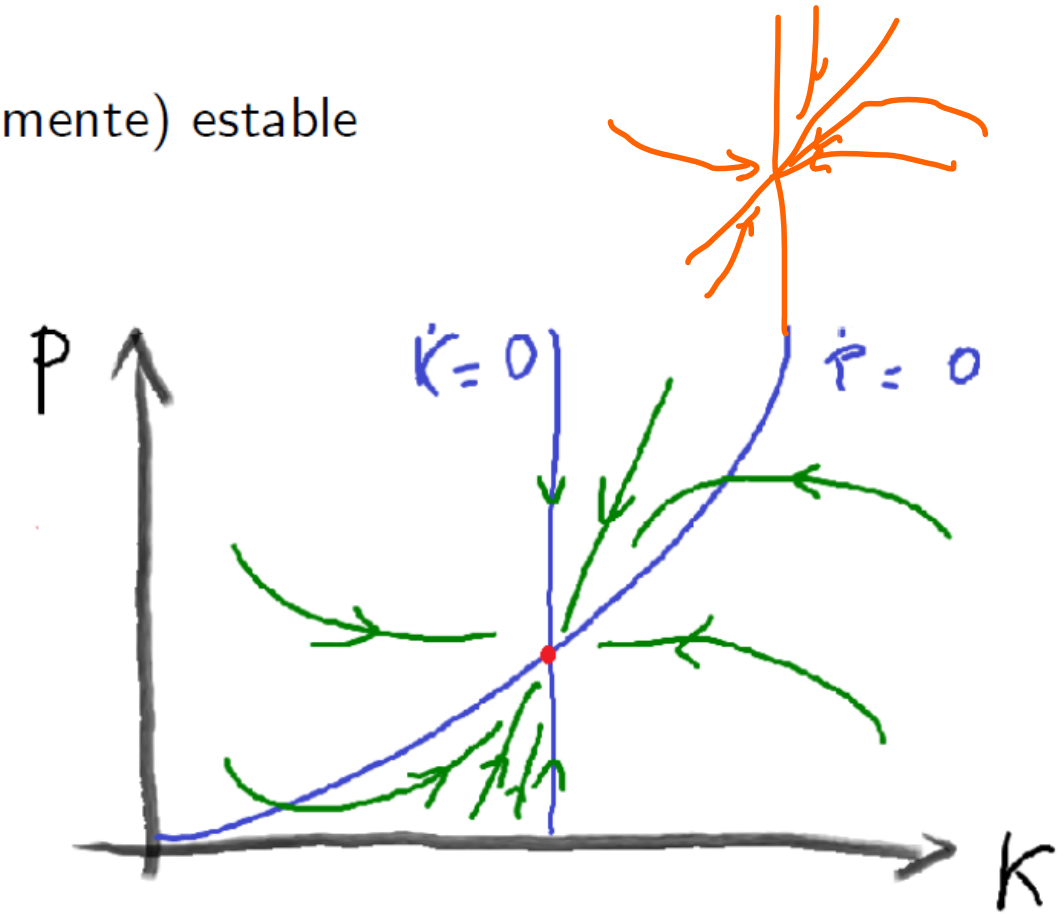


Diagrama de fase

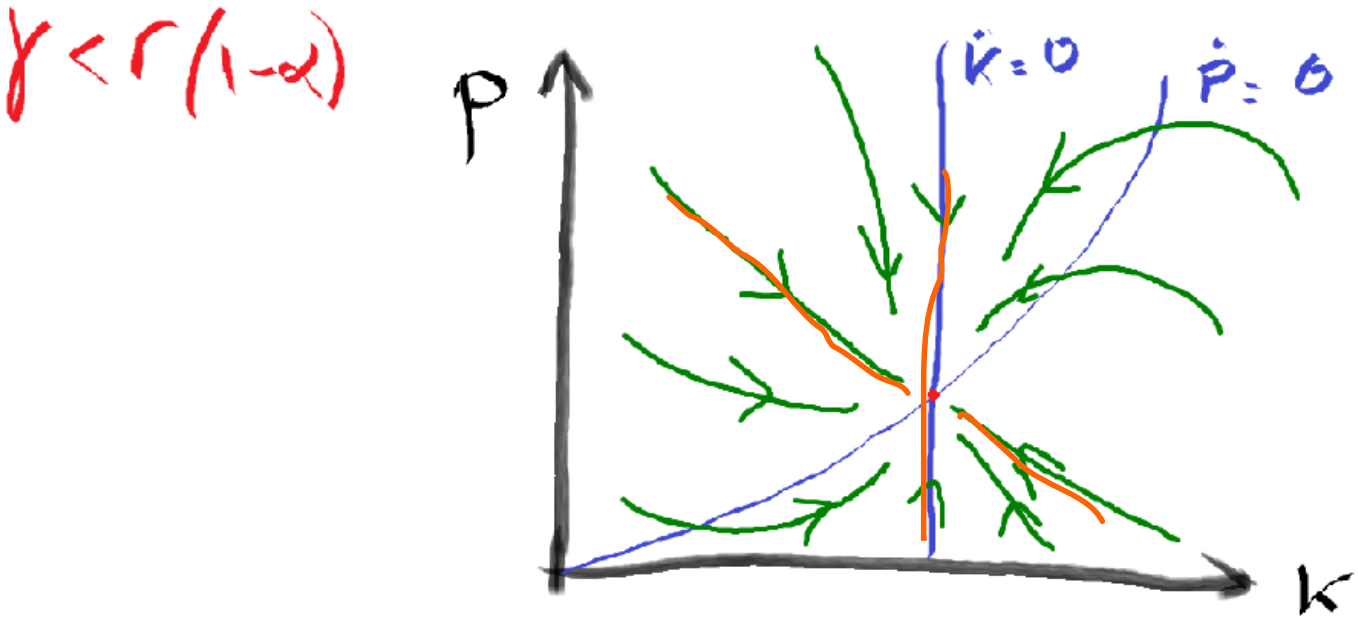
Equilibrio positivo (localmente) estable

$\gamma > \sigma(1-\alpha)$



Caso $\gamma < r\,(1-\alpha)$

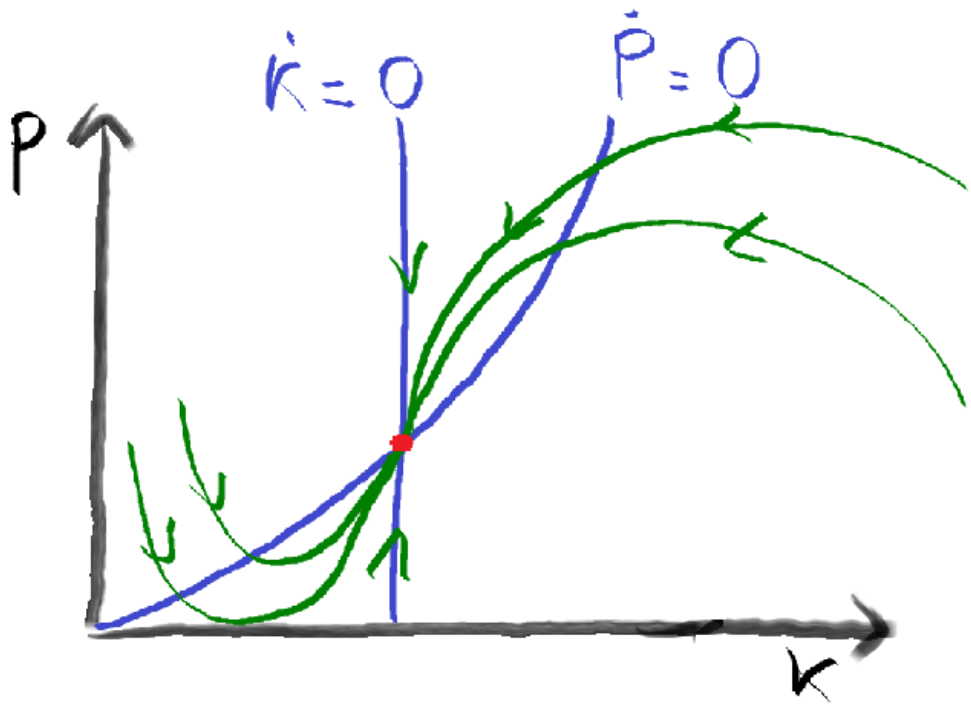
v_1 tiene pendiente negativa



Caso $\gamma = r\,(1-\alpha)$

A no es diagonalizable (no existen v_1 y v_2 linealmente independientes)

$\gamma = r(1-\alpha)$

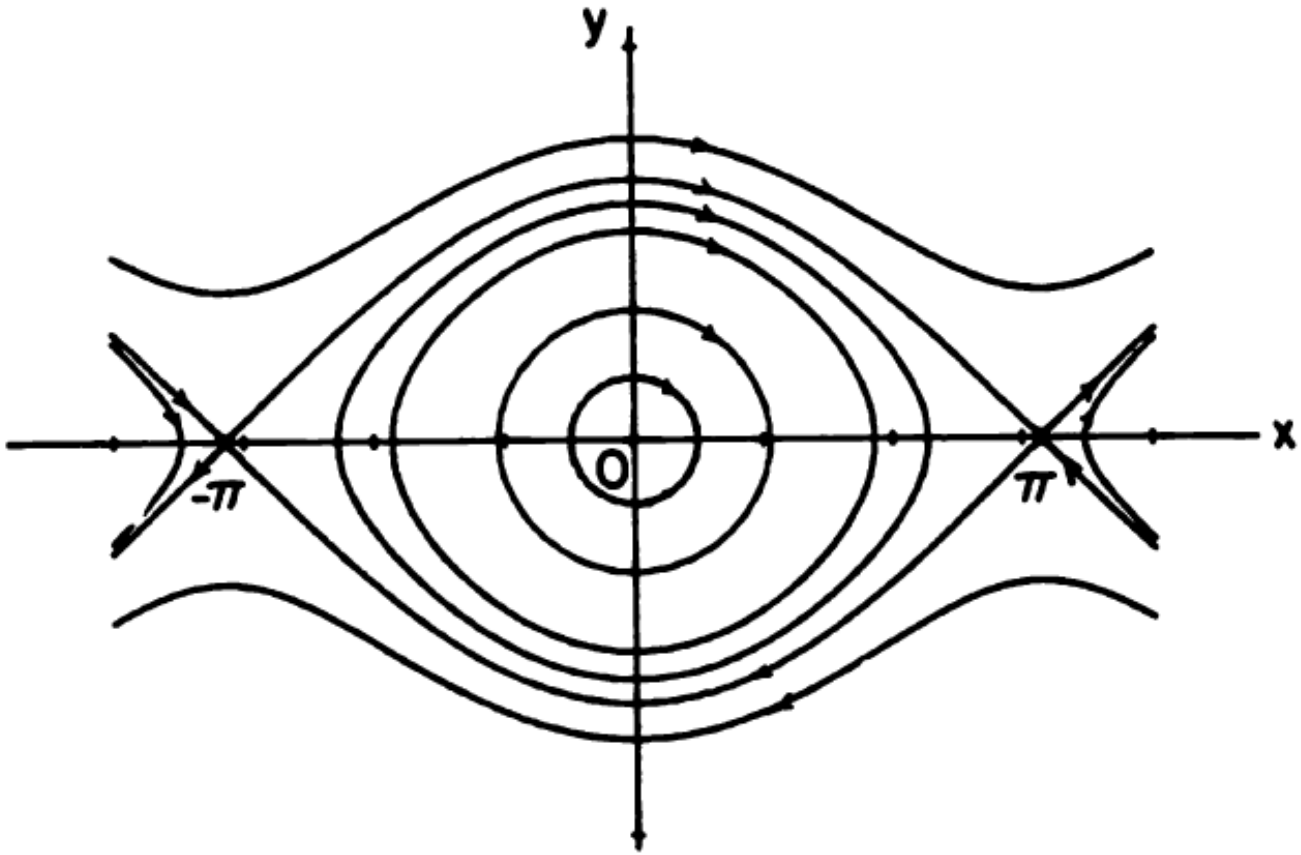


Ejemplo: construya un diagrama de fases aproximado para el péndulo simple

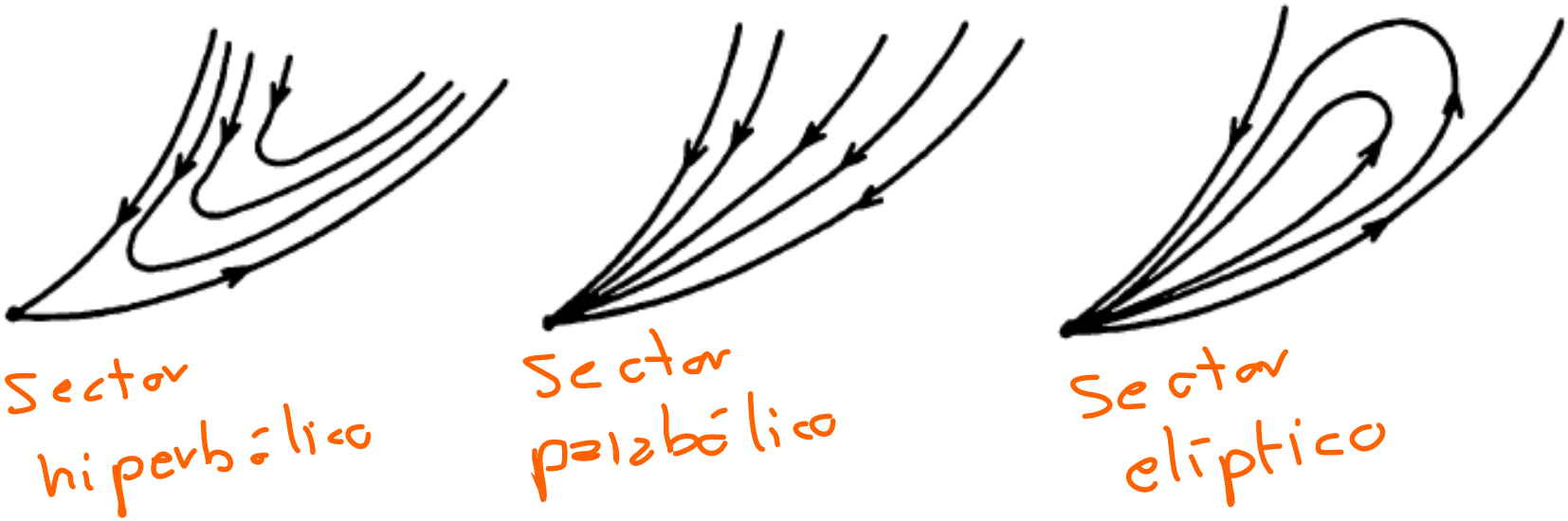
$$x'' + sen(x) = 0.$$

Ejemplo: construya un diagrama de fases aproximado para el péndulo simple

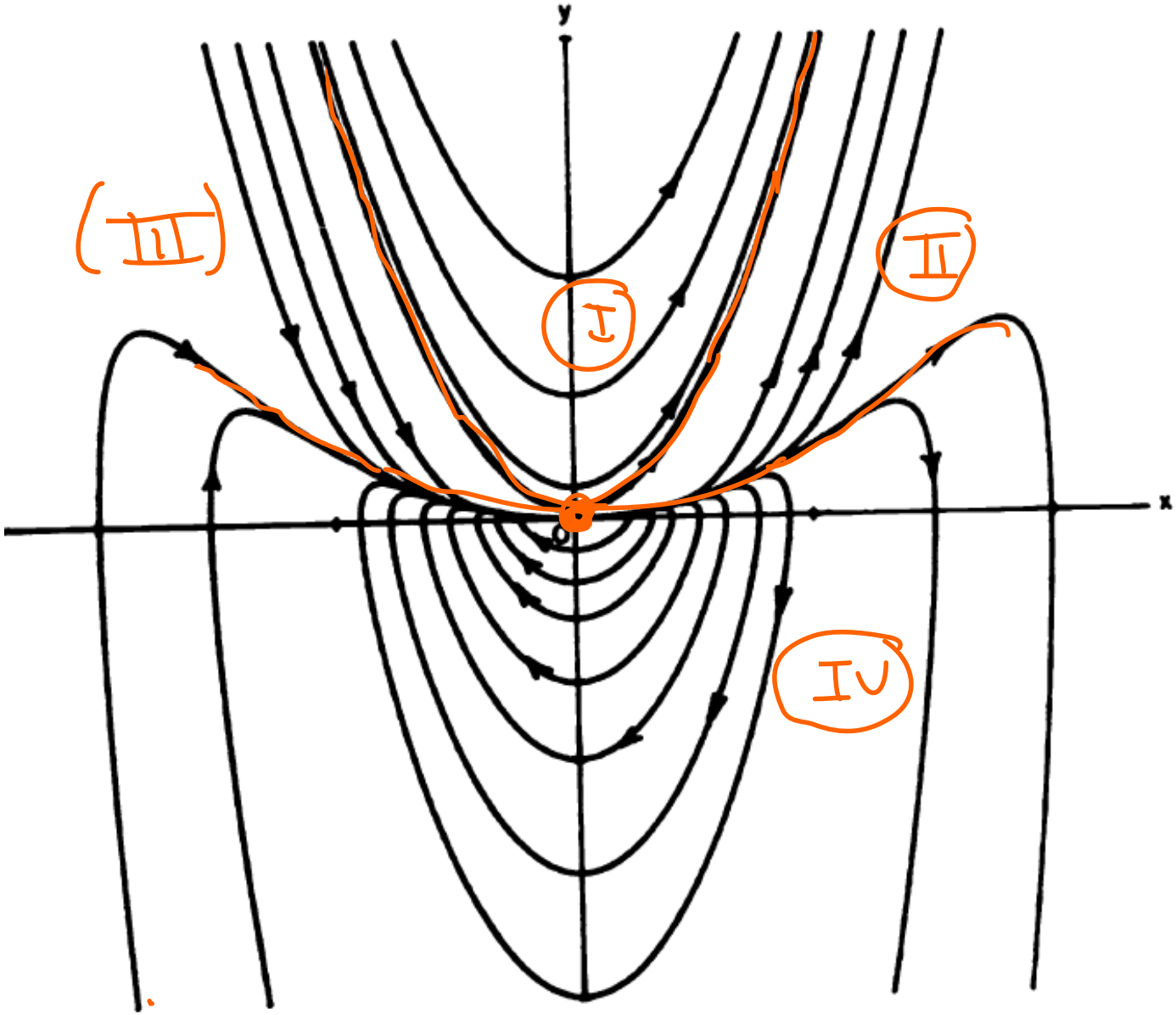
$$x'' + sen(x) = 0.$$



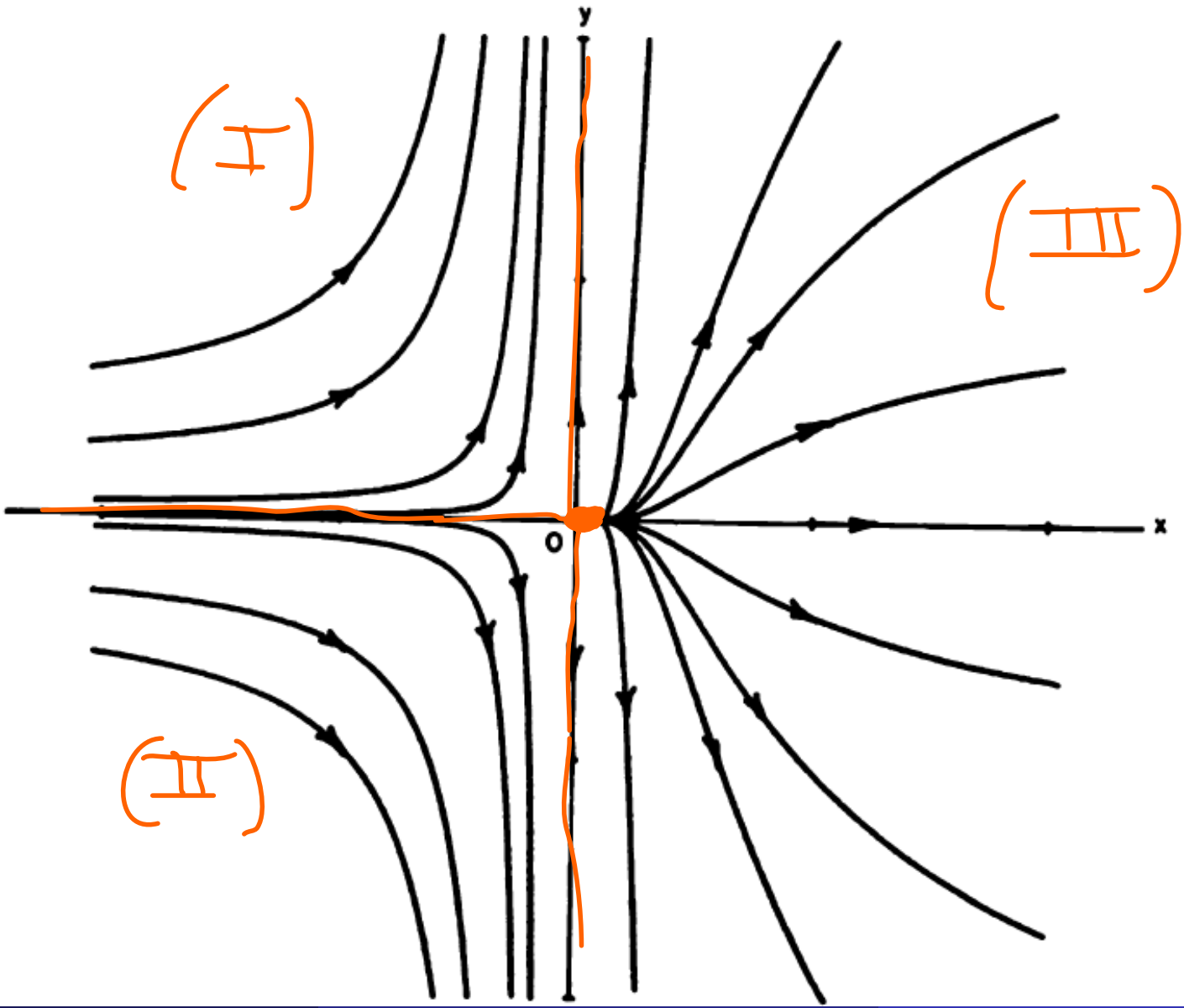
Puntos críticos no hiperbólicos



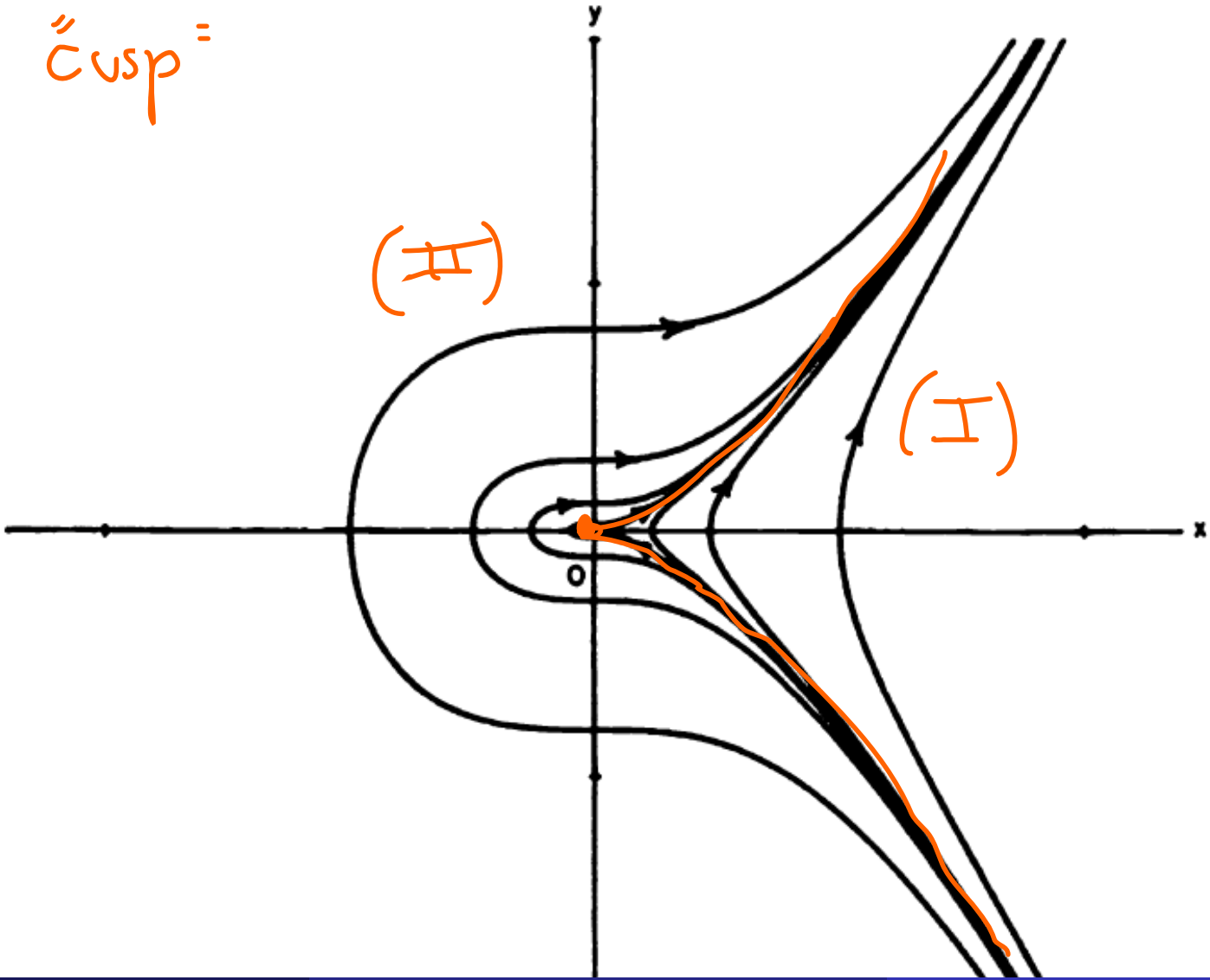
Puntos críticos no hiperbólicos



Puntos críticos no hiperbólicos



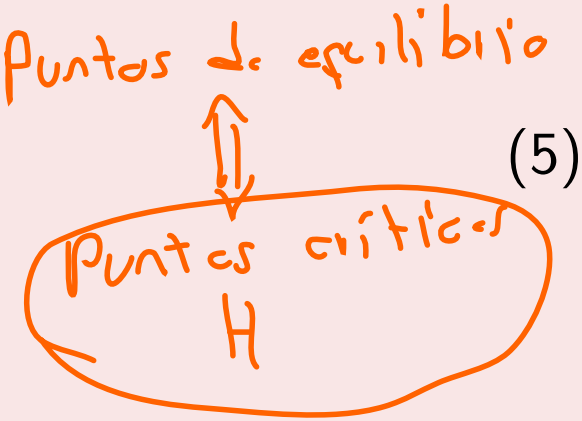
Puntos críticos no hiperbólicos



Sistemas Hamiltonianos

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y sea $H \in C^2(E)$, donde $H = H(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Un sistema de la forma

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad (5)$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$



donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^T, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^T,$$

se denomina un *sistema hamiltoniano* con n grados de libertad sobre E.

Por ejemplo, la función hamiltoniana

$$H(x,y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

es la función de energía para el péndulo esférico

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= y_1, \\
\dot{x_2} &= y_2, \\
\dot{y_1} &= -x_1, \\
\dot{y_2} &= -x_2,
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la función hamiltoniana

$$H(x,y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2}$$

es la función de energía para el péndulo esférico

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1, \\
\dot{x}_2 &= y_2, \\
\dot{y}_1 &= -x_1, \\
\dot{y}_2 &= -x_2,
\end{aligned}$$

Este sistema es equivalente al par de osciladores armónicos desacoplados

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + x_1 &= 0, \\
\ddot{x}_2 + x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

A continuación establecemos algunos resultados muy específicos acerca de la naturaleza de los puntos críticos de los sistemas hamiltonianos con un grado de libertad. Observe que los puntos de equilibrio, o puntos críticos, del sistema (1) corresponden a los puntos críticos de la función hamiltoniana $H(x, y)$, donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Lema

Si el origen es un foco del sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y(x, y), \\ \dot{y} &= -H_x(x, y), \end{aligned} \tag{1'}$$

entonces el origen no es un máximo local estricto ni un mínimo local estricto de la función hamiltoniana $H(x, y)$.

Puntos críticos no degenrados

Un punto crítico del sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

en el cual $Df(x_0)$ no tiene valores propios nulos se denomina *punto crítico no degenerado* del sistema. En caso contrario, se denomina *punto crítico degenerado* del sistema.

Puntos críticos no degenrados

Un punto crítico del sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

- en el cual $Df(x_0)$ no tiene valores propios nulos se denomina *punto crítico no degenerado* del sistema. En caso contrario, se denomina *punto crítico degenerado* del sistema.

Teorema

Todo punto crítico no degenerado de un sistema hamiltoniano analítico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y(x, y), \\ \dot{y} &= -H_x(x, y), \end{aligned} \tag{1'}$$

es, o bien, una silla, o bien, un centro. Además, (x_0, y_0) es una silla para $(1')$ si y solamente si es un punto de silla de la función hamiltoniana $H(x, y)$; y un máximo local estricto o un mínimo local estricto de la función $H(x, y)$ es un centro para $(1')$.

Un tipo particular de sistema hamiltoniano con un grado de libertad es el *sistema newtoniano* con un grado de libertad,

$$\ddot{x} = f(x),$$

donde $f \in C^1(a, b)$. Esta ecuación diferencial puede escribirse como un sistema en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

Un tipo particular de sistema hamiltoniano con un grado de libertad es el *sistema newtoniano* con un grado de libertad,

$$\ddot{x} = f(x),$$

donde $f \in C^1(a, b)$. Esta ecuación diferencial puede escribirse como un sistema en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x). \end{aligned} \tag{3}$$

La energía total de este sistema es

$$H(x, y) = T(y) + U(x),$$

donde

$$T(y) = \frac{y^2}{2}$$

es la energía cinética y

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$$

es la energía potencial.

Con esta definición de $H(x, y)$, vemos que el sistema newtoniano (3) puede escribirse como un sistema hamiltoniano.

Con esta definición de $H(x, y)$, vemos que el sistema newtoniano (3) puede escribirse como un sistema hamiltoniano.

Teorema

- Los puntos críticos del sistema newtoniano (3) se encuentran todos sobre el eje x.
- El punto $(x_0, 0)$ es un punto crítico del sistema newtoniano (3) si y solo si es un punto crítico de la función $U(x)$, es decir, un cero de la función $f(x)$.
- Si $(x_0, 0)$ es un máximo local estricto de la función analítica $U(x)$, entonces es un punto silla para (3).
- Si $(x_0, 0)$ es un mínimo local estricto de la función analítica $U(x)$, entonces es un centro para (3).
- Si $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión horizontal de la función $U(x)$, entonces es una cúspide para el sistema (3).

Finalmente, el diagrama de fases de (3) es simétrico respecto del eje x.

Ejercicio entrega Jueves 5/11: aplique el teorema anterior al ejemplo del péndulo, obteniendo todas las conclusiones posibles sobre el diagrama de fases y los puntos críticos.

Sistemas gradiente

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V \in C^1(E)$. Un sistema de la forma

$$X' = -\nabla V(X),$$

donde $\nabla V(X)$ es el vector gradiente de V en X, se denomina sistema gradiente en E.

Sistemas gradiente

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V \in C^1(E)$. Un sistema de la forma

$$X' = -\nabla V(X),$$

donde $\nabla V(X)$ es el vector gradiente de V en X, se denomina sistema gradiente en E.

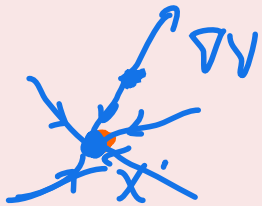
Observar que los puntos de equilibrio del sistema son los puntos críticos de V.

Sistemas gradiente

Sistemas gradiente

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V \in C^1(E)$. Un sistema de la forma

$$X' = -\nabla V(X),$$



donde $\nabla V(X)$ es el vector gradiente de V en X, se denomina sistema gradiente en E.

Observar que los puntos de equilibrio del sistema son los puntos críticos de V.

Teorema

En puntos regulares (no críticos) de V, las trayectorias del sistema $X' = -\nabla V(X)$ son ortogonales a los conjuntos de nivel $V(X) = c$. Además, mínimos estrictos locales de V son puntos de equilibrio estables.

$X' = -\nabla V(x)$ En la linealización, aparecen derivadas segundas de V.

Teorema

Cualquier punto crítico no degenerado del sistema $X' = -\nabla V(X)$, con V analítica, en $\mathbb{R}^2$, es un punto silla o un nodo. Además, si (x_0, y_0) es un punto silla de V, entonces un punto silla del sistema, y si (x_0, y_0) es un mínimo o máximo local estricto de V, entonces es un nodo estable o inestable, respectivamente, del sistema.

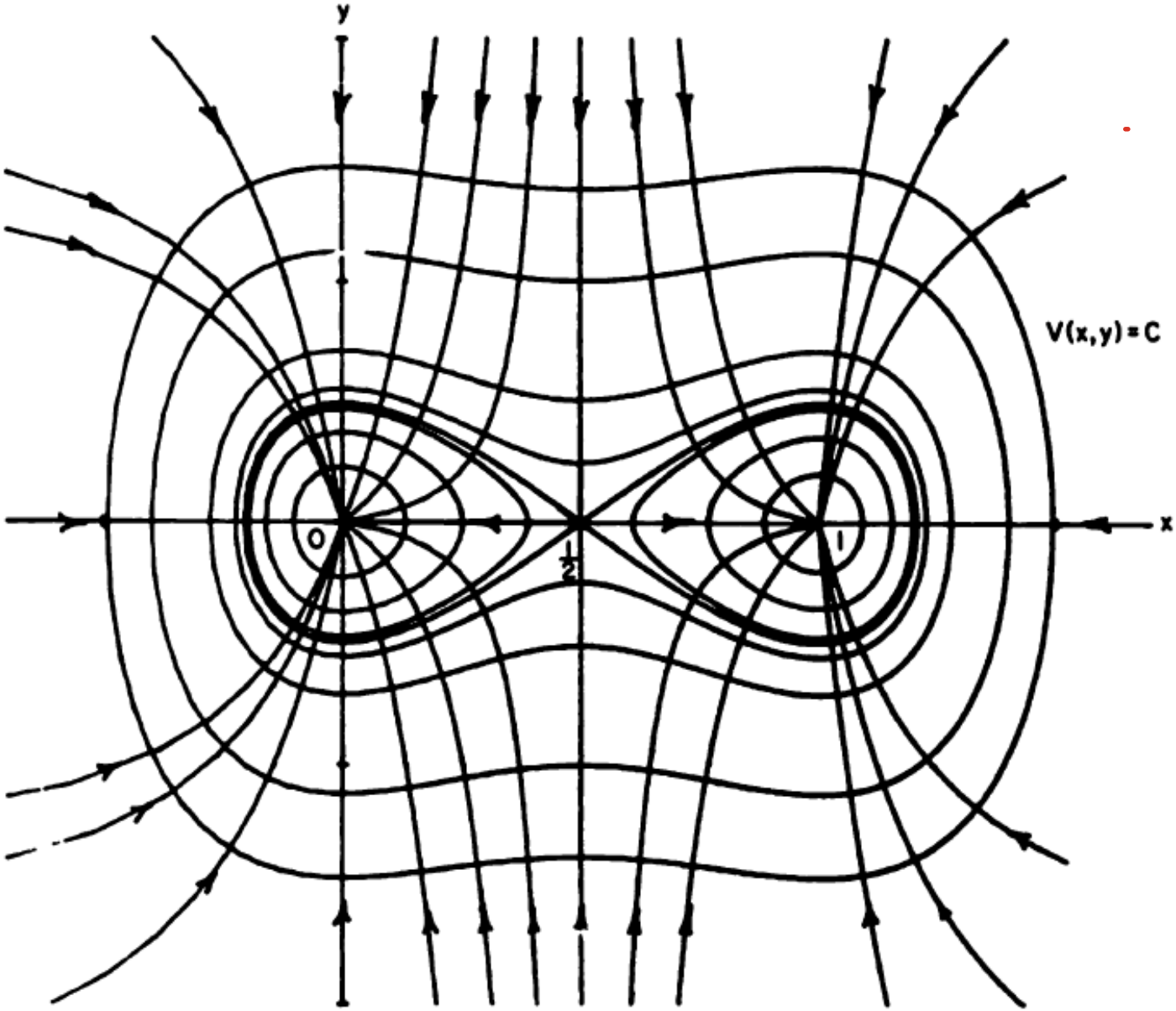
Teorema

Cualquier punto crítico no degenerado del sistema $X' = V(X)$, con V analítica, en $\mathbb{R}^2$, es un punto silla o un nodo. Además, si (x_0, y_0) es un punto silla de V, entonces un punto silla del sistema, y si (x_0, y_0) es un mínimo o máximo local estricto de V, entonces es un nodo estable o inestable, respectivamente, del sistema.

Ejemplo: sea $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$. El sistema gradiente asociado es

$$\begin{cases} x' = -4x(x-1)(x-1/2) \\ y' = -2y. \end{cases}$$

$-\nabla V(x, y)$


y
V(x,y)=C
x
0
1
½

Caos

Sistema de Lorenz: formulado en 1963 como un modelo muy simplificado de convección atmosférica (aire se mueve verticalmente en la atmósfera debido a diferencias de temperatura y densidad.)

Caos

Sistema de Lorenz: formulado en 1963 como un modelo muy simplificado de convección atmosférica (aire se mueve verticalmente en la atmósfera debido a diferencias de temperatura y densidad.)
Este sistema tiene un 'atractor' extraño. Lorenz partió de las ecuaciones de la dinámica de fluidos usadas en meteorología y realizó una fuerte simplificación mediante una expansión en series de Fourier, reteniendo únicamente unos pocos modos dominantes.
El resultado fue un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x' = \sigma(y - x)$$

$$y' = rx - y - xz$$

$$z' = xy - bz$$

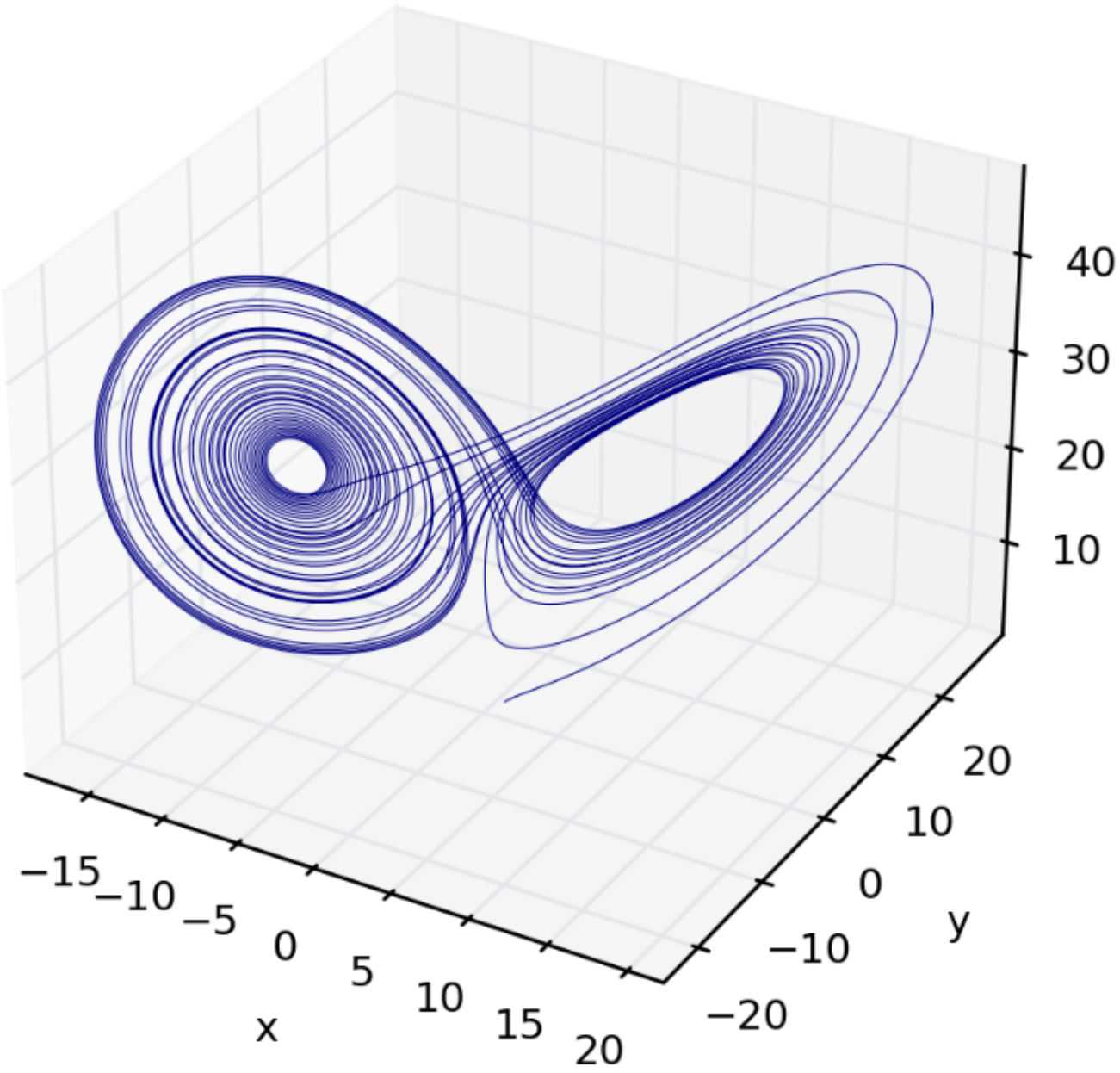


Caos

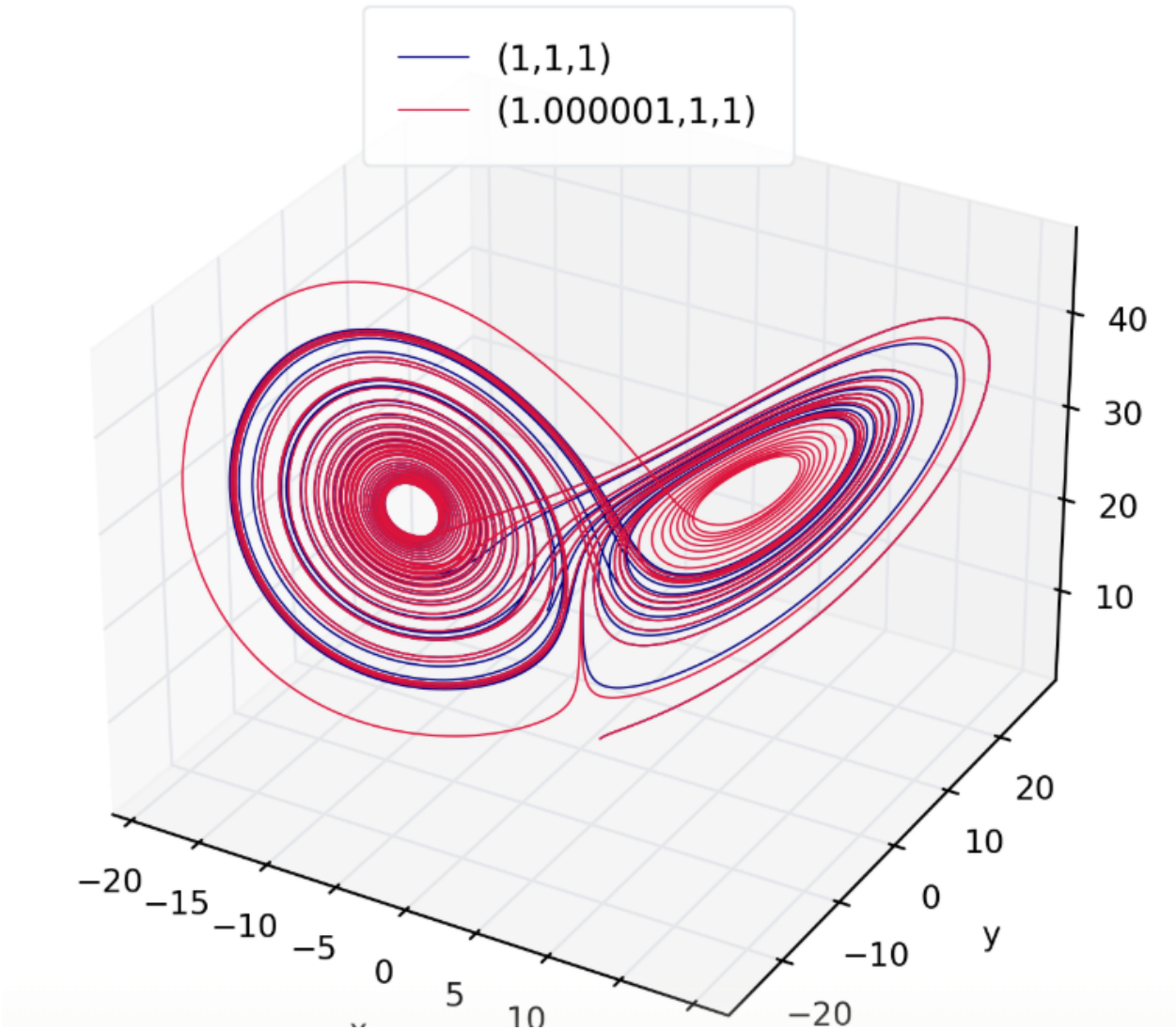
Sistema de Lorenz: formulado en 1963 como un modelo muy simplificado de convección atmosférica (aire se mueve verticalmente en la atmósfera debido a diferencias de temperatura y densidad.)
Este sistema tiene un 'atractor' extraño. Lorenz partió de las ecuaciones de la dinámica de fluidos usadas en meteorología y realizó una fuerte simplificación mediante una expansión en series de Fourier, reteniendo únicamente unos pocos modos dominantes.
El resultado fue un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

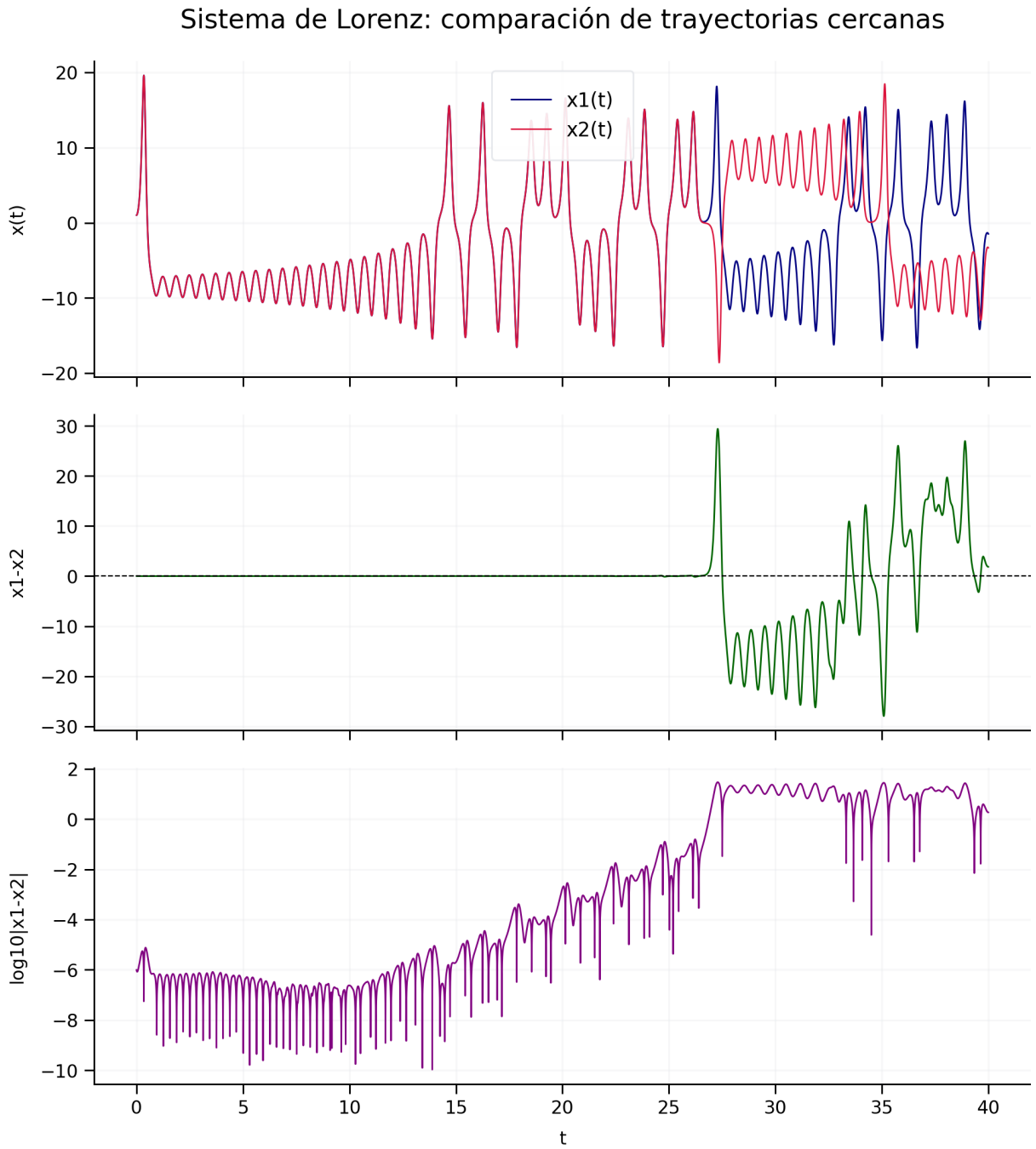
$$\left.\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz \end{aligned}\right\}$$

x representa la intensidad de la circulación convectiva, y está relacionado con la diferencia horizontal de temperatura y z mide la desviación del perfil vertical de temperatura respecto del equilibrio.



$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28.$


Efecto mariposa en el sistema de Lorenz
(1,1,1)
(1.000001,1,1)
40
30
20
10
20
10
0
−10
−20
y
−20
−15
−10
−5
0
5
10


Sistema de Lorenz: comparación de trayectorias cercanas
x1(t)
x2(t)
x(t)
x1-x2
log10|x1-x2|
t

Linealización del sistema de Lorenz

Puntos de equilibrio: $(0,0,0)$ y, para $r > 1$,

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Linealización del sistema de Lorenz

Puntos de equilibrio: $(0,0,0)$ y, para $r > 1$,

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Linealizando:

$$Y' = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} Y.$$

Linealización del sistema de Lorenz

Puntos de equilibrio: $(0,0,0)$ y, para $r > 1$,

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Linealizando:

$$Y' = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} Y.$$

En el origen, los valores propios son $-b$ y

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}).$$

$0 < r < 1$

Linealización del sistema de Lorenz

Puntos de equilibrio: $(0,0,0)$ y, para $r > 1$,

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Linealizando:

$$Y' = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} Y.$$

En el origen, los valores propios son $-b$ y

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}).$$

Así, para $0 \leq r < 1$, todas las soluciones convergen al origen (no sólo para trayectorias que comienzan cerca del origen).

Para $r > 1$, no es cierto que todas las soluciones tienden al origen, de hecho, existe v tal que toda solución que comienza fuera del elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = v$$

ingresa al elipsoide y permanece dentro para todo tiempo posterior.

Para $r > 1$, no es cierto que todas las soluciones tienden al origen, de hecho, existe v tal que toda solución que comienza fuera del elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = v$$

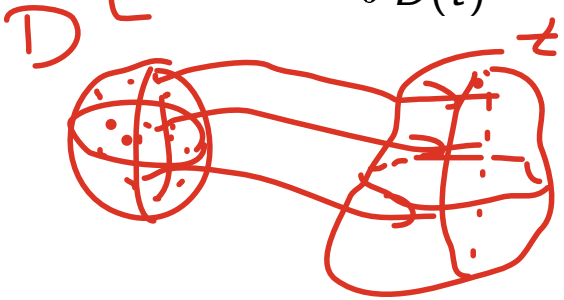
ingresa al elipsoide y permanece dentro para todo tiempo posterior. Todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide. Denotamos por Λ a dicho conjunto.

Para $r > 1$, no es cierto que todas las soluciones tienden al origen, de hecho, existe v tal que toda solución que comienza fuera del elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = v$$

ingresa al elipsoide y permanece dentro para todo tiempo posterior. Todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide. Denotamos por Λ a dicho conjunto.
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ cualquier región con frontera suave y sea $D(t)$ la imagen del flujo del sistema de Lorenz en el instante t. Denotamos por $V(t)$ el volumen de dicha región. Entonces,

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{D(t)} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = -(\sigma + 1 + b)V(t).$$



$$V'(t) = -kV(t)$$

$$\Longrightarrow \quad V(t) = c_0 e^{-kt} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

Para $r > 1$, no es cierto que todas las soluciones tienden al origen, de hecho, existe v tal que toda solución que comienza fuera del elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = v$$

ingresa al elipsoide y permanece dentro para todo tiempo posterior. Todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide. Denotamos por Λ a dicho conjunto.
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ cualquier región con frontera suave y sea $D(t)$ la imagen del flujo del sistema de Lorenz en el instante t. Denotamos por $V(t)$ el volumen de dicha región. Entonces,

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{D(t)} \text{div F}\, dx\, dy\, dz = -(\sigma + 1 + b)V(t).$$

Así,

$$V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V(0).$$

Para $r > 1$, no es cierto que todas las soluciones tienden al origen, de hecho, existe v tal que toda solución que comienza fuera del elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = v$$

ingresa al elipsoide y permanece dentro para todo tiempo posterior. Todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide. Denotamos por Λ a dicho conjunto.
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ cualquier región con frontera suave y sea $D(t)$ la imagen del flujo del sistema de Lorenz en el instante t. Denotamos por $V(t)$ el volumen de dicha región. Entonces,

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{D(t)} \text{div F}\, dx\, dy\, dz = -(\sigma + 1 + b)V(t).$$

Así,

$$V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V(0).$$

En particular, el volumen de Λ es cero.