Métodos Matemáticos
Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: ecuaciones de primer orden y el método de características

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Octubre, 2026

Bibliografía principal para la clase:

- Partial Differential Equations (Fourth Edition). F. John, Springer-Verlag, New York 1982.
- Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Tyn Myint-U and L. Debnath, Birkhauser 2007.

Ejemplos de EDP

- Ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0.$$

Para $n = 3$ la ec. de Laplace aparece en el estudio de campo gravitacionales, electroestáticos, temperatura en equilibrio, etc.

Ejemplos de EDP

- Ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0.$$

Para $n = 3$ la ec. de Laplace aparece en el estudio de campo gravitacionales, electroestáticos, temperatura en equilibrio, etc.

- La ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

En aplicaciones, la ec. aparece en el estudio de propagación de ondas de sonido, vibración de cuerdas y membranas, etc.

Ejemplos de EDP

- Ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0.$$

  Para $n = 3$ la ec. de Laplace aparece en el estudio de campo gravitacionales, electroestáticos, temperatura en equilibrio, etc.
- La ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

  En aplicaciones, la ec. aparece en el estudio de propagación de ondas de sonido, vibración de cuerdas y membranas, etc.
- Ecuaciones de Maxwell:

$$\varepsilon E_t = \text{curl} H, \quad \mu H_t = -\text{curl } E, \quad \text{div } E = \text{div } H = 0.$$

Ejemplos de EDP

- Ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0.$$

Para $n = 3$ la ec. de Laplace aparece en el estudio de campo gravitacionales, electroestáticos, temperatura en equilibrio, etc.

- La ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

En aplicaciones, la ec. aparece en el estudio de propagación de ondas de sonido, vibración de cuerdas y membranas, etc.

- Ecuaciones de Maxwell:

$$\varepsilon E_t = \text{curl} H, \quad \mu H_t = -\text{curl } E, \quad \text{div } E = \text{div } H = 0.$$

- Ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m que se mueve en un campo de energía potencial V:

$$ih\psi_t = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi.$$

$|\psi|^2$

EDP de primer orden

La ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden más general en dos variables es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es la función incógnita.

EDP de primer orden

La ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden más general en dos variables es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es la función incógnita.
En tres variables x, y, z,

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0 \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

EDP de primer orden

La ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden más general en dos variables es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es la función incógnita.
En tres variables x, y, z,

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0 \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

Si F es una función lineal en las derivadas parciales de u, se dice que la ecuación es **casi lineal**. La ecuación casi lineal más general es

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u),$$

con coeficientes a, b y c.

EDP de primer orden

La ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden más general en dos variables es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es la función incógnita.
En tres variables x, y, z,

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0 \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

Si F es una función lineal en las derivadas parciales de u, se dice que la ecuación es **casi lineal**. La ecuación casi lineal más general es

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u),$$

con coeficientes a, b y c.
Si F es lineal en las variables u, u_x y u_y, entonces la ecuación se llama **lineal**. La ecuación lineal más general es:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y).$$

EDP de primer orden

La ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden más general en dos variables es

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es la función incógnita.
En tres variables x, y, z,

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0 \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

Si F es una función lineal en las derivadas parciales de u, se dice que la ecuación es **casi lineal**. La ecuación casi lineal más general es

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u),$$

con coeficientes a, b y c.
Si F es lineal en las variables u, u_x y u_y, entonces la ecuación se llama **lineal**. La ecuación lineal más general es:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y).$$

Un ecuación que no es lineal se llama **no lineal**.

Asumiremos que las funciones coeficientes son de clase C^1.

Un ejemplo simple

Consideremos

$$u_t + cu_x = 0. \tag{1}$$

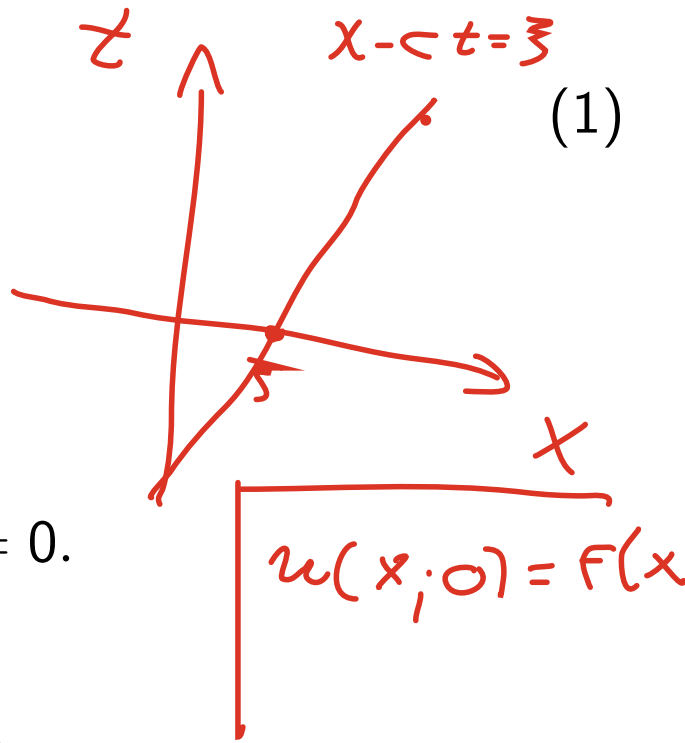
$u = u(t, x)$

$u(0, x) = f(x)$

Un ejemplo simple

Consideremos

$$u_t + cu_x = 0. \tag{1}$$



Realizando el cambio de variabes

$$x - ct = \xi$$

y entonces si u es solución de (1),

$$\frac{d}{dt}u(ct + \xi, t) = cu_x + u_t = 0.$$

Asi, la solución general de (1) es

$$u(x,t) = f(\xi) = f(x - ct).$$

Un ejemplo simple

Consideremos

$$u_t + cu_x = 0. \tag{1}$$

Realizando el cambio de variabes

$$x - ct = \xi$$

y entonces si u es solución de (1),

$$\frac{d}{dt}u(ct + \xi, t) = cu_x + u_t = 0.$$

Ası, la solución general de (1) es

$$u(x, t) = f(\xi) = f(x - ct).$$

Recíprocamente, si $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces la función

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

es solución de (1).

El gráfico de u representa una onda que se propaga a la derecha con velocidad c.

La cantidad u simplemente es arrastrada por un flujo uniforme.

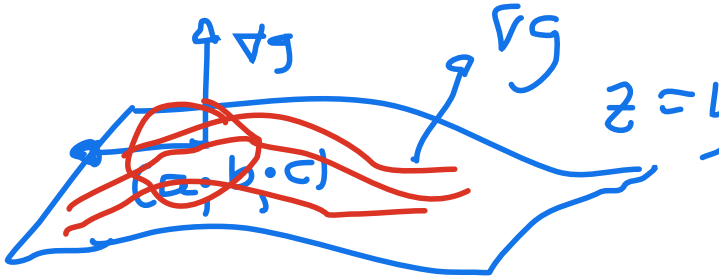
Interpretación geométrica de una ecuación de primer orden

Sea

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u). \tag{2}$$

Supongamos que $z = u(x,y)$ una solución de la ecuación. La superficie $z = u(x,y)$ se denomina superficie integral. El vector normal a dicha superficie es

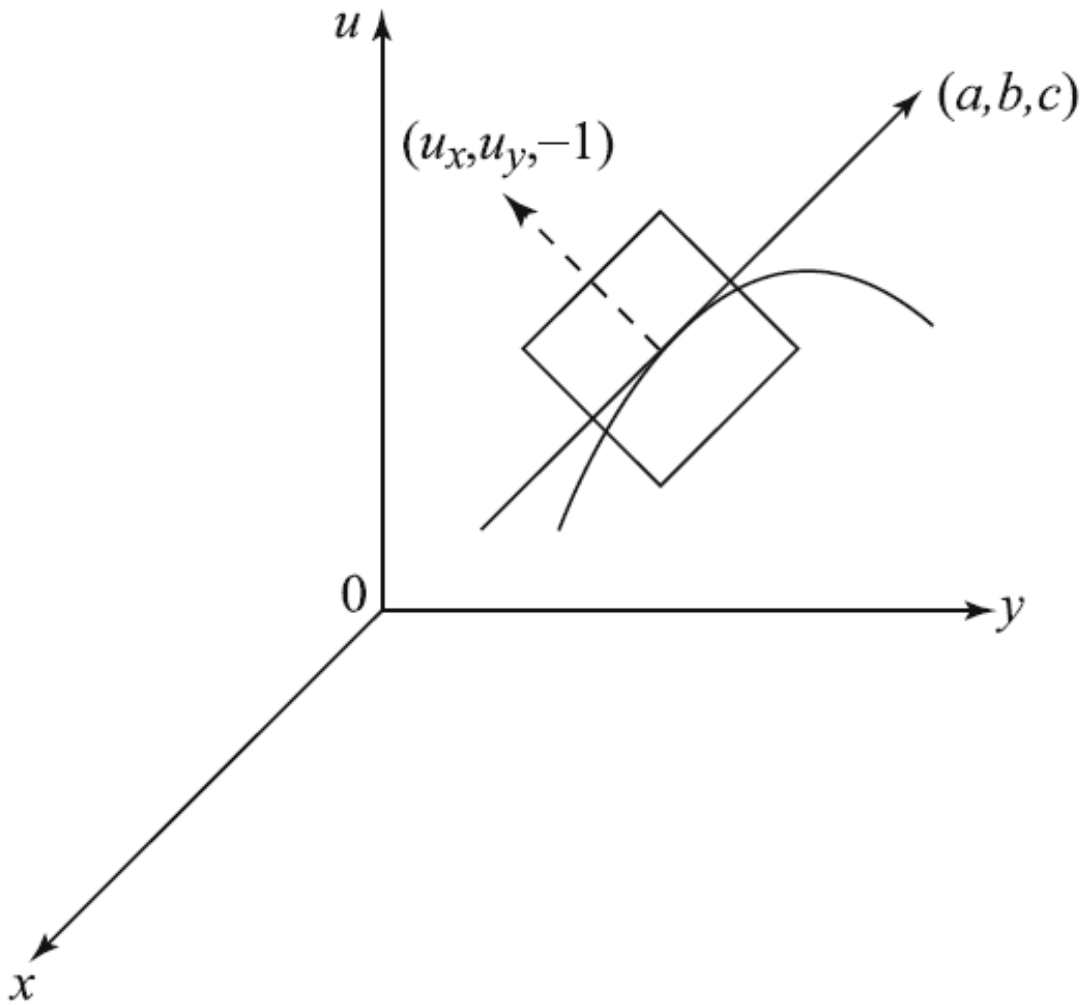
$$(u_x, u_y, -1).$$



La ec. (2) puede reescribirse como

$$(a,b,c)\cdot(u_x,u_y,-1) = 0.$$

Así, u es solución si el **vector de direcciones características** (a,b,c) es tangente a la superficie $z = u(x,y)$.


u
(a,b,c)
(u_x,u_y,−1)
0
y
x

Una curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

cuyo vector tangente en cada punto coincide con las direcciones características se denomina **curva característica**.

Una curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

cuyo vector tangente en cada punto coincide con las direcciones características se denomina **curva característica**.
Las ecuaciones

$$x'(t) = a(x, y, z), \quad y'(t) = b(x, y, z), \quad z'(t) = c(x, y, z),$$

se denominan **ecuaciones características**. Si a, b, c son funciones C^1 en una región Ω, entonces sabemos a partir de la teoría de E.D.O. que a través de cada punto de Ω pasa exactamente una curva característica.

Una curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

cuyo vector tangente en cada punto coincide con las direcciones características se denomina **curva característica**.
Las ecuaciones

$$x'(t) = a(x, y, z), \quad y'(t) = b(x, y, z), \quad z'(t) = c(x, y, z),$$

se denominan **ecuaciones características**. Si a, b, c son funciones C^1 en una región Ω, entonces sabemos a partir de la teoría de E.D.O. que a través de cada punto de Ω pasa exactamente una curva característica.
Si una superficie S dada por $z = u(x, y)$ es una unión de curvas características, entonces S es una superficie integral.
Recíprocamente, si P_0 pertenece a una superficie integral S y si γ es la curva característica que pasa por P_0, entonces γ yace completamente en S.

Problema de Cauchy

Sea Γ una curva dada paramétricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad s \in I.$$

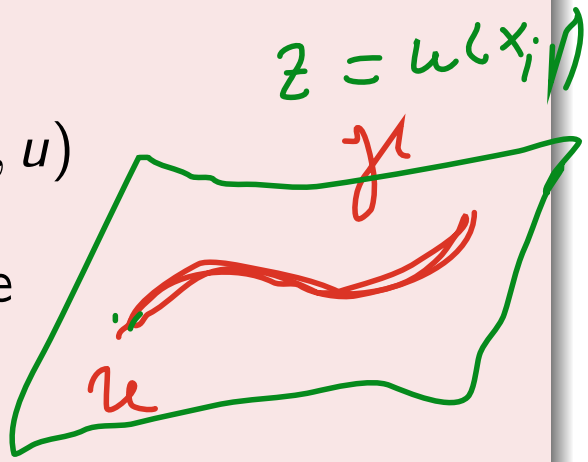
El problema de Cauchy para la E.D.P:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

consiste en encontrar una solución $u = u(x, y)$ tal que

$$h(s) = u(f(s), g(s))$$

para todo $s \in I$.



$$u(x, 0) = h(x)$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s) \end{cases}$$

Problema de Cauchy

Problema de Cauchy

Sea Γ una curva dada paramétricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad s \in I.$$

El problema de Cauchy para la E.D.P:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

consiste en encontrar una solución $u = u(x, y)$ tal que

$$h(s) = u(f(s), g(s))$$

para todo $s \in I$.

Un problema de valores iniciales es un caso particular del problema de Cauchy:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = h(t).$$

Método de Características

- Sea Γ una curva dada paramétricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad s \in I,$$

con f, g y h de clase C^1 en I.

- Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ un punto de Γ y supongamos que a, b y c son de clase C^1 cerca de P_0.
- Idea del método: la superficie integral $z = u(x, y)$ tendrá que consistir de las curvas características que pasen a través de los puntos de Γ.

Método de Características

- Sea Γ una curva dada paramétricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad s \in I,$$

con f, g y h de clase C^1 en I.

- Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ un punto de Γ y supongamos que a, b y c son de clase C^1 cerca de P_0.
- Idea del método: la superficie integral $z = u(x, y)$ tendrá que consistir de las curvas características que pasen a través de los puntos de Γ.

Sean

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t)$$

tales que

$$X(s, 0) = f(s), \quad Y(s, 0) = g(s), \quad Z(s, 0) = h(s)$$

y

$$X_t = a(X, Y, Z), \quad Y_t = b(X, Y, Z), \quad Z_t = Z(X, Y, Z).$$

Método de Características

- Sea Γ una curva dada paramétricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad s \in I,$$

con f, g y h de clase C^1 en I.

- Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ un punto de Γ y supongamos que a, b y c son de clase C^1 cerca de P_0.
- Idea del método: la superficie integral $z = u(x, y)$ tendrá que consistir de las curvas características que pasen a través de los puntos de Γ.

Sean

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t)$$

tales que

$$X(s, 0) = f(s), \quad Y(s, 0) = g(s), \quad Z(s, 0) = h(s)$$

y

$$X_t = a(X, Y, Z), \quad Y_t = b(X, Y, Z), \quad Z_t = Z(X, Y, Z).$$

La existencia de las funciones X, Y y Z está garantizada por resultados de existencia y dependencia continua en parámetros.

Las funciones X, Y y Z son de clase C^1 cerca del punto $(s_0, 0)$.

Las funciones X, Y y Z son de clase C^1 cerca del punto $(s_0, 0)$.
Las ecuaciones

$$x = X(s,t), \quad y = Y(s,t), \quad z = Z(s,t)$$

representan una superfie $S : z = u(x,y)$ si podemos resolver de las dos primeras igualdades s y t en términos de x e y:

$$s = S(x,y), \quad t = T(x,y)$$

y entonces u es

$$z = u(x,y) = Z(S(x,y), T(x,y)).$$

Para que esto se pueda realizar cerca de $(s_0, 0)$ es suficiente que

$$J = \det \begin{bmatrix} X_s(s_0,0) & Y_s(s_0,0) \\ X_t(s_0,0) & Y_t(s_0,0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Las funciones X, Y y Z son de clase C^1 cerca del punto $(s_0, 0)$.
Las ecuaciones

$$x = X(s,t), \quad y = Y(s,t), \quad z = Z(s,t)$$

representan una superfie $S : z = u(x,y)$ si podemos resolver de las dos primeras igualdades s y t en términos de x e y:

$$s = S(x,y), \quad t = T(x,y)$$

y entonces u es

$$z = u(x,y) = Z(S(x,y), T(x,y)).$$

Para que esto se pueda realizar cerca de $(s_0, 0)$ es suficiente que

$$J = \det \begin{bmatrix} X_s(s_0,0) & Y_s(s_0,0) \\ X_t(s_0,0) & Y_t(s_0,0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si $J = 0$ no hay solución del problema de Cauchy, excepto en el caso en que Γ es característica. En ese caso, puede haber infinitas soluciones.

Ejemplo: resuelva la ec. del transporte con dato inicial

$$u_y + cu_x = 0, \quad u(x,0) = h(x).$$

$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ejemplo: resuelva la ec. de Euler

$$\sum_{k=1}^{n} x_k u_{x_k} = \alpha u,$$

$$\longrightarrow u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

$$\begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = s_{n-1} \\ x_n = 1 \\ z = h(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \end{cases}$$

Ejemplo: resuelva la ec. de Euler

$$\sum_{k=1}^{n} x_k u_{x_k} = \alpha u,$$

$$u(x_1, ..., x_{n-1}, 1) = h(x_1, ..., x_{n-1}).$$

¿Por qué no se habrá propuesto el dato en 0?

Ejercicios: resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

- $u_x + u_y = u^2$, $u(x,0) = h(x)$.
- $u_y = xuu_x$, $u(x,0) = x$.
- $xu_y - yu_x = u$, $u(x,0) = h(x)$.

Forma canónica de una ec. lineal de primer orden

Sea

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y) = d(x,y). \tag{3}$$

Introducimos variables

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y),$$

donde $\eta, \xi \in C^1$ y

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0.$$

La regla de la cadena implica

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

Luego, reemplazando en (3):

$$Au_\xi + Bu_\eta + cu = d, \tag{4}$$

$$A = u\xi_x + b\xi_y, \quad B = a\eta_x + b\eta_y.$$

Forma canónica de una ec. lineal de primer orden

$B = 0$ si y sólo si $a\eta_x + b\eta_y = 0$. Luego,

$$\eta(x, y) = c$$

son curvas características de (3). En cuanto ξ, cualquier familia de curvas no tangentes a las curvas características $\eta(x, y) = c$ funciona. Luego, (4) se simplifica:

$$u_\xi + \alpha(\xi, \eta)u = \beta(\xi, \eta), \quad \alpha(\xi, \eta) = \frac{c(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)}, \ \beta(\xi, \eta) = \frac{d(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)}.$$

Ejemplo: reducir la siguiente ecuación a su forma canónica y obtener la solución general:

$$u_x - u_y = u.$$

Ejemplo: reducir la siguiente ecuación a su forma canónica y obtener la solución general:

$$u_x - u_y = u.$$

Las curvas características son $x = t + c_1$, $y = -t + c_2$ y $z = -t + c_3$. Luego

$$\eta = \eta(x, y) = x + y = c$$

y elegimos para ξ curvas no tangentes:

$$\xi = \xi(x, y) = y = c.$$

Así $u_\eta = \eta_x$ y $u_\xi = -u_x + u_y$ y entonces la forma normal es

$$u_\xi = u.$$

Integrando y volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general:

$$u(x, y) = f(x + y)e^{-y}.$$

Ejemplo: reducir la siguiente ecuación a su forma canónica y obtener la solución general:

$$u_x - u_y = u.$$

Las curvas características son $x = t + c_1$, $y = -t + c_2$ y $z = -t + c_3$. Luego

$$\eta = \eta(x, y) = x + y = c$$

y elegimos para ξ curvas no tangentes:

$$\xi = \xi(x, y) = y = c.$$

Así $u_\eta = \eta_x$ y $u_\xi = -u_x + u_y$ y entonces la forma normal es

$$u_\xi = u.$$

Integrando y volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general:

$$u(x, y) = f(x + y)e^{-y}.$$

Ejercicio: reducir a su forma canónica y resolver la ec. $yu_y + u_y = x$.

Método de separación de variables

Se plantea

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad \text{o} \quad u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

a fin de transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Método de separación de variables

Se plantea

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad \text{o} \quad u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

a fin de transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: resuelva

$$y^2 u_x^2 + x^2 u_y^2 = (xyu)^2.$$

Método de separación de variables

Se plantea

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad \text{o} \quad u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

a fin de transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: resuelva

$$y^2 u_x^2 + x^2 u_y^2 = (xyu)^2.$$

Escribimos $u(x,y) = f(x)g(y)$.

Método de separación de variables

Se plantea

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad \text{o} \quad u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

a fin de transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: resuelva

$$y^2 u_x^2 + x^2 u_y^2 = (xyu)^2.$$

Escribimos $u(x,y) = f(x)g(y)$.

La solución general es

$$u(x,y) = C.exp\left(\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\sqrt{1-\lambda^2}\right).$$

Método de separación de variables

Se plantea

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad \text{o} \quad u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

a fin de transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo: resuelva

$$y^2 u_x^2 + x^2 u_y^2 = (xyu)^2.$$

Escribimos $u(x,y) = f(x)g(y)$.
La solución general es

$$u(x,y) = C.exp\left(\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\sqrt{1-\lambda^2}\right).$$

Ejercicio: resuelva mediante separación de variables la ecuación $u_x^2 + u_y^2 = 1$.